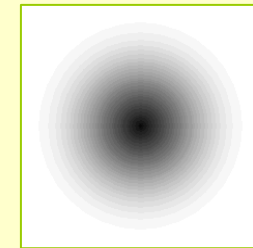
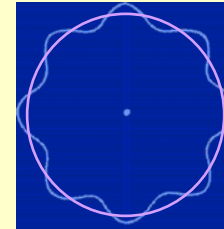
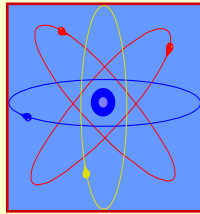
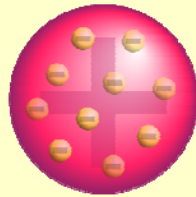
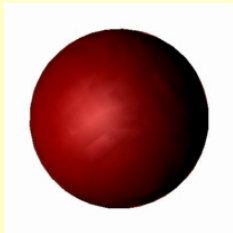
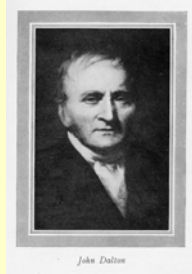


Το άτομο και η δομή του



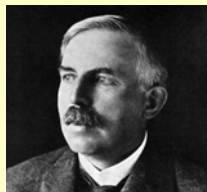
Δημόκριτος



Dalton



J.J. Thomson



Rutherford



Bohr



De Broglie



Schrödinger



Heisenberg

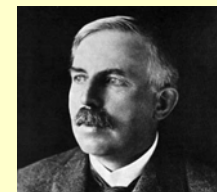
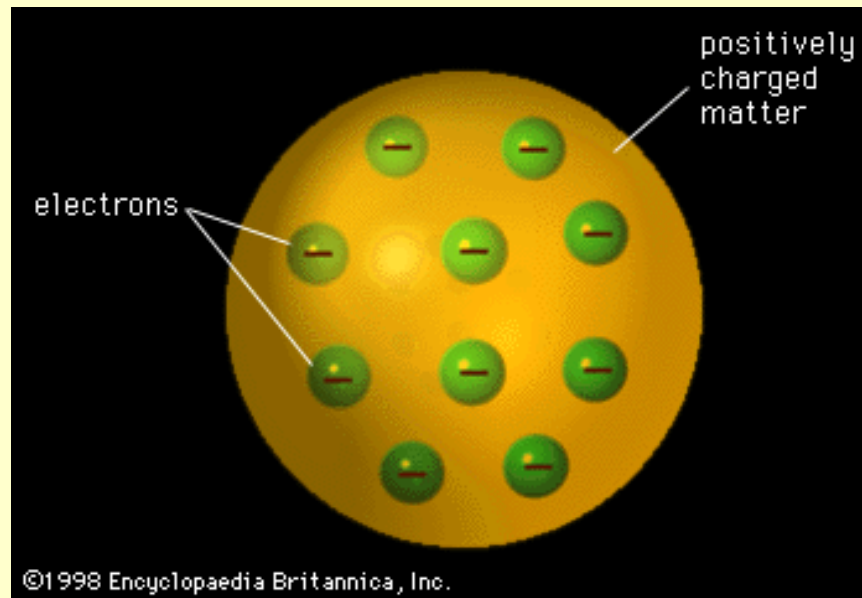
Born και άλλοι...

Το μοντέλο Thomson για το άτομο

Ο Thomson προσπαθώντας να κατανοήσει ποια μπορεί να είναι η δομή των ατόμων, συνδύασε τη γνώση που υπήρχε περί το 1900 για την ύλη (ύπαρξη των ουδετέρων ατόμων και ύπαρξη των αρνητικών ηλεκτρονίων) και πρότεινε ένα πολύ λογικό για την εποχή ατομικό μοντέλο (το οποίο ονομάστηκε και "plum pudding model").



J.J. Thomson

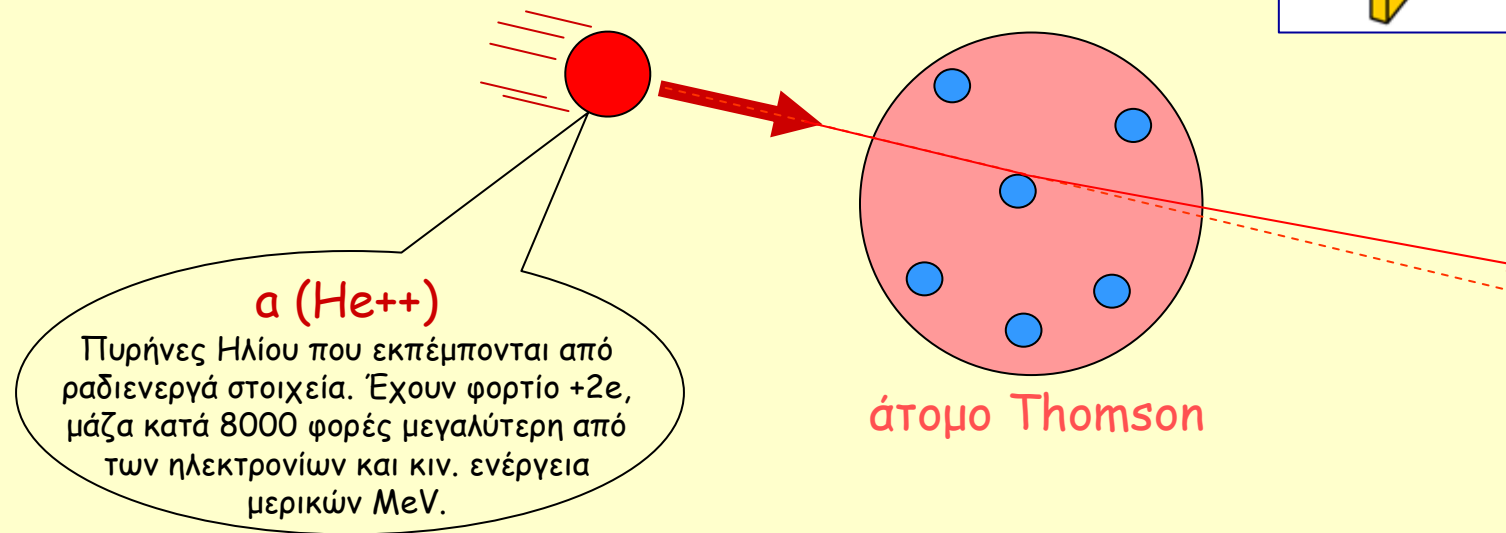
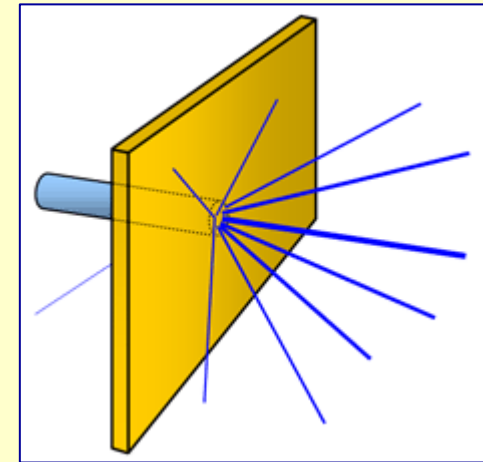


Rutherford

Η έρευνα για τη δομή των σωμάτων μπορεί να γίνει μέσα από το πώς αλληλεπιδρούν (πώς "σκεδάζονται").

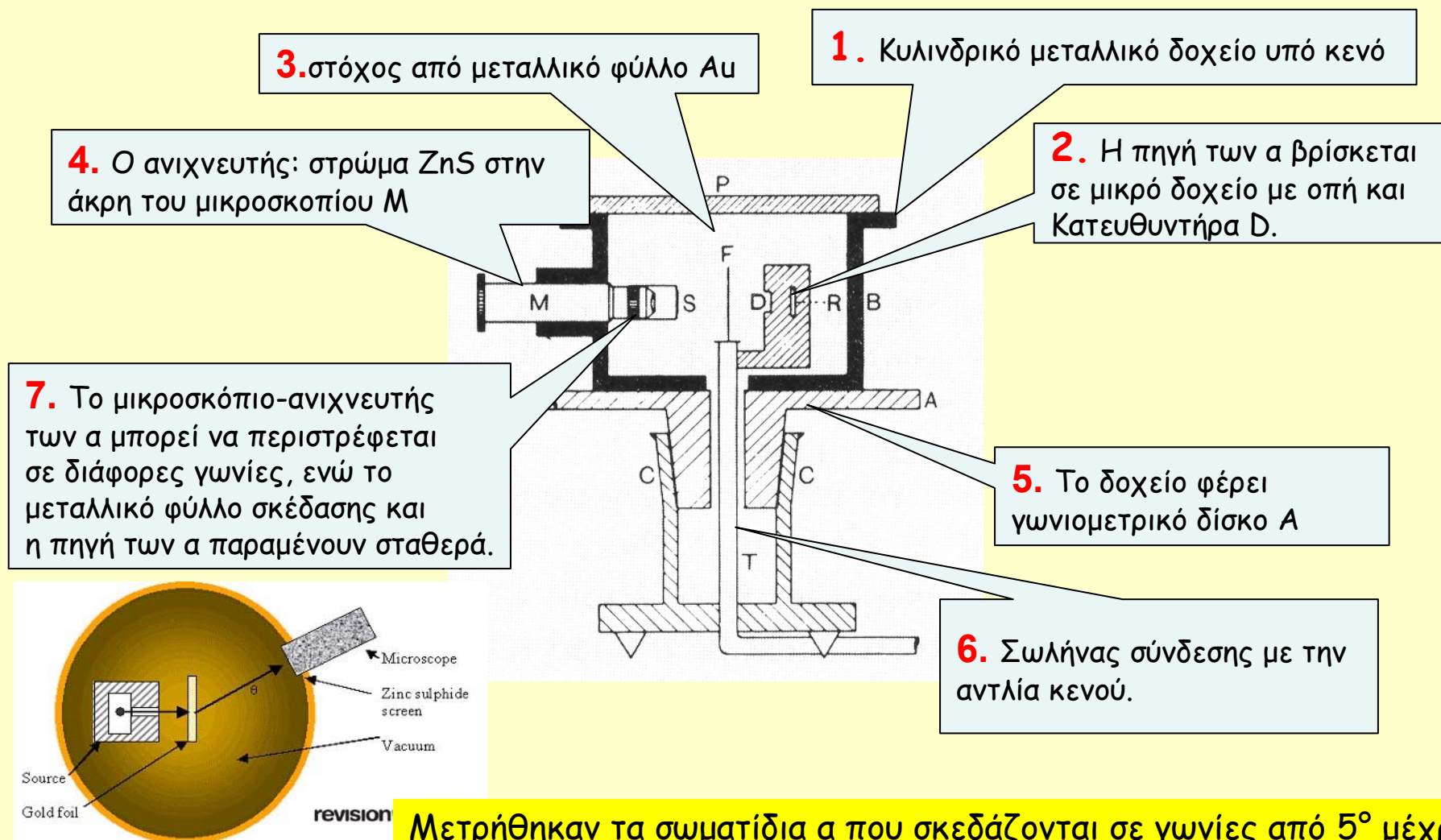
Σκέδαση Rutherford

Ο Rutherford σκέφθηκε να κάνει ένα πείραμα σκέδασης. Στο πείραμα αυτό θα έριχνε μία δέσμη σωματιδίων α πάνω σε ένα στόχο λεπτού μετάλλου και θα μετρούσε πώς σκεδάζονται τα σωματίδια στις διάφορες γωνίες σκέδασης.



Αν ισχύει το μοντέλο Thomson, τα σωματίδια α δεν θα σκεδάζονται σχεδόν καθόλου (γωνίες σκέδασης πολύ μικρότερες από 1°). Αυτό διότι τα σημειακά **ηλεκτρόνια** έχουν πολύ μικρή μάζα σε σχέση με τα σωματίδια α , ενώ η **θετική μάζα** του ατόμου δεν είναι σημειακή ώστε να ασκεί έντονη άπωση - απλά το σωματίδιο α θα περάσει μέσα από αυτήν.

Μελέτη της σκέδασης Rutherford με το πείραμα των Geiger και Marsden (1911-1913)



Μετρήθηκαν τα σωματίδια α που σκεδάζονται σε γωνίες από 5° μέχρι και 150° . Χρησιμοποιήθηκαν ως σκεδαστές λεπτά φύλλα χρυσού και λεπτά φύλλα αργύρου.
Βρέθηκε ότι υπάρχουν σκεδαζόμενα σωματίδια ακόμη και στις 150° !

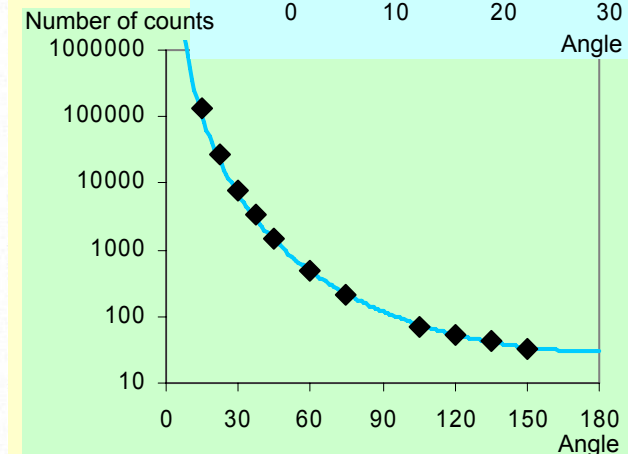
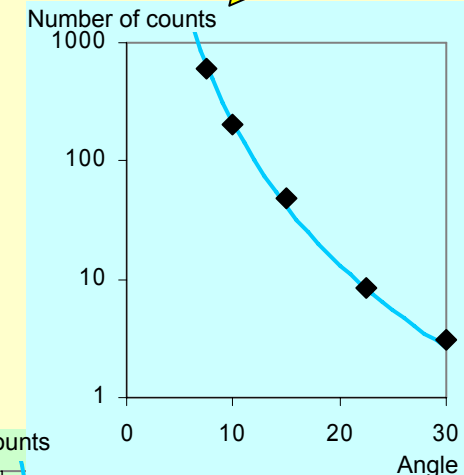
Ο Rutherford πρότεινε ένα μοντέλο όπου **όλη η μάζα και το θετικό φορτίο είναι συγκεντρωμένα στο κέντρο του ατόμου - σε έναν "πυρήνα"**.

Βάσει αυτής της υπόθεσης υπολόγισε το τι αναμένεται ως αποτέλεσμα του πειράματος.

Variation of scattering with angle.

I Angle of deflection, ϕ	II $\text{cosec}^4 \frac{1}{2}\phi$	III SILVER		V GOLD	
		Number of scintilla- tions, N	$\frac{N}{\text{cosec}^4 \frac{1}{2}\phi}$	Number of scintilla- tions, N	$\frac{N}{\text{cosec}^4 \frac{1}{2}\phi}$
150°	1.15	22.2	19.3	33.1	28.8
135	1.38	27.4	19.8	43.0	31.2
120	1.79	33.0	18.4	51.9	29.0
105	2.53	47.3	18.7	69.5	27.5
75	7.25	136	18.8	211	29.1
60	16.0	320	20.0	477	29.8
45	46.6	989	21.2	1435	30.8
37.5	93.7	1760	18.8	3300	35.3
30	223	5260	23.6	7800	35.0
22.5	690	20300	29.4	27300	39.6
15	3445	105400	30.6	132000	38.4
30	223	5.3	0.024	3.1	0.014
22.5	690	16.6	0.024	8.4	0.012
15	3445	93.0	0.027	48.2	0.014
10	17330	508	0.029	200	0.0115
7.5	54650	1710	0.031	607	0.011
5	276300	—	—	3320	0.012

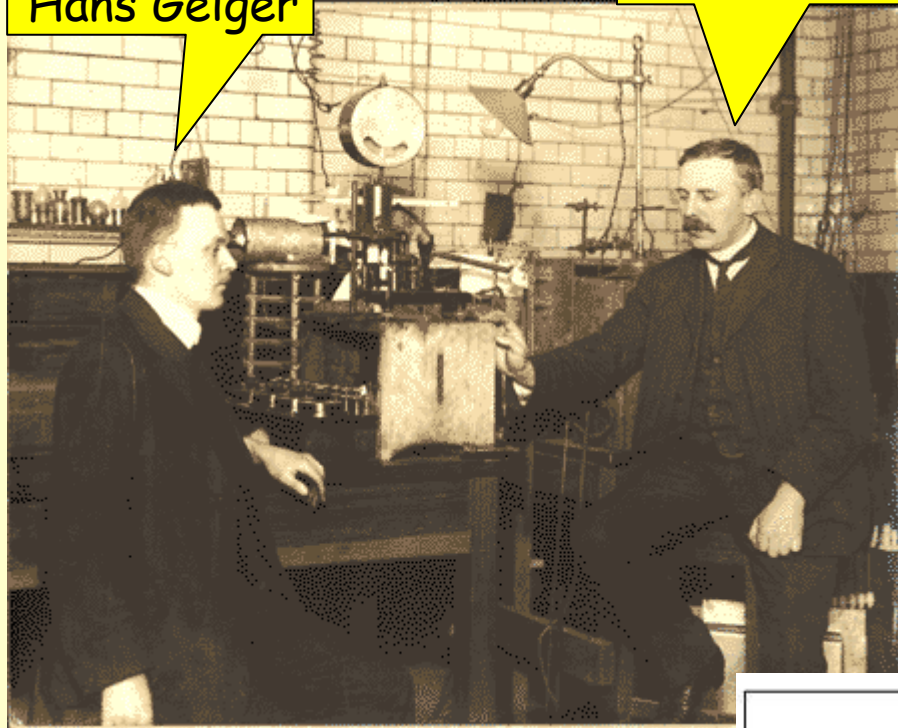
Σύγκριση πειραματικών σημείων ♦ και θεωρητικής πρόβλεψης με το μοντέλο Rutherford —



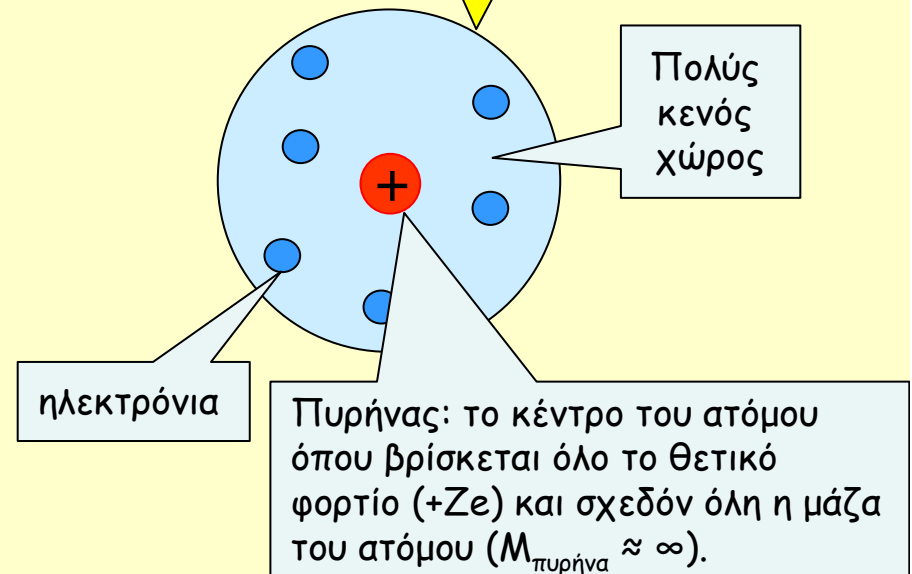
Από το *Radiations from Radioactive Substances* by Sir Ernest Rutherford, James Chadwick and C. D. Ellis, published by Cambridge University Press, 1930.

Hans Geiger

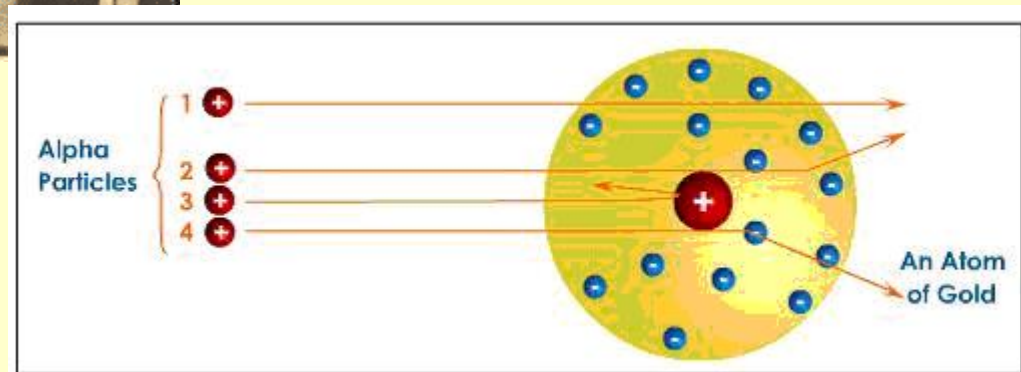
Ernest Rutherford



Το μοντέλο του



Το μοντέλο Rutherford αποδείχθηκε εξαιρετικά επιτυχές στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων της σκέδασης.



Την ανακάλυψη του πυρήνα, ακολούθησαν πολλές άλλες ανακαλύψεις, για τα ατομικά ηλεκτρόνια, για τις ιδιότητες του πυρήνα και τη σύστασή του κ.λ.π. Πολλές από αυτές τις ανακαλύψεις οφείλονται σε **πειράματα σκέδασης** π.χ. στους μεγάλους επιταχυντές (CERN, Fermilab,...).

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΗΝ ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ & ΜΕΓΕΘΟΣ ΤΟΥ ΠΥΡΗΝΑ

Θετικό σωματίδιο φορτίου $+ze$ και κιν. ενέργειας K , προσεγγίζει **κεντρικά** ακίνητο πυρήνα φορτίου $+Ze$ (υποθέτουμε ότι $m \ll M$, ώστε ο πυρήνας να θεωρείται ότι παραμένει ακίνητος).

Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση προσέγγισης του σωματιδίου στον πυρήνα;

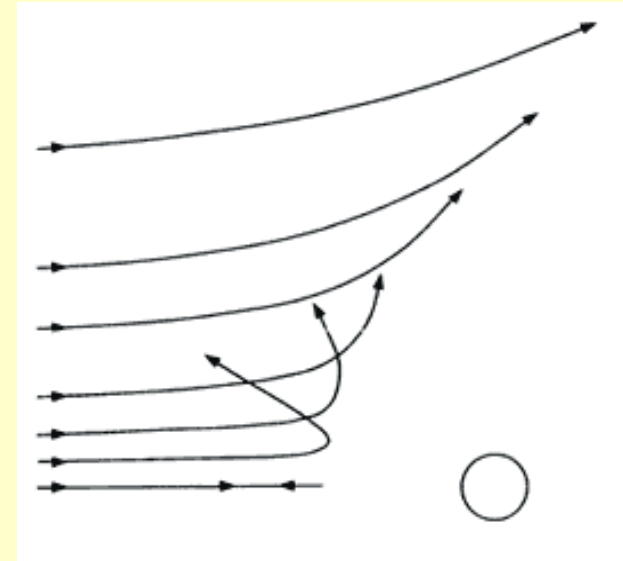
Η ασκούμενη δύναμη (απωστική) Coulomb και το αντίστοιχο δυναμικό εξαρτώνται από την απόσταση των δύο σωμάτων:

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Zze^2}{r^2} \Rightarrow V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Zze^2}{r}$$

Για κεντρική προσέγγιση και για $r = r_{\min} = D$, δυν. ενέργεια $V(D) = V_{\max}$ και κιν. = 0.

άρα $K = V_{\max} = V(D)$ και

$$D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Zze^2}{K}$$



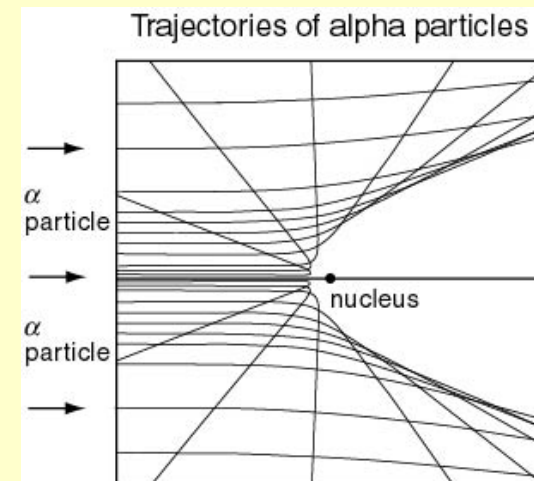
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογιστεί η ελάχιστη απόσταση κεντρικής προσέγγισης πρωτονίου που κινείται με κινητική ενέργεια $K = 10 \text{ MeV}$, προς έναν πυρήνα σιδήρου ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ (Δίδονται: $1/4\pi\epsilon_0 \approx 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$, $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$).

ΛΥΣΗ

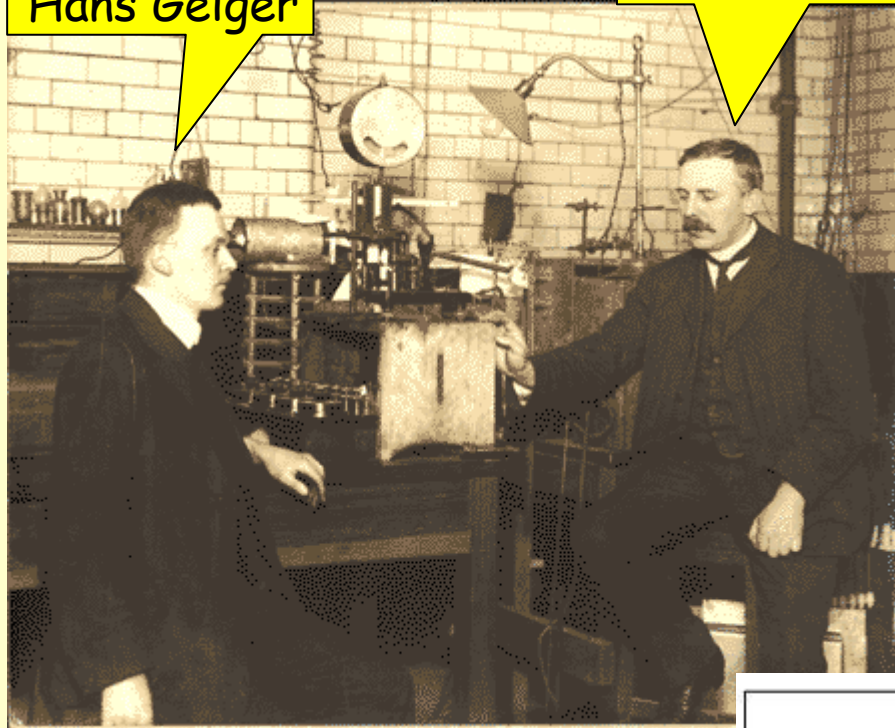
$$D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Zze^2}{K} = (9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2) \frac{1 \cdot 26 \cdot (1,6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{10 \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J / eV})}$$

$$D = 3,75 \times 10^{-15} \text{ m} = 3,75 \text{ fm}$$

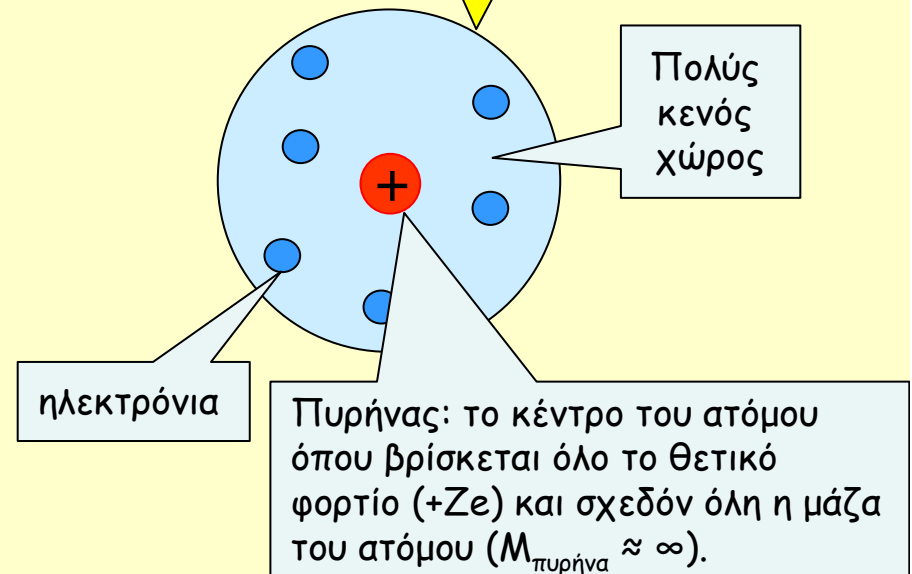


Hans Geiger

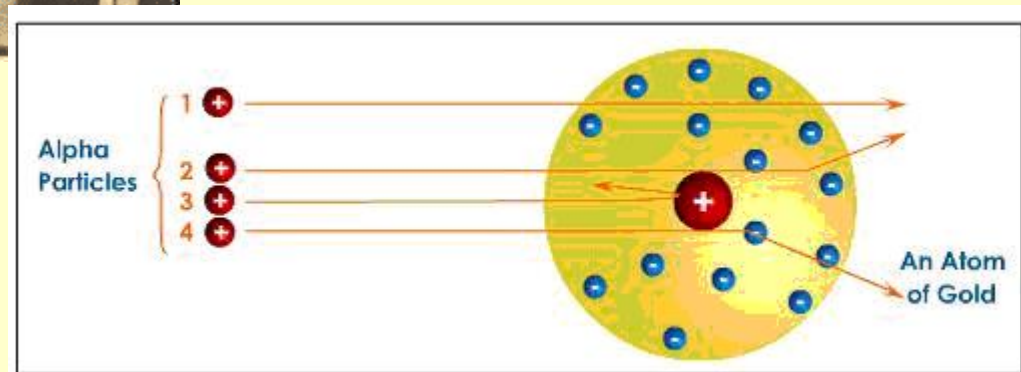
Ernest Rutherford



Το μοντέλο του



Το μοντέλο Rutherford αποδείχθηκε εξαιρετικά επιτυχές στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων της σκέδασης.

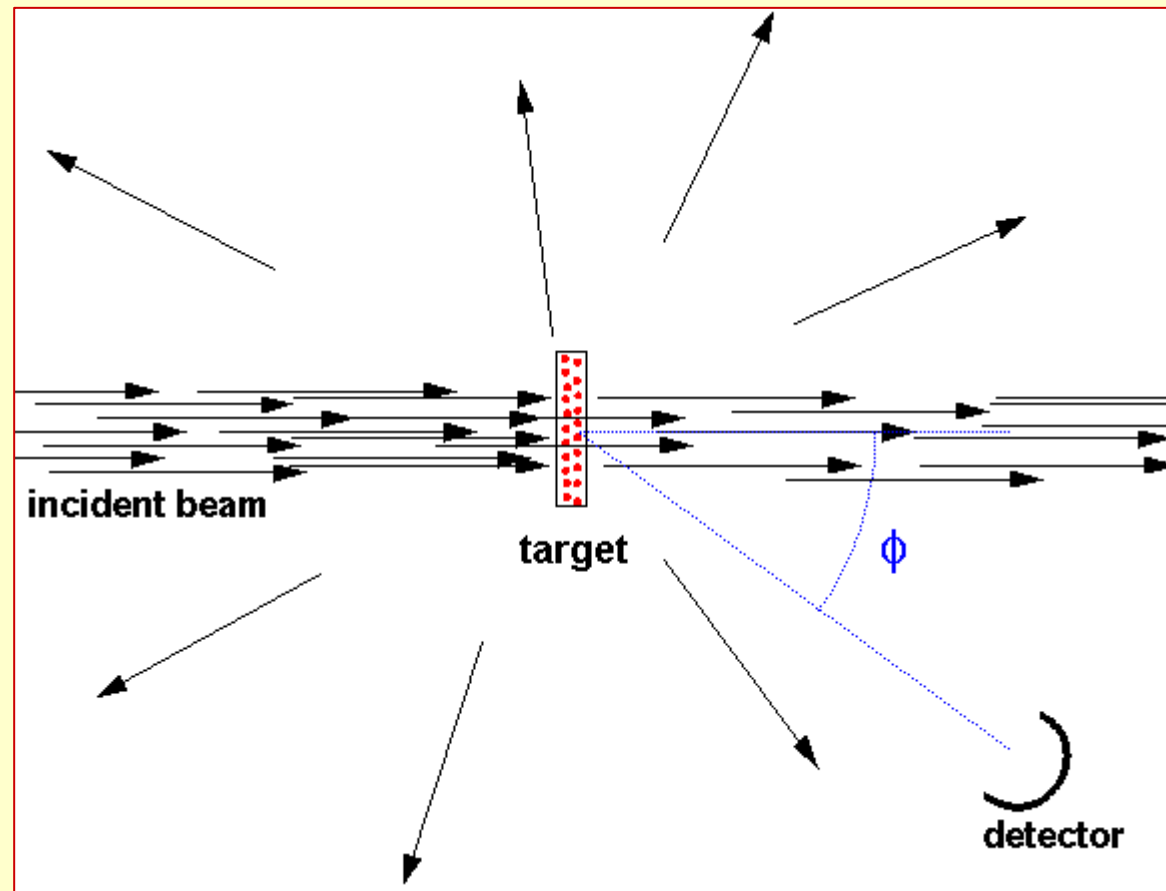


Την ανακάλυψη του πυρήνα, ακολούθησαν πολλές άλλες ανακαλύψεις, για τα ατομικά ηλεκτρόνια, για τις ιδιότητες του πυρήνα και τη σύστασή του κ.λ.π. Πολλές από αυτές τις ανακαλύψεις οφείλονται σε **πειράματα σκέδασης** π.χ. στους μεγάλους επιταχυντές (CERN, Fermilab,...).

Πειράματα σκέδασης και μετρήσεις

REF: Jiří Dolejší, Olga Kotrbová,
Charles University Prague

Η έρευνα για τη δομή των σωμάτων μπορεί να γίνει μέσα από το πώς αλληλεπιδρούν μεταξύ τους (σκεδάζονται) και με ποια πιθανότητα.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟ ΤΟΝ ΜΑΚΡΟΚΟΣΜΟ ("ΣΚΕΔΑΣΗ" ΜΠΑΛΑΣ-ΑΝΘΡΩΠΟΥ)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ποια είναι η πιθανότητα να πιάσω
την μπάλα που μου πετούν;

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

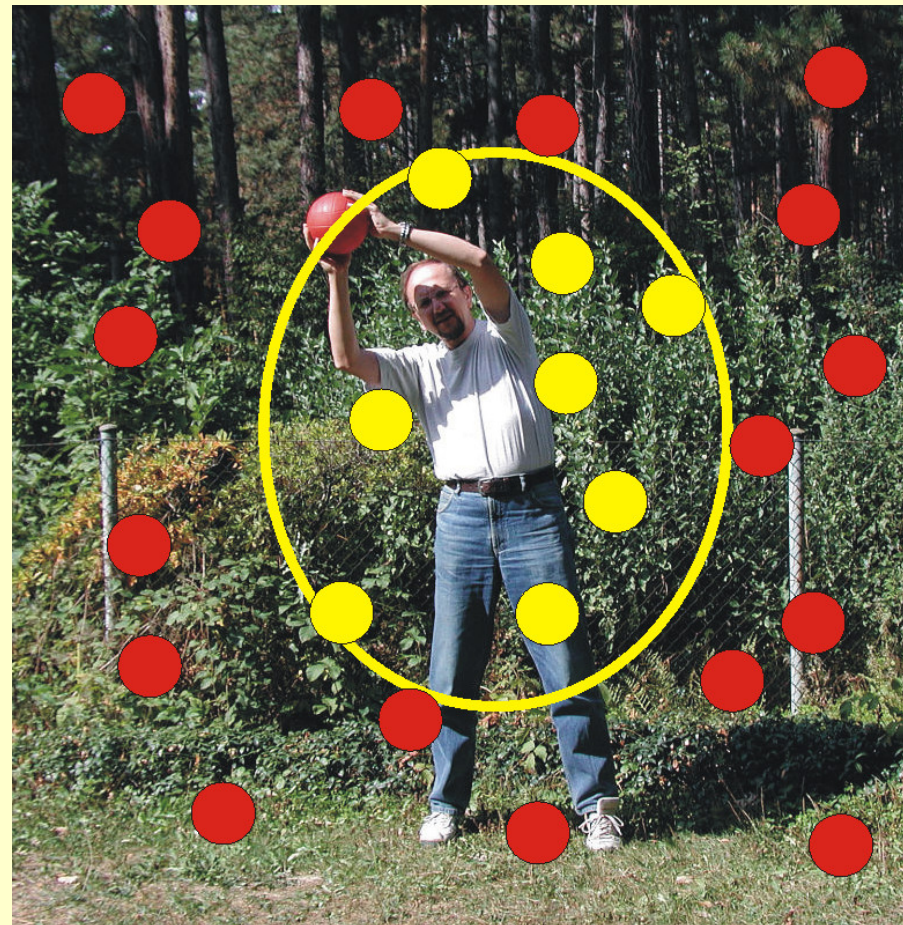
Θα "στήσω" ένα πείραμα και θα
κάνω μετρήσεις.



ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Από τις πολλές και τυχαίες ρίψεις της
μπάλας, κατάφερα να πιάσω τις
«κίτρινες» και δεν κατάφερα να πιάσω
τις «κόκκινες».

Μετά από πολλές επαναλήψεις του
πειράματος καταλαβαίνω ότι μπορώ
να πιάσω σίγουρα τις ρίψεις που
βρίσκονται μέσα στην κίτρινη καμπύλη.



Πως μπορώ να εκφράσω την **πιθανότητα επιτυχίας** μου;
Μπορώ να την εκφράσω ποσοτικά με την κίτρινη περιοχή. Είναι περίπου 2 m^2 .
Αυτό σημαίνει ότι αν δεχθώ μια "ροή" π.χ. 10 ρίψεων/m^2 , θα πιάσω την μπάλα 20 φορές.

Η πιθανότητα επιτυχίας μου χαρακτηρίζεται από την **δραστική περιοχή** που μπορώ να καλύψω.

Στην Φυσική, ο όρος που χρησιμοποιούμε για την περιοχή αυτή είναι "**ενεργός διατομή**" (cross section) και συμβολίζεται με το γράμμα σ .

Αν η ροή των προσπιπτόντων στον στόχο σωματιδίων είναι j , τότε ο αριθμός N των γεγονότων που μας ενδιαφέρουν και συμβαίνουν μέσα στην ενεργό διατομή σ θα είναι:

$$N = \sigma \cdot j$$



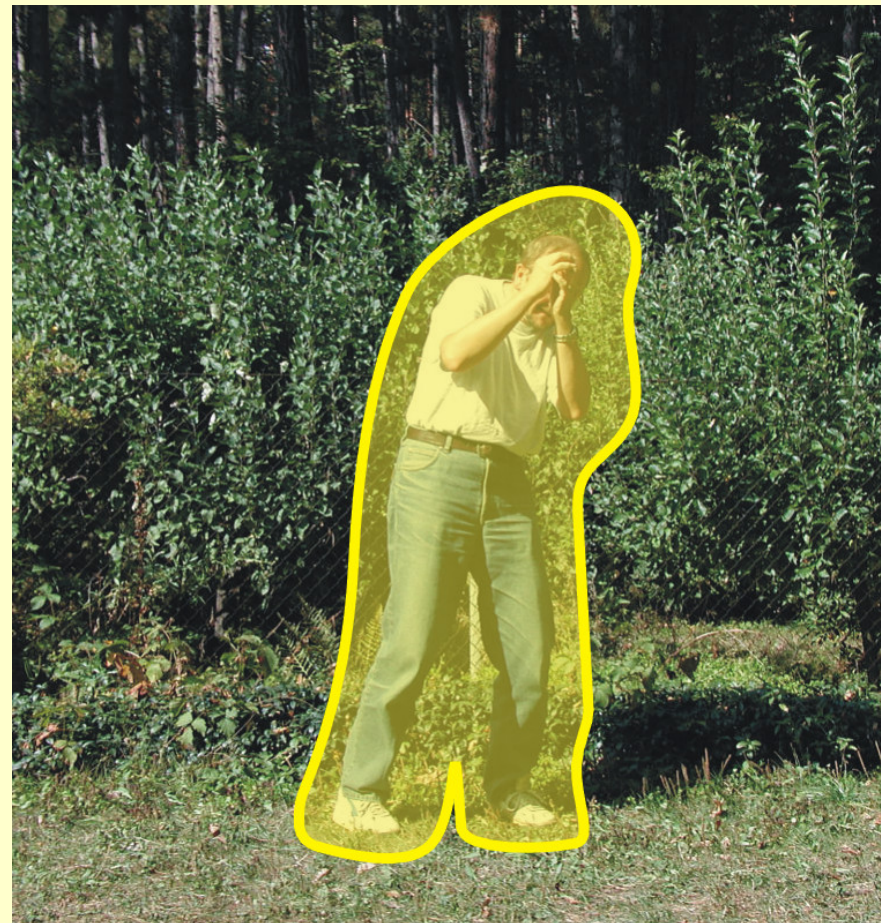
Μονάδα ενεργού διατομής: $1 \text{ barn} = 1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$

Μεγάλο μέρος της πληροφορίας για την αλληλεπίδραση (άρα και τη δομή) μπορεί να εκφρασθεί μέσω της ενεργού διατομής.

Π.χ. σκεφθείτε ότι μερικές ρίψεις μπορεί να γίνουν πάρα πολύ δυνατές (πολύ μεγάλης ενέργειας). Ενώ μπορώ να πιάσω την μπάλα όπως περιγράφηκε στις σχετικά χαμηλές ενέργειες, όταν οι μπαλιές γίνουν πολύ δυνατές, μάλλον θα προσπαθήσω να προφυλαχτώ (το πείραμα δυσκολεύει...).

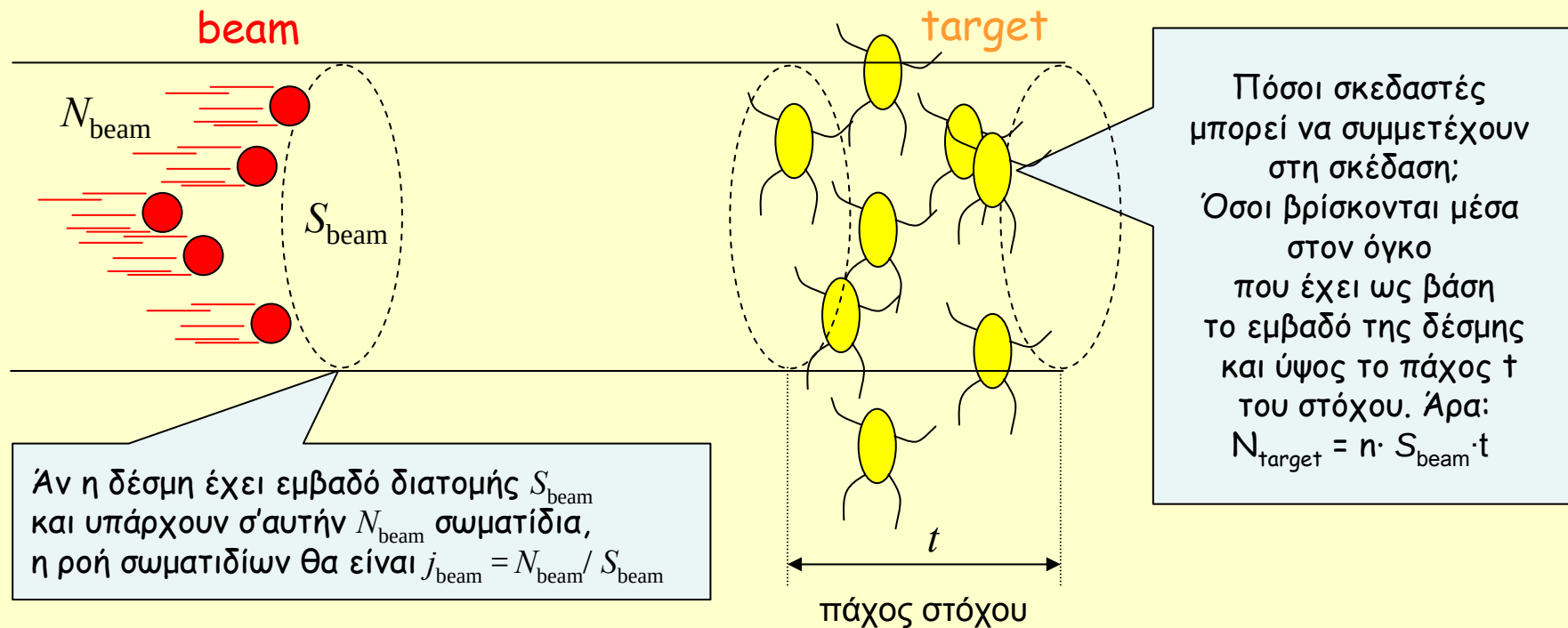
Η ενεργός διατομή (έστω σ_1) για να πιάσω την μπάλα μειώνεται ή και μηδενίζεται όταν μεγαλώνει η ενέργεια. Μπορώ βέβαια να μελετήσω την πιθανότητα ενός άλλου ενδεχομένου π.χ. να με χτυπήσει η μπάλα. Η ενεργός διατομή (έστω σ_2) αυτής της αλληλεπίδρασης μάλλον θα είναι περίπου ίση με το εμβαδό της σιλουέτας μου (λίγο προσαυξημένης λόγω και της διαμέτρου της μπάλας).

Μπορούμε λοιπόν να μιλάμε για "ειδική ενεργό διατομή" ή "μερική ενεργό διατομή" του κάθε ενδεχομένου. Το άθροισμα όλων των μερικών διατομών θα δίνει την ολική ενεργό διατομή.



Συνήθως, ο στόχος αποτελείται από πολλούς σκεδαστές.

Ο αριθμός των σωματιδίων της δέσμης που σκεδάζονται θα σχετίζεται τόσο με την ενεργό διατομή σκέδασης σ από τον κάθε σκεδαστή, όσο και με την πυκνότητα n των σκεδαστών στον στόχο.



Αριθμός σκεδαζόμενων σωματιδίων:

$$N_{\text{events}} = j_{\text{beam}} \cdot \sigma \cdot N_{\text{target}} = \frac{N_{\text{beam}}}{S_{\text{beam}}} \cdot \sigma \cdot N_{\text{target}} = \frac{N_{\text{beam}}}{S_{\text{beam}}} \cdot \sigma \cdot n \cdot S_{\text{beam}} \cdot t = N_{\text{beam}} \cdot \sigma \cdot n \cdot t$$

Πιθανότητα σκέδασης των σωματιδίων:

$$P_{\text{scat}} = \frac{N_{\text{events}}}{N_{\text{beam}}} = \sigma \cdot n \cdot t$$

Συνήθως, ο στόχος αποτελείται από πολλούς σκεδαστές.

Ο αριθμός των σωματιδίων της δέσμης που σκεδάζονται θα σχετίζεται τόσο με την ενεργό διατομή σκέδασης σ από τον κάθε σκεδαστή, όσο και με την πυκνότητα n των σκεδαστών στον στόχο.

Η πυκνότητα των πυρήνων (ατόμων) στο μεταλλικό φύλλο είναι:

$$n = \frac{\text{atoms}}{m^3} = \frac{N_0 \cdot \text{moles}}{m^3} = \frac{N_0 \cdot \left(\frac{\text{mass}}{AM} \right)}{m^3} = \frac{N_0}{AM} \cdot \frac{\text{mass}}{m^3} = \frac{N_0 \cdot \rho}{AM}$$

Αριθμός σκεδαζόμενων σωματιδίων:

$$N_{\text{events}} = j_{\text{beam}} \cdot \sigma \cdot N_{\text{target}} = \frac{N_{\text{beam}}}{S_{\text{beam}}} \cdot \sigma \cdot N_{\text{target}} = \frac{N_{\text{beam}}}{S_{\text{beam}}} \cdot \sigma \cdot n \cdot S_{\text{beam}} \cdot t = N_{\text{beam}} \cdot \sigma \cdot n \cdot t$$

Πιθανότητα σκέδασης των σωματιδίων:

$$P_{\text{scat}} = \frac{N_{\text{events}}}{N_{\text{beam}}} = \sigma \cdot n \cdot t$$

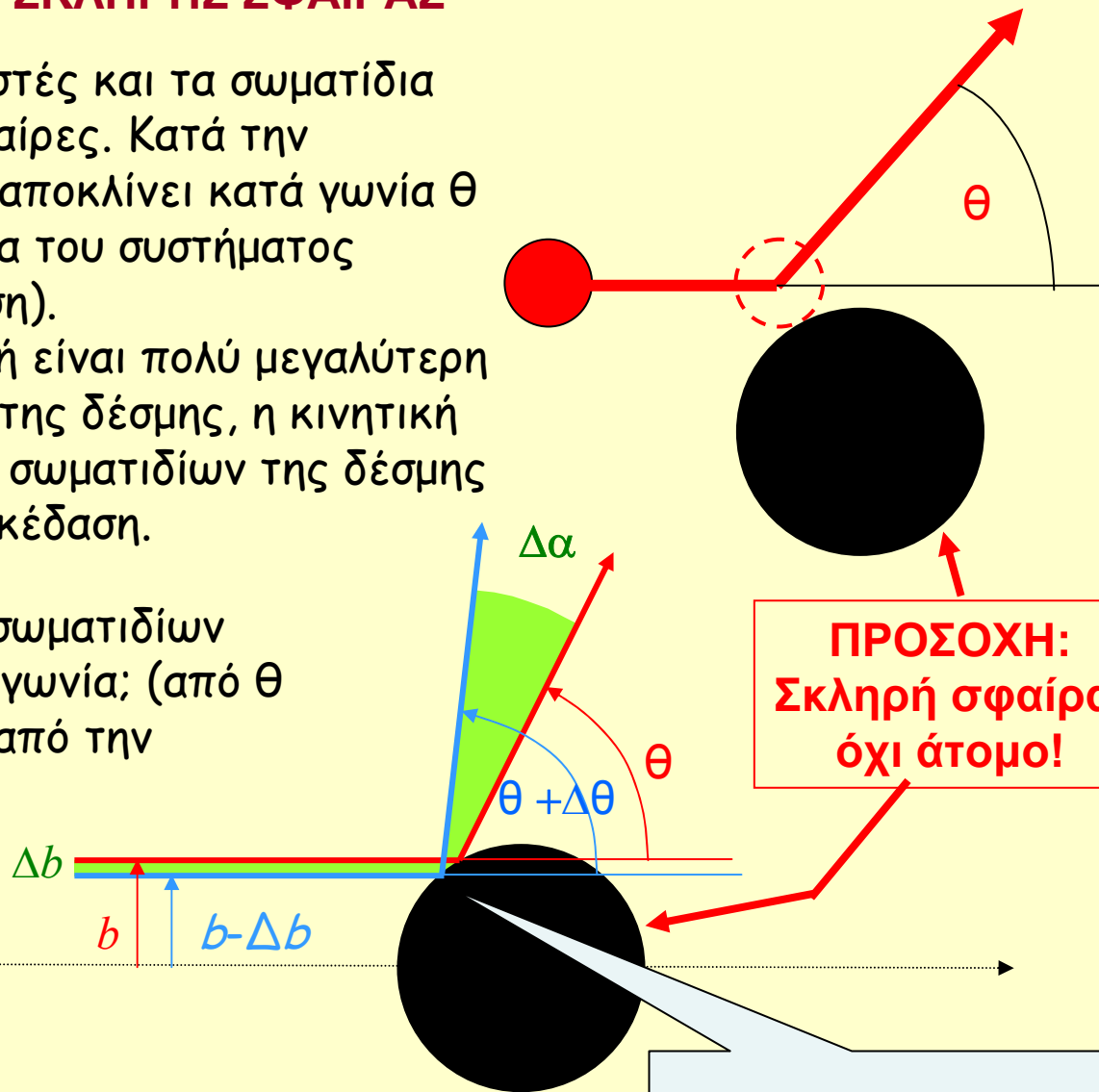
ΣΚΕΔΑΣΗ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ- ΣΚΛΗΡΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

Ας υποθέσουμε ότι οι σκεδαστές και τα σωματίδια της δέσμης είναι σκληρές σφαίρες. Κατά την σκέδαση, το κάθε σωματίδιο αποκλίνει κατά γωνία θ ενώ η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται (ελαστική σκέδαση).

Αν η μάζα του κάθε σκεδαστή είναι πολύ μεγαλύτερη από τη μάζα του σωματιδίου της δέσμης, η κινητική ενέργεια και η ταχύτητα των σωματιδίων της δέσμης δεν μεταβάλλεται κατά την σκέδαση.

Ποιος είναι ο αριθμός των σωματιδίων που σκεδάζονται σε κάποια γωνία; (από θ ως $\theta + \Delta\theta$). Αυτό εξαρτάται από την **παράμετρο κρούσης b** .

Διεύθυνση
της δέσμης

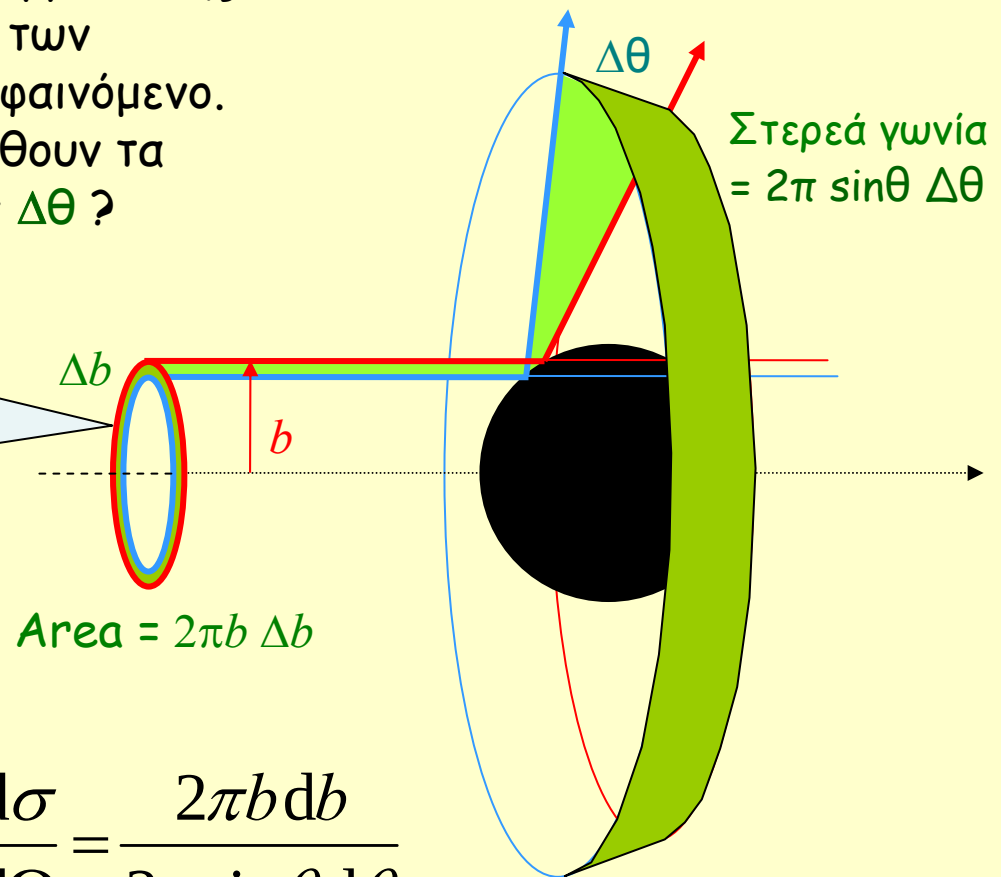


ΠΡΟΣΟΧΗ:
Σκληρή σφαίρα,
όχι άτομο!

Οι σφαίρες με μεγαλύτερη
παράμετρο κρούσης b
αποκλίνουν λιγότερο.

Η ενεργός διατομή σχετίζεται με το εμβαδό της περιοχής μέσα στην οποία η είσοδος των σωματιδίων προκαλεί σ'αυτά κάποιο φαινόμενο. Ποια είναι η περιοχή που όταν εισέλθουν τα σωματίδια, θα σκεδαστούν σε γωνίες $\Delta\theta$?

Τα σωματίδια που εισέρχονται στον δακτύλιο με εμβαδό $\Delta S = 2\pi b \Delta b$ θα σκεδαστούν στην περιοχή γωνιών $\Delta\theta$. Η γωνία αυτή περιστρεφόμενη γύρω από τον κεντρικό άξονα ορίζει μια στερεά γωνία: $\Delta\Omega = 2\pi \sin\theta \Delta\theta$



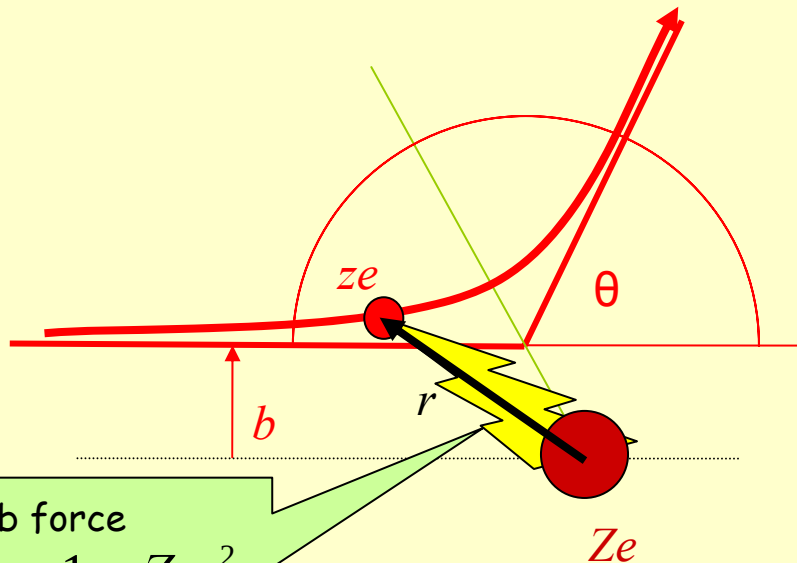
Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για την **διαφορική ενεργό διατομή** (differential cross section) σκέδασης στη γωνία θ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi b db}{2\pi \sin\theta d\theta}$$

Η ενεργός διατομή σκέδασης σε οποιαδήποτε γωνία μπορεί να ληφθεί με ολοκλήρωση:

$$\sigma = \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin\theta d\theta$$

ΣΚΕΔΑΣΗ ΟΜΩΝΥΜΩΣ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΕΛΑΦΡΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ ΔΕΣΜΗΣ ΣΕ ΒΑΡΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ ΣΤΟΧΟΥ



Coulomb force

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Zze^2}{r^2}$$

Σχέση παραμέτρου κρούσης και γωνίας

$$b = \text{const} \cdot \cotan \frac{\theta}{2}$$

Στο πείραμα GM (α σε Au), πόση είναι η παράμετρος κρούσης που αντιστοιχεί σε γωνία σκέδασης 1°;

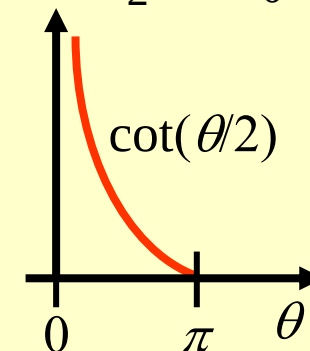
$$b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Zze^2}{mv^2} \cotan \frac{\theta}{2} = 1.14 \times 10^{-13} \cdot \cotan 0.5^\circ \text{m} = 1.30 \times 10^{-11} \text{ m}$$

Η διαφορική ενεργός διατομή που προκύπτει, εξαρτάται ισχυρά από τη γωνία σκέδασης θ:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Zze^2}{8\pi\epsilon_0 mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

$$b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 K} \cot \frac{\theta}{2}$$

όπου: $K = \frac{1}{2} mV_0^2$



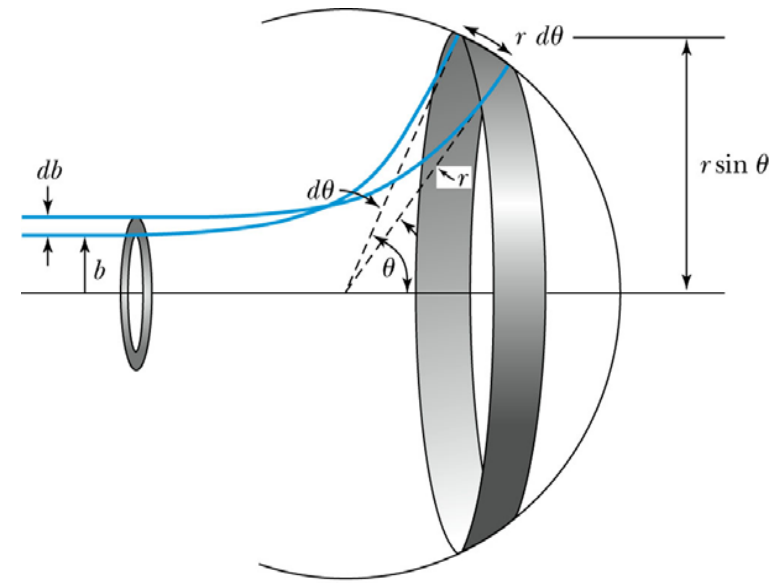
Για να χρησιμοποιήσουμε τον **τύπο σκέδασης του Rutherford**, θα πρέπει να κάνουμε αντικατάσταση με τις κατάλληλες τιμές. Για την περίπτωση σκέδασης σωματιδίων α σε χρυσό θέτουμε τα εξής:

Φορτία:
 $Z_{Au} = 79$
 $z_a = 2$

Σταθερές:
 $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
 $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Zze^2}{8\pi\epsilon_0 mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = \frac{3.23 \times 10^{-27} \text{ m}^2}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

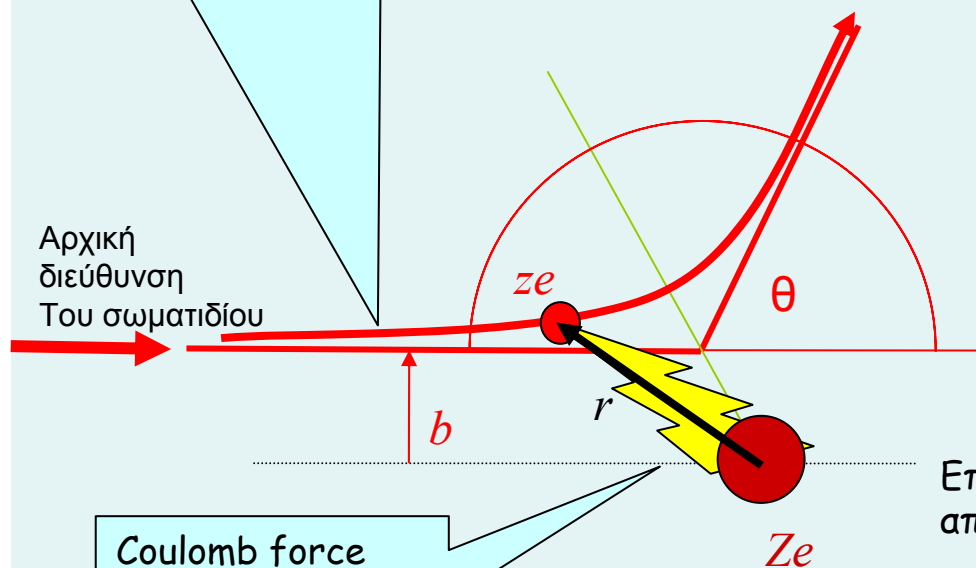
Εδώ, αντί για τη μάζα και ταχύτητα του σωματιδίου α, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κινητική τους ενέργεια: $2K = mv^2$ (μη σχετικιστική σχέση). Οι τυπικές τιμές κινητικής ενέργειας των άλφα που εκπέμπονται από τα ραδιοϊσότοπα είναι μερικά MeV.



Για τους απαιτητικούς αναγνώστες, ολόκληρη η ανάλυση!

Πρόκειται για τον υπολογισμό της **διαφορικής ενεργού διατομής** για σκέδαση σωματιδίων α μάζας m , ταχύτητας v και φορτίου ze πάνω σε σημειακό στόχο άπειρης μάζας και φορτίου Ze . Η σκέδαση είναι παρόμοια με αυτήν σε σκληρή σφαίρα, μόνο που τώρα τα **σωματίδια αλληλεπιδρούν**, όχι όταν έρχονται σε επαφή με τη σφαίρα, αλλά **από απόσταση, λόγω της απωστικής δύναμης Coulomb**.

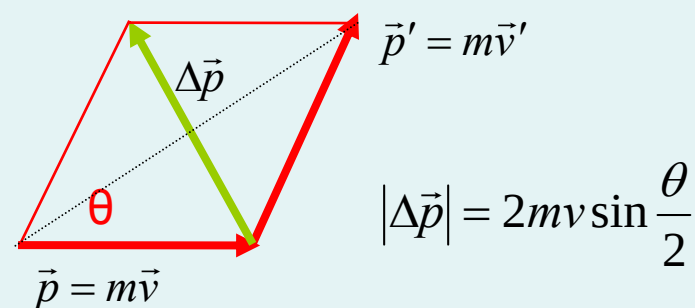
Η τροχιά καμπυλώνεται (τμήμα υπερβολής). Σε μεγάλη απόσταση μετά τη σκέδαση, θα ακολουθήσει ασυμπτωτικά μια ευθεία που σχηματίζει γωνία θ με την αρχική διεύθυνση που είχε πριν τη σκέδαση.



Coulomb force

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Zze^2}{r^2}$$

Λόγω του ακλόνητου πυρήνα (άπειρη μάζα), η ασκούμενη απωστική δύναμη μεταξύ των δύο σωμάτων αλλάζει την ορμή του σωματιδίου α κατά $\Delta\vec{p}$:



Επειδή η μεταβολή της ορμής προκαλείται από τη δύναμη Coulomb θα έχουμε:

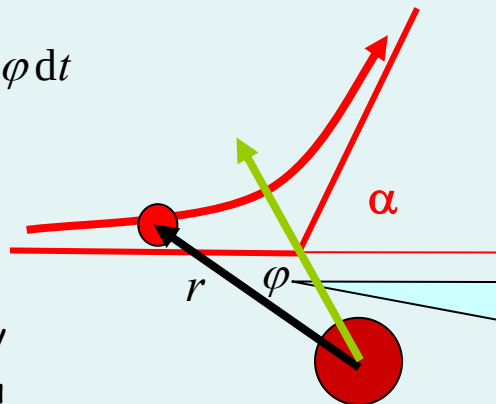
$$\Delta\vec{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(r) dt$$

Για τους απαιτητικούς αναγνώστες, ολόκληρη η ανάλυση!

$$\Delta \vec{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(r) dt \longrightarrow |\Delta \vec{p}| = \int_{-\infty}^{+\infty} F(r) \cos \varphi dt$$

Αντί του χρόνου t , μπορούμε να εκφράσουμε την τροχιά βάσει της γωνίας φ . Αυτό μπορεί να γίνει αλλάζοντας τη μεταβλητή ολοκλήρωσης από t σε φ .

$$|\Delta \vec{p}| = \int_{-\infty}^{+\infty} F(r(t)) \cos \varphi(t) dt = \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{+\frac{\pi-\theta}{2}} F(r(\varphi)) \cos \varphi \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| dt$$



Η γωνία φ μεταβάλλεται από $-(\pi-\theta)/2$ για $t=-\infty$ μέχρι $(\pi-\theta)/2$ για $t=+\infty$.

Τι είναι το $d\varphi/dt$? ... Είναι η γωνιακή ταχύτητα ω ! Και επιπλέον θυμηθείτε ότι η γωνιακή ορμή $L=mr^2\omega$ διατηρείται για ένα σωματίδιο που βρίσκεται σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων! Μπορούμε, επίσης, να υπολογίσουμε την γωνιακή ορμή από την αρχική συνθήκη: $L=mnb$ (γωνιακή ορμή = ορμή×ακτίνα).

$$L = mr^2\omega = mnb \quad \omega = \frac{vb}{r^2}$$

Τώρα θα συνδυάσουμε όλα τα προηγούμενα:

$$|\Delta \vec{p}| = 2mv \sin \frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad |\Delta \vec{p}| = \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{+\frac{\pi-\theta}{2}} F(r(\cos(\varphi))) \cos \varphi \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| dt$$

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Zze^2}{r^2}$$

$$\left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = \omega = \frac{vb}{r^2}$$

$$2mv \sin \frac{\theta}{2} = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{+\frac{\pi-\theta}{2}} \frac{1}{r^2} \cos \varphi \frac{d\varphi}{\frac{vb}{r^2}}$$

$$b \sin \frac{\theta}{2} = \frac{Zze^2}{8\pi\epsilon_0 mv^2} \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{+\frac{\pi-\theta}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{+\frac{\pi-\theta}{2}} \cos \varphi d\varphi = [\sin \varphi]_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{+\frac{\pi-\theta}{2}} = 2 \sin \frac{\pi-\theta}{2} = 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

Επιπλέον χρειαζόμαστε τη σχέση μεταξύ b και Θ:

$$b = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} \cotan \frac{\theta}{2}$$

Οπότε:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \left(\frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \left(\frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} \right)^2 \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Zze^2}{8\pi\epsilon_0 mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

Ο τύπος σκέδασης του Rutherford
λέει πώς μεταβάλλεται η διαφ. ενεργός διατομή σκέδασης
με τη γωνία:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Zze^2}{8\pi\epsilon_0 m v^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

ΓΕΝΙΚΩΣ

Πιθανότητα σκέδασης των σωματιδίων:

$$P_{scat} = \frac{N_{events}}{N_{beam}} = \sigma \cdot n \cdot t$$

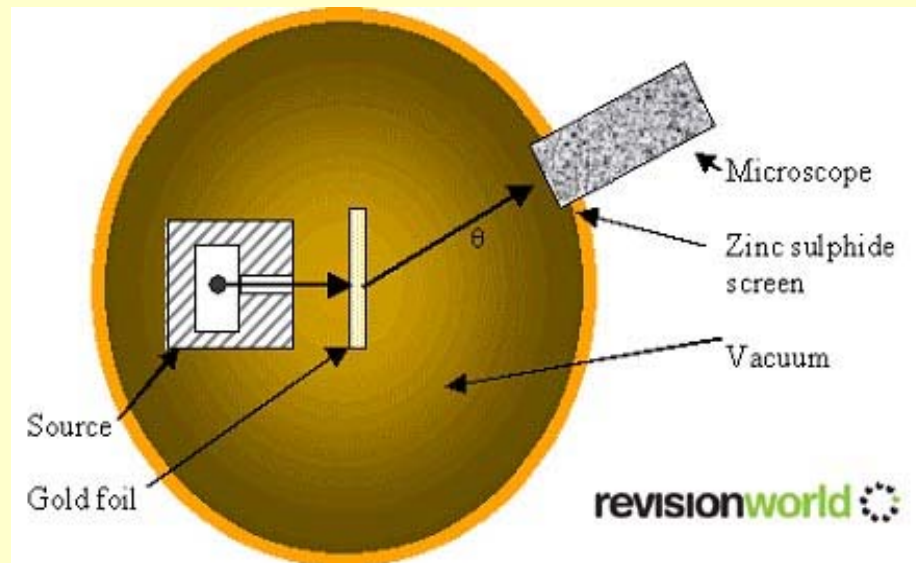
Ολική ενεργός διατομή: $\sigma = \pi b^2$

ΕΙΔΙΚΟΤΕΡΑ

Πιθανότητα σκέδασης των σωματιδίων σε γωνία θ :

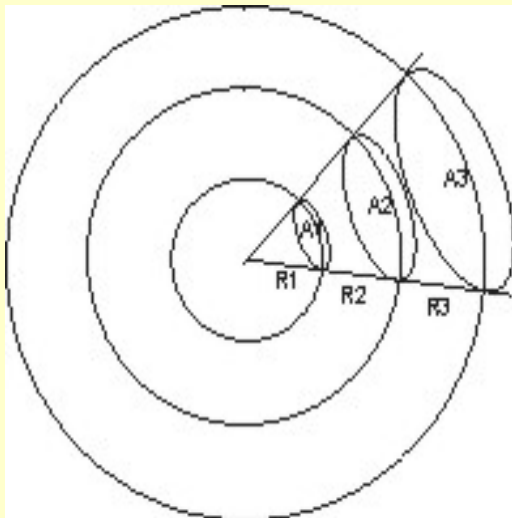
$$P_{scat}(\theta) = \frac{N_{events}(\theta)}{N_{beam}} = \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \cdot n \cdot t \cdot \Delta\Omega$$

Ανιχνευτής και στερεά γωνία



Η **στερεά γωνία Ω** είναι το αντίστοιχο της επίπεδης γωνίας φ στον τρισδιάστατο χώρο. Δείχνει πόσο μέρος του χώρου, γύρω από ένα σημείο, "καταλαμβάνει" κάποιο αντικείμενο.

Εκφράζεται ποσοτικά ως το εμβαδό της τομής ενός κώνου με κορυφή το σημείο και της σφαίρας με ακτίνα r , μετρημένο σε μονάδες r^2 .



$$\Omega = \frac{A_1}{R_1^2} = \frac{A_2}{R_2^2} = \frac{A_3}{R_3^2} = \dots$$