

Στοιχειώδη Σωματίδια

Διάλεξη 4η
Πετρίδου Χαρά

Νόμοι Διατήρησης στις Θεμελειώδεις Αλληλειδράσεις

- Συμμετρία ή αναλλοίωτο των εξισώσεων που περιγράφουν σύστημα σωματιδίων κάτω από μετασχηματισμούς => υπάρχουν μετασχηματισμοί που αφήνουν το σύστημα **αναλλοίωτο**
- Παράδειγμα: **η μετατόπιση και η στροφή στο χώρο** => αντιστοιχούν οι νόμοι διατήρησης **της ορμής και της στροφορμής**
- Οι μετασχηματισμοί μπορεί να είναι **συνεχείς ή διακριτοί**

Αν ένας τελεστής **αντιμετατίθεται** με την χαμιλτονιανή του συστήματος η αναμενόμενη τιμή του είναι **διατηρήσιμος κβαντικός αριθμός**

- Ιδιότητες των τελεστών:

$$U^{-1} \cdot U = 1 = U \cdot U^{-1}$$

- Μοναδιαίος τελεστής:

$$\tilde{A}^* = A^+$$

- Συζυγής:

- Αυτοσυζυγής ή Ερμιτιανός:

$$A = A^+$$

$$A \cdot A^+ = 1 = A^+ \cdot A$$

- Αντίστροφος:

$$\Rightarrow A^{-1} = A^+ = A \Rightarrow \textit{unitary}$$

$$A \cdot A^{-1} = 1 = A^{-1} \cdot A$$

Νόμοι Διατήρησης Κβαντικών Αριθμών Αρχές Αναλλοίωτου (III)

5

Αν ένας τελεστής **αντιμετατίθεται** με την χαμιλτονιανή του συστήματος η αναμενόμενη τιμή του είναι **διατηρήσιμος κβαντικός αριθμός**

- Στην **Αναπαράσταση Schroedinger**:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_s(t) = H \Psi_s(t) \rightarrow \Psi_s(t) = T(t, t_0) \Psi_s(t_0) \rightarrow T(t, t_0) = e^{-i(t-t_0)H/\hbar}$$

$$T \cdot T^{-1} = 1 \rightarrow T^{-1} = T^* = e^{i(t-t_0)H/\hbar} \Rightarrow \Psi_s^*(t) = (T \cdot \Psi_s(t_0))^* = \Psi_s(t_0)^* \cdot T(t, t_0)^*$$

- Στην **αναπαράσταση Heisenberg** η χρονική εξάρτηση δίνεται στον τελεστή και όχι στην κυματοσυνάρτηση: κάθε τελεστής Q είναι **χρονοεξαρτώμενος**

$$\langle Q_0 \rangle = \int \Psi_s^*(t) \cdot Q_0 \cdot \Psi_s(t) dV = \int \Psi_s^*(t_0) \cdot Q \cdot \Psi_s(t_0) dV = \langle Q \rangle$$

- Αν ο τελεστής Q δεν εξαρτάται απ'ευθείας από τον χρόνο:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

$$\langle Q_0 \rangle = \int \Psi_s^*(t) \cdot Q_0 \cdot \Psi_s(t) dV = \int \Psi_s^*(t_0) \cdot Q \cdot \Psi_s(t_0) dV = \langle Q \rangle$$

$$\Rightarrow T^{-1} \cdot Q_0 \cdot T = Q \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial T^{-1}}{\partial t} \cdot Q_0 \cdot T + T^{-1} \cdot Q_0 \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{i}{\hbar} H \cdot T^{-1} \cdot Q_0 \cdot T - \frac{i}{\hbar} T^{-1} \cdot Q_0 \cdot T \cdot H = \frac{i}{\hbar} (H \cdot Q - Q \cdot H)$$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{i}{\hbar} [Q, H]$$

- Αν $dQ/dt = 0 \Rightarrow \mathbf{Q}$ **αναλλοίωτο μέγεθος** $\Rightarrow$ **ΔΙΑΤΗΡΕΙΤΑΙ** $\Rightarrow$
 $[Q, H] = 0 \Rightarrow$ **ΑΝΤΙΜΕΤΑΤΙΘΕΤΑΙ** με την Χαμιλτονιανή

Ο Τελεστής της Μετατόπισης

7

- Η μετατόπιση είναι ένας συνεχής μετασχηματισμός

$$\Psi' = \Psi(r + \delta r) = \Psi(r) + \delta r \cdot \frac{\partial \Psi(r)}{\partial r} + \dots = \left(1 + \delta r \frac{\partial}{\partial r}\right) \Psi(r) = D \Psi(r)$$

$$D = \left(1 + \delta r \frac{\partial}{\partial r}\right)$$

- **D** είναι ο τελεστής της απειροστής χωρικής μετατόπισης
- Ο τελεστής της ορμής είναι:

$$p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial r}$$

- Μία πεπερασμένη μετατόπιση Δr είναι μία ακολουθία απειροστών μετατοπίσεων ($\Delta r = n\delta r$)

- Επομένως : $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{\hbar} p \delta r\right)^n = \exp\left(1 + \frac{i}{\hbar} p \Delta r\right)$ άρα D μοναδιαίος:
 $D^+ D = D^{-1} D = I \Rightarrow$ Ο τελεστής της ορμής είναι ο **‘γενήτορας’** του μετασχηματισμού των μετατοπίσεων και **ΑΝ αντιμετατίθεται** με την Χαμιλτονιανή **$[D, H] = 0 \Rightarrow [p, H] = 0 \Rightarrow$** Ο τελεστής της ορμής αντιμετατίθεται με H **$\Rightarrow p$ είναι ΔΙΑΤΗΡΗΣΙΜΟ μέγεθος**

- Η στροφή είναι επίσης ένας συνεχής μετασχηματισμός:

$$\Psi' = \Psi(\phi + \delta\phi) = \Psi(\phi) + \delta\phi \cdot \frac{\partial \Psi(\phi)}{\partial \phi} + \dots = \left(1 + \delta\phi \frac{\partial}{\partial \phi}\right) \Psi(\phi) = R \Psi(\phi)$$

$$R = \left(1 + \delta\phi \frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$

- Ο τελεστής της στροφής περί τον άξονα z:

$$R_z = 1 + \frac{i}{\hbar} J_z \delta\phi$$

$$\Delta\phi = n\delta\phi$$

$$R_z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{\hbar} J_z \delta\phi\right)^n = \exp\left(1 + \frac{i}{\hbar} J_z \Delta\phi\right)$$

$$R_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z$$

$$J_z = -i\hbar\left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

- **Διατήρηση της στροφορμής** περί ένα άξονα z προκύπτει με την σχέση αντιμετάθεσης του τελεστή J_z με την H : **$[J_z, H] = 0$**

- Όταν οι μετασχηματισμοί είναι συνεχείς οι κβαντικοί αριθμοί που διατηρούνται προστίθενται:

οι νόμοι διατήρησης είναι προσθετικοί

- Πραγματοποιούνται με **διακριτά βήματα** π.χ. Χωρική ανάκλαση ως προς την αρχή των αξόνων:

Ομοτιμία (parity)

Είναι ο τελεστής P που προκαλεί την χωρική αναστροφή των συντεταγμένων ($x, y, z \rightarrow -x, -y, -z$):

$P\Psi(r) = \Psi(-r) \Rightarrow P\Psi(-r) = P^2\Psi(r) = I \Rightarrow$ οι ιδιοτιμές του τελεστή P είναι $+1, -1$.

- Μία κυματοσυνάρτηση μπορεί να μην έχει συγκεκριμένη τιμή ομοτιμίας
- Η ομοτιμία **διατηρείται MONO** στις ισχυρές και τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις. **ΟΧΙ** στις ασθενείς: $[P, H] \neq 0$
- Η χωρική αναστροφή $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ είναι ισοδύναμη με :

$$|r| \rightarrow |r|, \theta \rightarrow \pi - \theta, \phi \rightarrow \pi + \phi \Rightarrow \Psi(\vec{r}) = \chi(|r|) Y_l^m(\theta, \phi)$$

$$\Psi(-\vec{r}) = \chi(|r|) Y_l^m(\pi - \theta, \pi + \phi) = \chi(|r|) \cdot (-1)^l \cdot Y_l^m(\theta, \phi)$$

$$\Rightarrow P\Psi(\vec{r}) = (-1)^l \cdot \Psi(\vec{r})$$

Διακριτοί Μετασχηματισμοί



- Οι νόμοι διατήρησης είναι πολλαπλασιαστικοί στους διακριτούς μετασχηματισμούς
- Η ομοτιμία είναι πολλαπλασιαστικός κβαντικός αριθμός $\Rightarrow$ η ομοτιμία ενός σύνθετου συστήματος είναι το γινόμενο των ομοτιμιών των επιμέρους στοιχείων του : Αν $\psi = \varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_\gamma \dots \Rightarrow P\psi = P\varphi_\alpha P\varphi_\beta P\varphi_\gamma \dots$
- Η “εσωτερική” ομοτιμία του πιονίου: Από την αλληλεπίδραση του πιονίου με το δευτέριο : $\pi^- + d \rightarrow n + n$ μπορούμε να αποδείξουμε ότι το πιόνιο έχει περιττή “εσωτερική” ομοτιμία

$$\pi^- : s_\pi = 0, d : s_d = 1 \Rightarrow S_{\pi+d} = 1; L_{\pi+d} = 0 \Rightarrow J_{\pi+d} = 1$$

$$\Rightarrow J_{n+n} = 1, \text{ (J ΔΙΑΤΗΡΕΙΤΑΙ)}$$

$\Rightarrow 1. L_{n+n} = 1, S_{n+n} = 0$ αλλά τότε Ψ_{n+n} **συμμετρική** ($\Psi_{s=0}$ είναι αντισυμμετρική)

$\Rightarrow 2. L_{n+n} = 0, S_{n+n} = 1$ Ψ_{n+n} **επίσης συμμετρική** ($\Psi_{s=1}$ είναι συμμετρική)

$\Rightarrow 3. L_{n+n} = 1, S_{n+n} = 1$ Ψ_{n+n} **αντι-συμμετρική** (ταυτόσημα φερμιόνια)

$\Rightarrow 4. L_{n+n} = 2, S_{n+n} = 1$ Ψ_{n+n} **συμμετρική**

$\Rightarrow$ **Αποδεκτή είναι μόνο η περίπτωση 3.**

$$\Rightarrow P(\pi, d) = (-1)^{L(\pi+d)} P(\pi) P(d) = (-1)^{L(n+n)} P(n) P(n), P(d) = P(n) P(p) = +1 \Rightarrow P(\pi) = -1$$

- Η θεωρία Dirac προβλέπει **αντίθετες ομοτιμίες για φερμιόνια και αντιφερμιόνια**
- Η εσωτερική ομοτιμία ζεύγους φερμιονίου - αντιφερμιονίου επιβεβαιώθηκε και πειραματικά π.χ. Στην αντίδραση:
$$p + p \rightarrow p + p + (p(\text{bar}) + p)$$
- **Αντίθετα** η εσωτερική ομοτιμία μποζονίου ταυτίζεται με την εσωτερική ομοτιμία του αντιμποζονίου του.

- Η θεωρία Dirac προβλέπει **αντίθετες ομοτιμίες για φερμιόνια και αντιφερμιόνια**
- Η εσωτερική ομοτιμία ζεύγους φερμιονίου - αντιφερμιονίου επιβεβαιώθηκε και πειραματικά π.χ. Στην αντίδραση:
$$p + p \rightarrow p + p + (p(\text{bar}) + p)$$
- **Αντίθετα** η εσωτερική ομοτιμία μποζονίου ταυτίζεται με την εσωτερική ομοτιμία του αντιμποζονίου του.

- Ο τελεστής συζυγίας φορτίου αλλάζει το **πρόσημο του φορτίου και της μαγνητικής ροπής** του σωματιδίου => ανταλλαγή του σωματίου με το αντισωματίό του.
- Συμβολίζεται με τον τελεστή **C**
- Πειραματικά έχει επιβεβαιωθεί το αναλλοίωτο των ισχυρών και ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων σε μετασχηματισμούς συζυγίας φορτίου και **η παραβίασή του στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις.**

⇒ πρωτόνιο: $Q = +e, B = +1, s = 1/2, \mu = +2.79(e\hbar/2Mc)$

αντιπρωτόνιο: $Q = -e, B = -1, s = 1/2, \mu = -2.79(e\hbar/2Mc)$

ηλεκτρόνιο: $Q = -e, L_e = +1, s = 1/2, \mu = -(e\hbar/2mc)$

ποζιτρόνιο : $Q = +e, L_e = -1, s = 1/2, \mu = +(e\hbar/2mc)$

Ο Τελεστής CP : Η διαμήκης πόλωση των νετρίνο & αντίνετρίνο

15

- Πειραματικά βρέθηκε ότι τα νετρίνο είναι αριστερόστροφα και τα αντίνετρίνο δεξιόστροφα

