

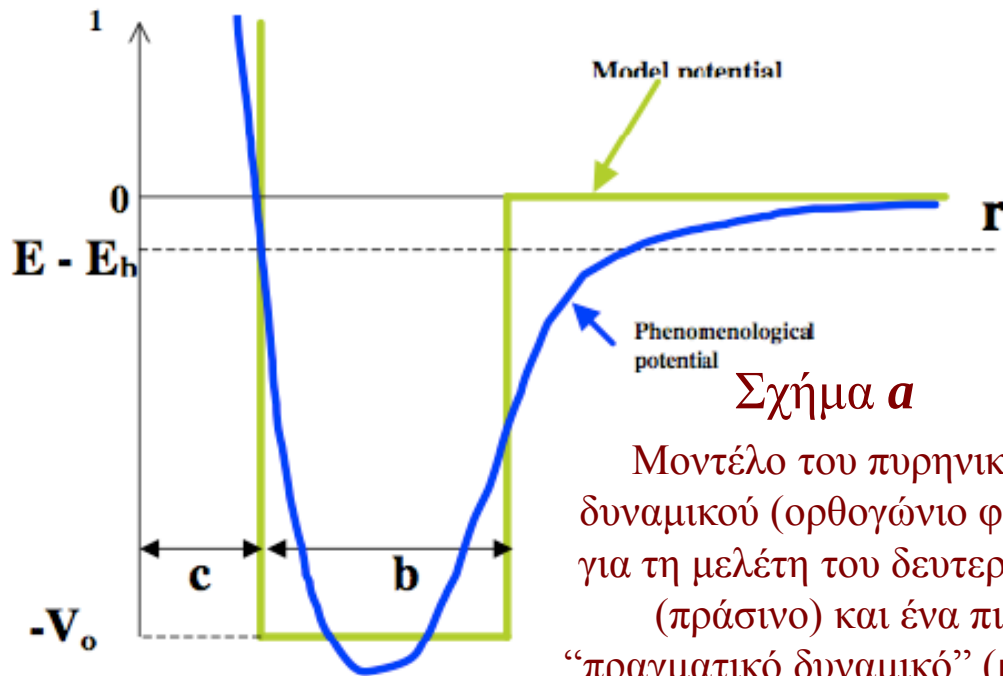
Δευτερόνιο & Πυρηνικές δυνάμεις μεταξύ δύο νουκλεονίων

Τάσος Λιόλιος
Μάθημα Πυρηνικής Φυσικής

REF: ezphysics.nchu.edu.tw

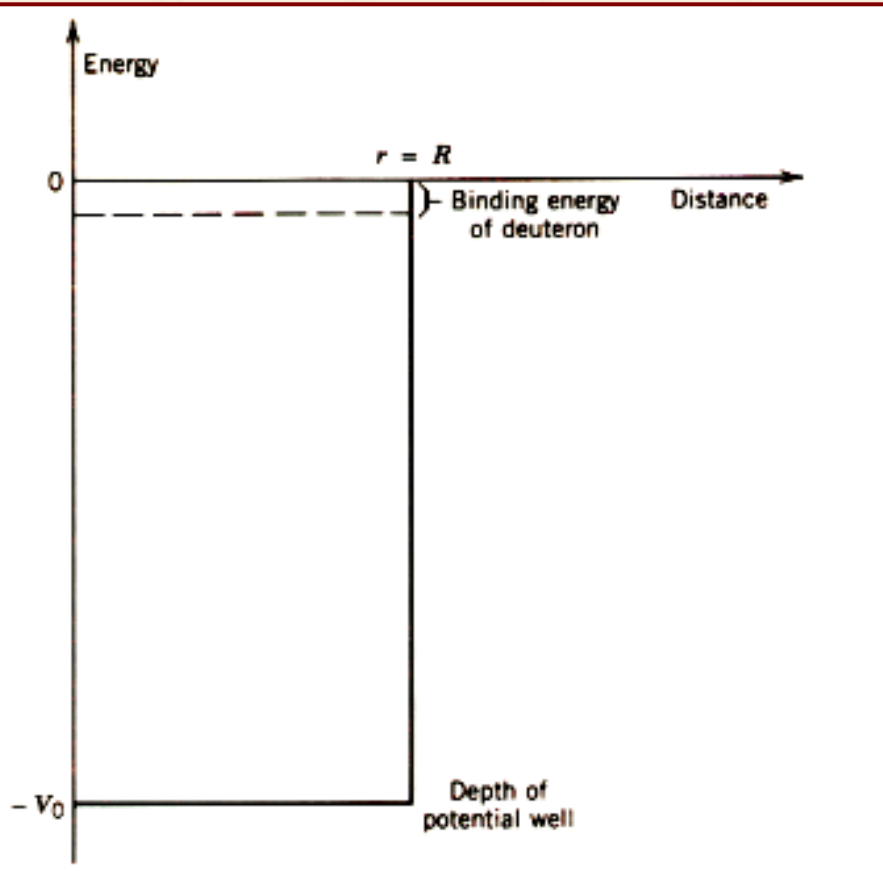
Μορφή της συνάρτησης δυναμικού

Η ενέργεια σύνδεσης των νουκλεονίων στο δευτερόνιο, $B = 2.225 \text{ MeV}$, είναι **πολύ μικρότερη από ότι στους συνήθεις πυρήνες** (η μέση ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο στους πυρήνες είναι $7 \sim 8 \text{ MeV}$). Αυτό σημαίνει ότι το δευτερόνιο είναι **ασθενώς συνδεδεμένο σύστημα**. Με βάση αυτό, μελετούμε το πυρηνικό δυναμικό και τις ιδιότητες του δευτερονίου.



Για απλούστευση, θεωρούμε αρχικά το **ορθογώνιο δυναμικό** του σχ. α (και στις 3 διαστάσεις). Κατόπιν, θα το προσαρμόσουμε σε ένα πιο **πραγματικό δυναμικό**, όπως προκύπτει από τα διάφορα πειραματικά δεδομένα (φαινομενολογικό δυναμικό). Δείτε ότι μέχρι απόσταση c υπάρχει ένας **σκληρό απωστικό κέντρο (core)** και μετά μια ελκτική περιοχή.

Κβαντομηχανική περιγραφή της (ασθενικής) σύνδεσης στο δευτερόνιο



$$V(r) = -V_0 \quad \text{for } r < R$$
$$= 0 \quad \text{for } r > R$$

Το r είναι η απόσταση των κέντρων πρωτονίου-νετρονίου. Επειδή για $r > R$ η δύναμη μηδενίζεται, το R παριστά την εμβέλεια των πυρηνικών δυνάμεων που ασκούνται από τα νουκλεόνια.

Η συμπεριφορά των νουκλεονίων στο δυναμικό πρέπει να προκύπτει απ' την εξ. Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}) + V(r) \Psi(r) = E \Psi(\vec{r})$$

όπου m η μάζα του νουκλεονίου.

Όταν το V δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό στο χώρο αλλά είναι $V=V(r)$, δηλαδή *κεντρικό δυναμικό*, η κυματοσυνάρτηση-λύση της μπορεί να χωριστεί στα δύο, σε *ακτινική (radial)* και σε *γωνιακή (angular)* :

$$\Psi(r) = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Θέτοντας $R(r) = u(r)/r$ στην εξ. Schrödinger, η $u(r)$ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left\{ V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right\} u(r) = Eu(r)$$

Η λύση $u(r)$ χαρακτηρίζεται από δύο κβαντικούς αριθμούς, τους n και l :

$$u(r) \rightarrow u_{nl}(r)$$

Επομένως, η πλήρης λύση $\Psi(r)$ μπορεί να γραφεί ως:

$$\Psi(\vec{r}) = \psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad \text{όπου} \quad R_{nl}(r) = \frac{u_{nl}(r)}{r}$$

Τρεις κβαντικοί αριθμοί
καθορίζουν την κάθε
ιδιοκατάσταση
(eigenstate)

n : ο κύριος (principal) κβαντικός αριθμός που καθορίζει την ενέργεια της ιδιοκατάστασης
 l : ο τροχιακός (orbital) κβ. αριθμός της στροφορμής
 m : ο μαγνητικός κβαντικός αριθμός, $-l \leq m \leq l$.

Το γωνιακό τμήμα της λύσης $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ είναι σφαιρικά αρμονικό (“*spherical harmonic*”) τάξης l, m και ικανοποιεί τις εξισώσεις:

$$\hat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad \text{και} \quad \hat{L}_Z Y_{lm}(\theta, \varphi) = m\hbar Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$\text{όπου} \quad \hat{L}^2 \equiv -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad \text{και} \quad \hat{L}_Z \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Για την περίπτωση τρισδιάστατου ορθογώνιου φρέατος δυναμικού με μηδενική στροφορμή ($l = 0$) όπως αυτό που χρησιμοποιούμε για τη μελέτη της βασικής κατάστασης του δευτερονίου, η εξ. Schrödinger μπορεί να γραφεί απλούστερα ως:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} - V_0 u(r) = Eu(r) & , \text{ για } r < R \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} = Eu(r) & , \text{ για } r > R \end{array} \right.$$

I. Όταν $r < R$

Η εξ. Schrödinger είναι:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} - V_0 u(r) = Eu(r)$$

Η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + k_1^2 u(r) = 0 \quad \text{όπου} \quad k_1 \equiv \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}}$$

Η λύση της οποίας είναι:

$$u(r) = A \sin k_1 r + B \cos k_1 r$$

Για να μείνει η κυματοσυνάρτηση πεπερασμένη για $r \rightarrow 0$, δηλ:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \psi(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u(r)}{r} = 0$$

ο συντελεστής B πρέπει να τεθεί ίσος με μηδέν.

Άρα η φυσικώς αποδεκτή λύση θα είναι η:

$$u(r) = A \sin k_1 r$$

II. Όταν $r > R$

Η εξ. Schrödinger's είναι η:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} = Eu(r)$$

Και η λύση της:

$$u(r) = Ce^{-k_2 r} + De^{+k_2 r}$$

όπου $k_2 = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$

Για να μείνει η κυματοσυνάρτηση πεπερασμένη για $r \rightarrow \infty$, δηλ.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = 0$$

ο συντελεστής D πρέπει να τεθεί ίσος με το μηδέν.

Άρα η φυσικώς αποδεκτή λύση θα είναι η:

$$u(r) = Ce^{-k_2 r}$$

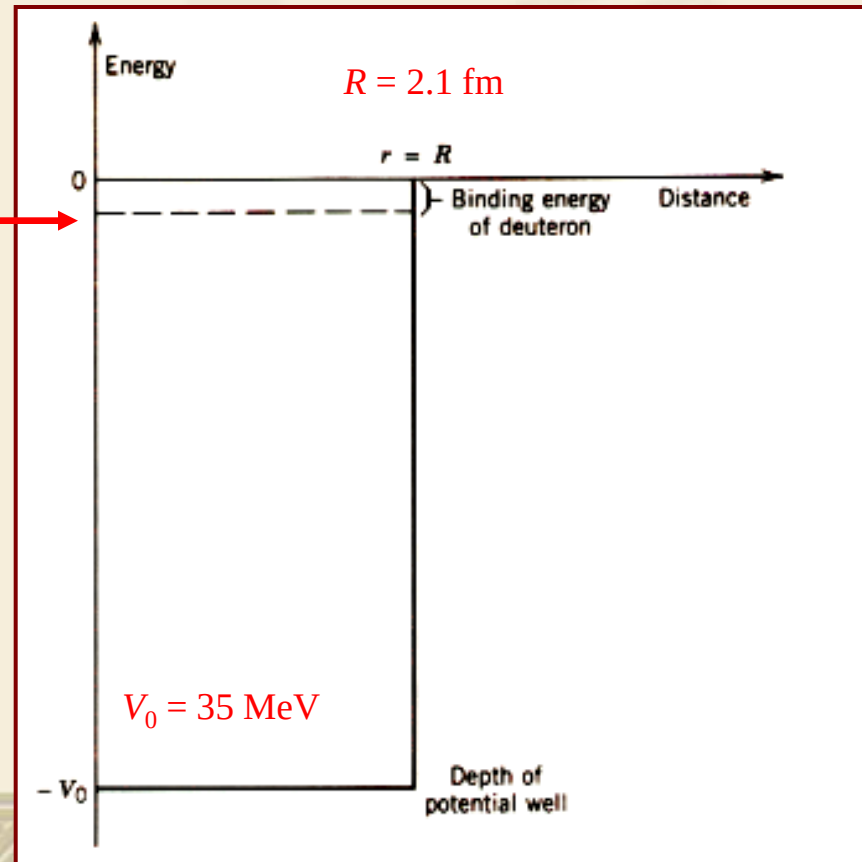
Εφαρμόζοντας τις συνθήκες συνέχειας για την $u(r)$ και την du/dr στο $r = R$, λαμβάνουμε:

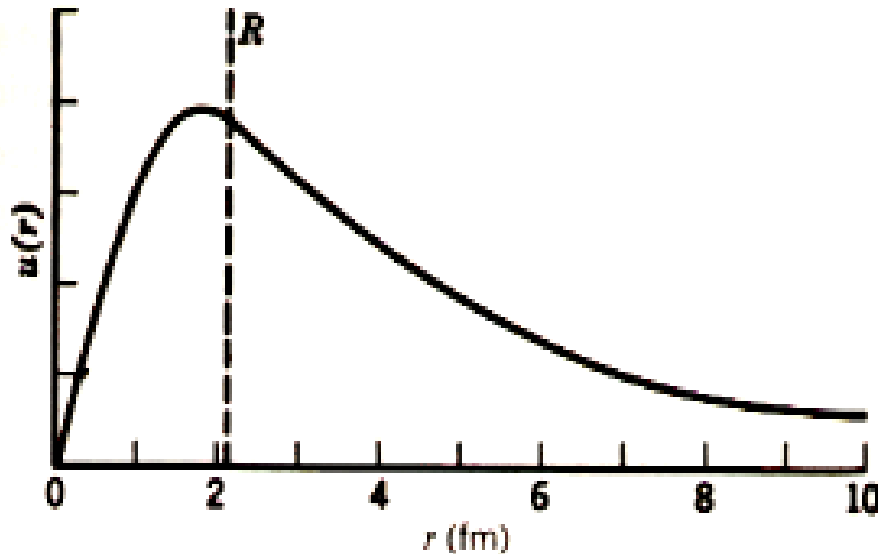
$$k_1 \cot k_1 R = -k_2$$

Αυτή η εξίσωση δίνει μια σχέση μεταξύ των V_0 και R .

Από πειράματα σκέδασης ηλεκτρονίων, έχει βρεθεί ότι η μέση ακτίνα (r_{ms}) κατανομής φορτίου του δευτερονίου είναι περίπου 2.1 fm . Θέτοντας $R = 2.1 \text{ fm}$ στην εξ. (20), βρίσκουμε ότι η τιμή του βάθους V_0 του δυναμικού ισούται με: $V_0 = 35 \text{ MeV}$.

Η δέσμια κατάσταση δύο νουκλεονίων με ενέργεια σύνδεσης -2 MeV , βρίσκεται πολύ κοντά στην κορυφή του φρέατος δυναμικού.





Στο σχήμα φαίνεται η κυματοσυνάρτηση (ακτινικό μέρος) για το πρωτόνιο ή το νετρόνιο του δευτερονίου (για τιμή $R = 2.1$ fm). Προκύπτει ότι οι καμπύλες $\exp$ και $\sin$ πρέπει να ενώνονται ομαλά λίγο εσωτερικότερα του $r = R$, έτσι ώστε οι $u(r)$ και du/dr να είναι συνεχείς.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν η πυρηνική δύναμη νουκλεονίου-νουκλεονίου ήταν ελάχιστα πιο ασθενική απ'ότι είναι, η δέσμια κατάσταση δευτερονίου δεν θα υπήρχε καθόλου. Αυτό σημαίνει ότι η ύλη του σύμπαντος θα είχε εντελώς διαφορετική μορφή... και εμείς επίσης...



Στροφορμή και parity του δευτερονίου

Η ολική στροφορμή I του δευτερονίου είναι:

$$I = s_n + s_p + l$$

όπου s_n και s_p είναι τα *ξεχωριστά spin* του νετρονίου και πρωτονίου και l είναι *η τροχιακή στροφορμή* των δύο νουκλεονίων καθώς αυτά κινούνται γύρω από το κοινό κέντρο μάζας.

- Η ολική στροφορμή του δευτερονίου έχει μετρηθεί και είναι $I = 1$.
- Οι μελέτες των πυρηνικών αντιδράσεων με δευτερόνια έδειξαν ότι η parity τους είναι *άρτια (even)*, ή $P=+1$.

Στροφορμή των νουκλεονίων

1. Σε αναλογία με τη βασική κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου, είναι λογικό να υποτεθεί ότι και η βασική κατάσταση του δευτερονίου έχει μηδενική τροχιακή στροφορμή $I = 0$.
2. Επειδή όμως η ολική του στροφορμή έχει μετρηθεί ίση με $I = 1$ ($\hbar = h/2\pi$) βγαίνει το συμπέρασμα ότι το πρωτόνιο και το νετρόνιο συνδέονται έχοντας **παράλληλα spin**:
$$s_n + s_p = 1/2 + 1/2 = 1$$
3. Άρα, τα δύο νουκλεόνια δεν δημιουργούν δέσμια κατάσταση αν τα spin τους είναι αντιπαράλληλα.
4. Αυτό εξηγεί γιατί δεν υπάρχουν δέσμιες καταστάσεις proton-proton ή neutron-neutron, διότι δύο ίδια νουκλεόνια έχοντας τα spin τους παράλληλα θα προσέκρουαν στην απαγορευτική αρχή του Pauli.
5. Με όλα τα ανωτέρω παρατηρούμε ότι η πυρηνική δύναμη εξαρτάται από το spin των νουκλεονίων.
 - Ας σημειωθεί ότι η ύπαρξη μικρής ηλεκτρικής τετραπολικής ροπής στο δευτερόνιο δείχνει ότι η υπόθεση για μηδενική στροφορμή δεν ήταν εντελώς σωστή.

Μαγνητική διπολική ροπή του δευτερονίου

Αφού για το δευτερόνιο ισχύει $l = 0$, δεν θα υπάρχει καμία τροχιακή συνεισφορά στη μαγνητική του ροπή. Άρα η ολική μαγνητική ροπή του θα είναι απλώς το διανυσματικό άθροισμα των μαγνητικών ρομών του νετρονίου και του πρωτονίου:



$$\begin{aligned}\vec{\mu} &= \vec{\mu}_n + \vec{\mu}_p \\ &= \frac{g_{sn}\mu_N}{\hbar} \vec{s}_n + \frac{g_{sp}\mu_N}{\hbar} \vec{s}_p\end{aligned}\quad (22)$$

όπου $g_{sn} = -3.826084$ και $g_{sp} = 5.585691$.

Αν θεωρήσουμε ότι η μετρούμενη μαγνητική ροπή ισούται με την z-συνιστώσα της μ και με τα spin να έχουν την τιμή $(+\frac{1}{2}\hbar)$

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{2} \mu_N (g_{sn} + g_{sp}) \\ &= 0.879804 \mu_N\end{aligned}\quad (23)$$

Η μετρούμενη μαγνητική ροπή είναι **$0.8574376 \pm 0.0000004 \mu_N$** , δηλ. σε καλή συμφωνία με την υπολογιζόμενη τιμή (αλλά όχι ακριβώς) .

Η μικρή διαφορά στην μαγνητική ροπή μπορεί να αποδοθεί σε μία μικρή πρόσμιξη **κατάστασης d (l = 2)** στην κυματοσυνάρτηση του δευτερονίου:

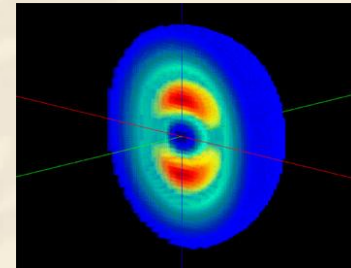
$$\psi = a_s \psi(l=0) + a_d \psi(l=2) \quad (24)$$

Ο υπολογισμός της μαγνητικής ροής με αυτήν την κυματοσυνάρτηση δίνει:

$$\mu = a_s^2 \mu(l=0) + a_d^2 \mu(l=2) \quad (25)$$

Η παρατηρούμενη τιμή ταιριάζει με τις τιμές:

$$a_s^2 = 0.96 \quad \text{and} \quad a_d^2 = 0.04 \quad (26)$$



Αυτό σημαίνει ότι το δευτερόνιο είναι κατά **96%** σε **l = 0 (s τροχιά)** και κατά **4%** σε **l = 2 (d τροχιά)**.

Η μετρούμενη τετραπολική ηλεκτρική ροπή του δευτερονίου, φαίνεται να σχετίζεται με την **l = 2** κατάσταση.

$$Q = 0.00288 \pm 0.00002 \text{ b}$$

Σημαντική παρατήρηση

Η μείξη των διαφορετικών τιμών **l** στο δευτερόνιο είναι η καλλίτερη ένδειξη για τον **μη-κεντρικό (τανυστικό) χαρακτήρα της πυρηνικής δύναμης**.

ΣΥΝΟΨΗ: Ιδιότητες της πυρηνικής δύναμης

- Η Πυρηνική δύναμη σε μικρές αποστάσεις, είναι ισχυρότερη της δύναμης Coulomb. Έτσι, η ελκτική πυρηνική δύναμη των νουκλεονίων εντός του πυρήνα, ξεπερνά την άπωση Coulomb των πρωτονίων.
- Η Πυρηνική δύναμη παρουσιάζει κορεσμό. Αυτό σημαίνει το κάθε νουκλεόνιο αλληλεπιδρά με περιορισμένο αριθμό νουκλεονίων στον πυρήνα (τους εγγύτερους γείτονες) και όχι με όλα τα νουκλεόνιά του.
- Σε μεγαλύτερες αποστάσεις, της τάξης των ατομικών διαστάσεων, η πυρηνική δύναμη είναι πλήρως εξασθενημένη. Έτσι, η αλληλεπίδραση μεταξύ των πυρήνων σε ένα μόριο μπορεί να κατανοηθεί με βάση μόνο τη δύναμη Coulomb.
- Κάποια σωματίδια είναι εντελώς “αναίσθητα” στην πυρηνική δύναμη. Π.χ. δεν υπάρχει καμιά ένδειξη από τις μελέτες της ατομικής δομής ότι τα ηλεκτρόνια επηρεάζονται έστω ελάχιστα από την πυρηνική δύναμη.

Ιδιότητες της δύναμης μεταξύ νουκλεονίων

- Η δύναμη νουκλεονίου-νουκλεονίου είναι σχεδόν ανεξάρτητη του αν τα νουκλεόνια είναι νετρόνια ή πρωτόνια. Αυτή η ιδιότητα λέγεται **ανεξαρτησία φορτίου (charge independence)**.
- Η δύναμη νουκλεονίου-νουκλεονίου **εξαρτάται από το αν τα spin** των νουκλεονίων είναι παράλληλα ή αντι-παράλληλα.
- Η δύναμη νουκλεονίου-νουκλεονίου περιλαμβάνει έναν **απωστικό όρο** ο οποίος κρατά τα νουκλεόνια σε κάποια απόσταση.
- Η δύναμη νουκλεονίου-νουκλεονίου έχει μια **μη-κεντρική ή τανυστική συνιστώσα**. Αυτό το τμήμα της δύναμης δεν διατηρεί την τροχιακή στροφορμή, η οποία υπό καθεστώς κεντρικών δυνάμεων είναι μια σταθερά της κίνησης.

