

Στοιχεία Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων (5ου εξαμήνου, χειμερινό 2014-15)

Τμήμα Τ3: Κ. Κορδάς & Χ. Πετρίδου

Μάθημα 5

- α) Αλληλεπίδραση νουκλεονίου-νουκλεονίου – πυρηνική δύναμη και δυναμικό
- β) Πυρηνικό μοντέλο των φλοιών

Κώστας Κορδάς

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Πυρηνική & Στοιχειώδη Ι, Αριστοτέλειο Παν. Θ/νίκης, 30 Οκτωβρίου 2014

Σήμερα

- **Πυρηνικό δυναμικό - δυναμικό Yukawa, σύστημα δευτερίου**
 - Βιβλίο C&G, Κεφ. 1 όλο, Παραγρ. 2.4, Κεφ. 3 όλο, Παράρτημα Γ (κυρίως Γ.2,3,4).
 - Σημειώσεις Πυρηνικής, Κεφ. 6
- **Πυρηνικό μοντέλο των φλοιών - εκτίμηση βάθους δυναμικού, ενεργειακών σταθμών και μαγικών αριθμών**
 - Βιβλίο C&G, Παράρτημα Β, Κεφ. 5, 5.1-5.7
 - Σημειώσεις Πυρηνικής, Κεφ. 8
- **Χαρακτηριστικά πυρήνων πέρα από το μέγεθος και τη μάζα: σπιν (spin), ομοτιμία (parity), μαγνητική ροπή, ηλεκτρική τετραπολική ροπή**
 - Βιβλίο C&G, Παράρτημα Γ , παρ. 1.3, Κεφ. 5, παρ. 5.5-5.7
 - Σημειώσεις Πυρηνικής, Κεφ. 1, σελ. 4-5 (μαγνητική ροπή)
- **Ιστοσελίδα:** <http://www.physics.auth.gr/course/show/125>

1. Αναλογία με ένα πρότυπο δέσμιου συστήματος: το άτομο

(όπου ξέρουμε ότι έχουμε ηλεκτρομαγνητική
δύναμη μεταξύ πυρήνα και ηλεκτρονίων →
δυναμικό Coulomb)

1α. Εξίσωση Schroedinger, κυματοσυναρτήσεις, στροφορμή, σπίν και παριτυ

Το σωματίδιο ως κύμα - κυματοσυνάρτηση

- **De Broglie:**

$$E = h f \rightarrow E = \hbar \omega \rightarrow \omega = \frac{E}{\hbar}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \rightarrow p = \hbar k \rightarrow k = \frac{p}{\hbar}$$

- Ένα κύμα μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα επίπεδων κυμάτων σαν κι αυτό:

$$\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} = e^{i(px - Et)/\hbar}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \psi \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = E \psi$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{ip}{\hbar} \psi \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi = p \psi$$

“Τελεστής” ενέργειας

= μια “πράξη” πάνω στην κυματοσυνάρτηση ψ , που δίνει πάλι την ψ , αλλά πολλαπλασιασμένη με την ενέργεια E .

Η E είναι μια ιδιοτιμή της ενέργειας, και η ψ είναι μια ιδιο-συνάρτηση του τελεστή της ενέργειας.

“Τελεστής” ορμής

Περιγραφή ενός συστήματος με κυματοσυναρτήσεις

Έστω ψ μια κυματοσυνάρτηση που περιγράφει ένα σύστημα.

$$A \psi = \alpha \psi$$

“Τελεστής”

= μια “πράξη” πάνω στην κυματοσυνάρτηση ψ που αν δίνει πάλι την ψ , αλλά πολλαπλασιασμένη με μια σταθερά α , τότε λέμε ότι

Το α είναι μια ιδιοτιμή του τελεστή A , και η ψ είναι μια ιδιοσυνάρτηση του τελεστή A

Παράδειγμα:

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = E \psi$$

“Τελεστής” ενέργειας

Η E είναι μια ιδιοτιμή του τελεστή ενέργειας, και η ψ είναι μια ιδιοσυνάρτηση του τελεστή της ενέργειας.

$$-i \hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi = p \psi$$

“Τελεστής” ορμής

Εξισώσεις Schroedinger

- Schroedinger: ψάχνει κυματική εξίσωση που ικανοποιεί:

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (\text{όπου } p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

$$E \psi = \frac{p^2}{2m} \psi \rightarrow i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$

**Χρονοεξαρτώμενη
Εξίσωση Schroedinger.**
την εφαρμόζουμε σε
οποιαδήποτε συνάρτηση ψ

Όπου: $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \text{o Λαπλασιανός τελεστής} = \text{η Λαπλασιανή}$

$|\psi|^2 = \text{πυκνότητα πιθανότητας} = \text{πιθανότητα ανά μονάδα όγκου}$
να βρούμε το σωματίδιο σε μία περιοχή του χώρου

* Για να βρούμε την ενέργεια E , δεν βαζουμε τον τελεστη της ενέργειας, κι έτσι λύνουμε τη **χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schroedinger**:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) \rightarrow E \psi = \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi \rightarrow \nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(\vec{r})) \psi = 0$$

$$H \psi = E \psi, \text{ όπου: } H \equiv \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \equiv \text{o Χαμιλτονιανός τελεστής} \equiv \text{η Χαμιλτονιανή}$$

$$H \equiv T + V = \text{κινητική} + \text{δυναμική ενέργεια}$$

Ιδιοσυναρτήσεις και ιδιοτιμές ενέργειας από την εξίσωση Schroedinger

- Λύνουμε πρώτα τη χρονοανεξάρτητη εξίσωση του Schroedinger, και βρίσκουμε τις ιδιοτιμές ενέργειας E_i και τις ιδιοσυναρτήσεις $\psi_i(x)$ του συστήματος:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) \rightarrow E\psi = \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi \rightarrow \nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(\vec{r})) \psi = 0$$

- Κατόπιν βάζουμε και τη χρονική εξάρτηση κάθε ιδιοσυνάρτησης ως εξής:

$$\psi_i(x, t) = \psi_i(x) e^{-iE_i t / \hbar}$$

- Μετά, οποιαδήποτε κυματοσυνάρτηση ψ που περιγράφει το σύστημά μας, μπορούμε να τη γράφουμε σαν γραμμικό συνδυασμό των ιδιοσυναρτήσεων ψ_i

$$\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + c_3 \psi_3 + \dots$$

Εξίσωση Schroedinger για κεντρικά δυναμικά

- Η εξίσωση Schroedinger

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(\vec{r})) \psi = 0$$

με κεντρικό δυναμικό $V(\vec{r}) = V(r)$ [π.χ., το δυναμικό Coulomb $-e^2/r$],
όπου χωρίζουμε ακτινικό και γωνιακό μέρος κυματοσυνάρτησης:

$$\psi(\vec{r}) = R(r) Y(\theta, \varphi), \text{ και } y = r R(r)$$

γίνεται:
$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} y + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_l(r)) y = 0$$

Οπότε έχουμε να λύσουμε την πιο πάνω μονοδιάστατη εξίσωση του Schroedinger, όπου το “ενεργό δυναμικό” είναι ίσο με το άθροισμα του κεντρικού δυναμικού **κι ενός όρου στροφορμής**

$$V_l(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_e r^2}$$

Άτομο υδρογόνου με εξ. Schroedinger

- Λύση της εξίσωσης Schroedinger $\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar} (E - V(\vec{r})) \psi = 0$

με το δυναμικό Coulomb: $V(\vec{r}) = V(r) = \frac{q_1 q_2}{r} = e \frac{(-e)}{r} = \frac{-e^2}{r}$

και $\psi(\vec{r}) = R(r) Y(\theta, \varphi)$

- Δίνει:

Παράδειγμα κεντρικού δυναμικού
Όπου ΔΕΝ υπάρχει εξάρτηση από θ, φ

συναρτήσεις $R(r)$ και $Y(\theta, \varphi)$, όπου $\psi = R(r) Y(\theta, \varphi)$ είναι **ιδιοσυναρτήσεις**

α) της Χαμιλτονιανής, με ιδιοτιμές ενέργειας

$$E = \left(\frac{1}{2} a^2 m c^2 \right) \frac{1}{n^2}$$

β) του τελεστή L^2 της τροχιακής στροφορμής με ιδιοτιμές:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (-i\hbar \nabla)$$

$$\text{όπου: } \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

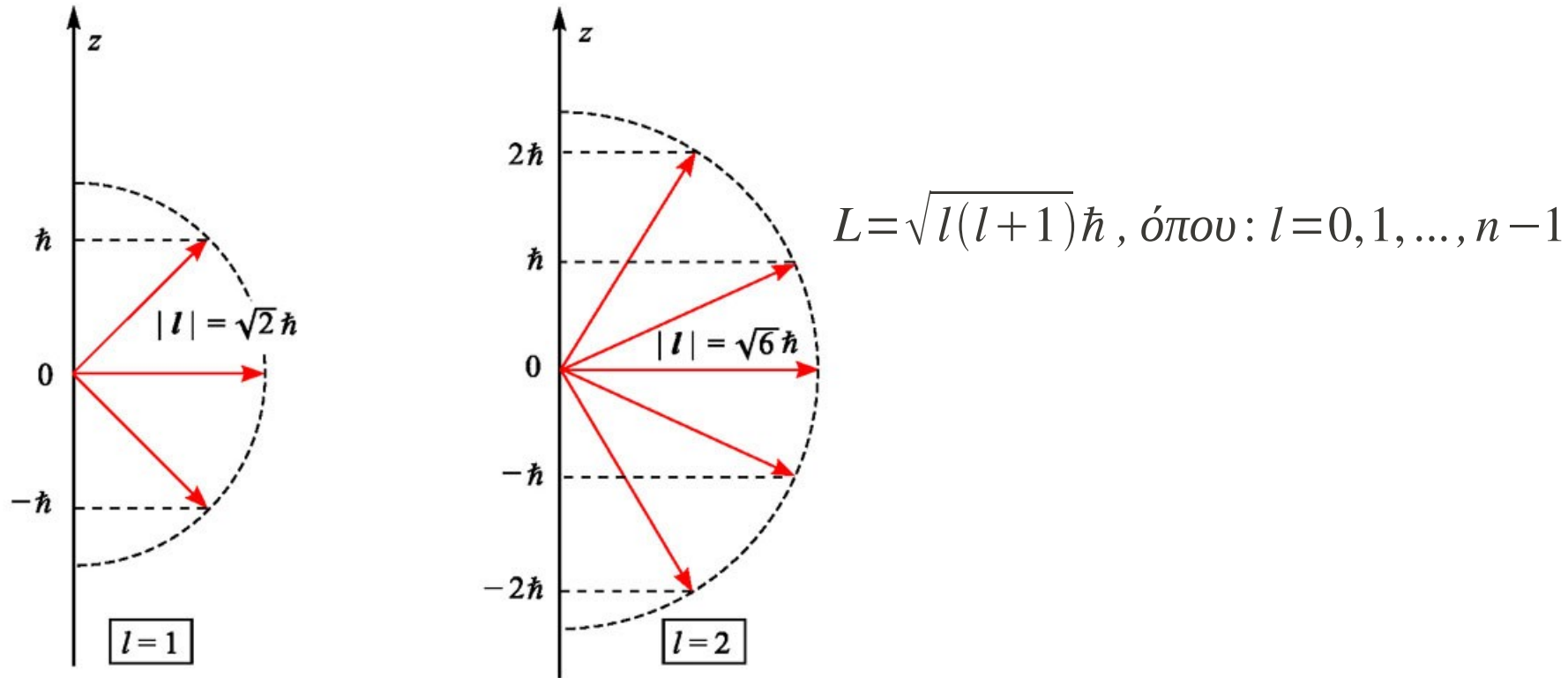
$$L^2 Y_{lm} = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}, \text{ όπου: } l = 0, 1, \dots, n-1$$

γ) του τελεστή L_z , προβολής της L σ'έναν άξονα, με ιδιοτιμές:

$$L_z Y_{lm} = m_l \hbar Y_{lm}, \text{ όπου: } m_l = -l, \dots, 0, \dots, l$$

Ίδιες Y_{lm} , l , και m_l λύσεις για
ΟΛΑ τα κεντρικά δυναμικά

Κβάντωση στροφορμής



ΣΧΗΜΑ 9.9: Το κβαντωμένο διάνυσμα της στροφορμής για $\ell = 1$ και $\ell = 2$. Λόγω της κβάντωσης της προβολής του πάνω σε έναν άξονα, το «διάνυσμα» της στροφορμής –αν η σχεδιάσή του ως διανύσματος έχει νόημα– μπορεί να έχει μόνο ορισμένους διακριτούς προσανατολισμούς στον χώρο. Φαινόμενο που αποδίδεται με τον όρο «κβάντωση προσανατολισμού» ή «κβάντωση χώρου». Σημειώστε επίσης –γιατί αυτό είναι το πιο προκλητικό από όλα– ότι το διάνυσμα ℓ ουδέποτε ευθυγραμμίζεται με τον άξονα z . Ακόμα και στην κατάσταση μέγιστης προβολής του σε αυτόν τον άξονα σχηματίζει γωνία μαζί του αφού είναι πάντα $(\ell_z)_{\max} = \hbar\ell < |\ell| = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$.

Άθροισμα
στροφορμών:

$$l_{z(1+2)} = l_{z(1)} + l_{z(2)} \text{ και } |l_1 - l_2| \leq l_{1+2} \leq |l_1 + l_2|$$

Υδρογόνο: Ακτινικές ιδιοσυναρτήσεις $R_{n\ell}(r)$

ΠΙΝΑΚΑΣ 9.3. Οι ακτινικές συναρτήσεις $R_{n\ell}$ μέχρι $n = 3$

	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$
$n = 1$	$R_{10} = 2e^{-r}$		
$n = 2$	$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{r}{2}\right) e^{-r/2}$	$R_{21} = \frac{r}{2\sqrt{6}} e^{-r/2}$	
$n = 3$	$R_{30} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(1 - \frac{2r}{3} + \frac{2r^2}{27}\right) e^{-r/3}$	$R_{31} = \frac{8r}{27\sqrt{6}} \left(1 - \frac{r}{6}\right) e^{-r/3}$	$R_{32} = \frac{4r^2}{81\sqrt{30}} e^{-r/3}$

Υδρογόνο: Γωνιακές ιδιοσυναρτήσεις $Y(\theta, \phi)$

ΠΙΝΑΚΑΣ 9.2. Οι σφαιρικές αρμονικές μέχρι $\ell = 2$

	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$
$m = 2$			$Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$
$m = 1$		$Y_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$	$Y_{21} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{i\phi}$
$m = 0$	$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$	$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$
$m = -1$		$Y_{1,-1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}$	$Y_{2,-1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{-i\phi}$
$m = -2$			$Y_{2,-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\phi}$

Άτομο υδρογόνου με ενέργεια και στροφορμή

E, L^2, L_z είναι τελεστές που αντιμετωπίζονται με τη Χαμιλτονιανή, άρα τα αντίστοιχα φυσικά μεγέθη διατηρούνται, άρα οι αριθμοί n, l, m_l χαρακτηρίζουν την κατάσταση του συστήματος
→ είναι καλοί κβαντικοί αριθμοί

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar, \text{ όπου } l = 0, 1, \dots, n-1$$

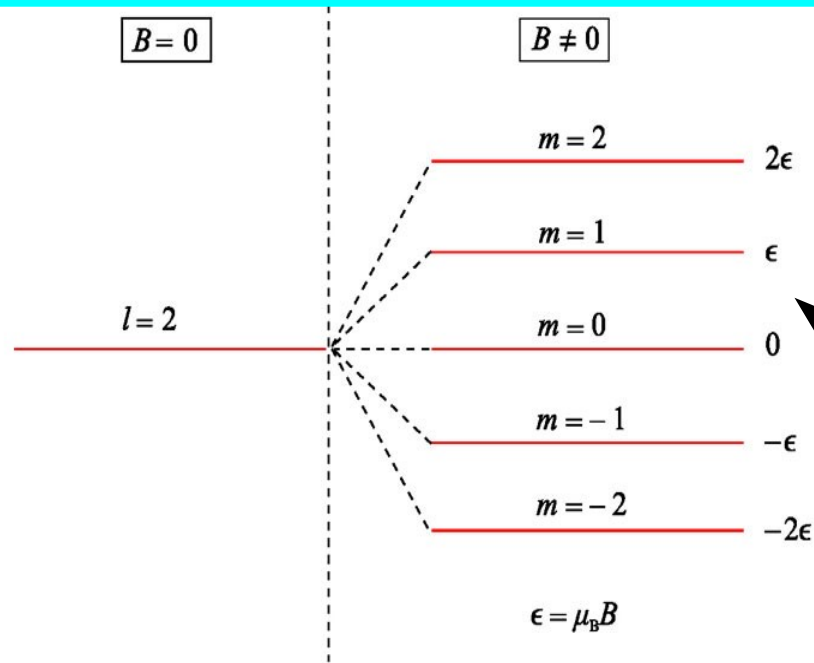
Συμβολισμός καταστάσεων:

$ns, np, nd, nf, \dots$ Π.χ, $2p: (n=2, l=1)$
 $s: l=0; p: l=1; d: l=2; f: l=3, \dots$

Διαφορετικές καταστάσεις $\{n, l, m_l\}$ με ίδια ενέργεια:
εκφυλισμένες καταστάσεις

Κάτω όμως από κάποιες συνθήκες, μπορώ να αποκαλύψω ότι έχουμε διαφορετικές καταστάσεις; (και έτσι να διαπιστώσω ότι δεν είναι απλά μία μαθηματική υπόθεση;)

Τροχ. Στροφορμή: διαχωρισμός εκφυλισμένων ενεργειακών σταθμών H σε μαγνητικό πεδίο



Ενέργεια λόγω αλληλεπίδρασης του ηλεκτρονίου (της **τροχιακής μαγνητικής ροπής** του, μ) με το μαγνητικό πεδίο B :

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad \vec{B} = B \hat{z}$$

Το ηλεκτρόνιο συμπεριφέρεται σαν μαγνήτης με διπολική μαγνητική ροπή:

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m_e c} \vec{L} = \frac{-e}{2m_e c} \vec{L}$$

$$\mu = \frac{-e}{2m_e c} \hbar \sqrt{l(l+1)}$$

Μαγνητόνη του Bohr, μ_B : $\mu_B \equiv \frac{e \hbar}{2m_e c}$

$$\mu = -\mu_B \sqrt{l(l+1)}$$

$$\mu_z = -\mu_B m_l$$

$$U = m_l (\mu_B B)$$

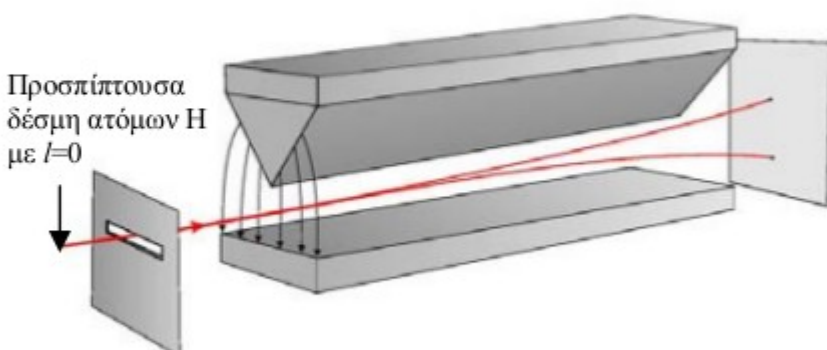
ΣΧΗΜΑ 10.4: Ο διαχωρισμός Zeeman για μια στάθμη με $l = 2$. Η τοποθέτηση του ατόμου σε ένα μαγνητικό πεδίο προκαλεί άρση του περιστροφικού εκφυλισμού μιας στάθμης με κβαντικό αριθμό l , και δημιουργία $2l + 1$ νέων σταθμών συμμετρικά διατεταγμένων ως προς την αρχική και με σταθερή μεταξύ τους απόσταση ίση με $\epsilon = \mu_B B$.

Από τον προκαλούμενο διαχωρισμό των ενεργειακών επιπέδων, μπορούμε π.χ να μετρήσουμε το μαγνητικό πεδίο ενός αστεριού

Η ανάδυση του **σπιν**: μια “εσωτερική στροφορμή”, “ιδιοστροφορμή”

Το σπιν: Μια καθαρά κβαντική στροφορμή

Οι πειραματικές ενδείξεις για την ύπαρξη μιας εσωτερικής στροφορμής του ηλεκτρονίου

Πείραμα Stern-Gerlach με άτομα Υδρογόνου στη θεμελιώδη τους κατάσταση  Προσπίπτουσα δέσμη ατόμων H με $l=0$ Πειραματικό αποτέλεσμα: Ο αριθμός των κηλίδων στο πέτασμα είναι ίσος με <u>δύο</u>. Η προσπίπτουσα δέσμη χωρίζεται πάντα σε <u>δύο</u>.	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Ο μόνος τρόπος να εξηγηθεί το πειραματικό αποτέλεσμα είναι να υποθεθεί ότι το ηλεκτρόνιο είναι φορέας και μιας εσωτερικής στροφορμής ($\equiv$ <u>σπιν</u>) με παρόμοιες ιδιότητες και πειραματικές εκδηλώσεις όπως η τροχιακή στροφορμή αλλά με τιμή του κβαντικού αριθμού s (το ανάλογο του ℓ) ίση με $\frac{1}{2}$.
---	---

ΜΕΛΕΤΗ: Σ. Τραχανά, *Κβαντομηχανική I*, σελ. 428-437.

Μαγνητική ροπή λόγω ιδιοστροφορμής (spin) και συνεισφορά στην ενέργεια όταν σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B \hat{z}$

- Στην προηγούμενη σελίδα είδαμε τη μαγνητική ροπή που έχει το ηλεκτρόνιο λόγω περιστροφής γύρω από τον πυρήνα (λόγω τροχιακής στροφορμής, l).
- Το ηλεκτρόνιο έχει όμως και μια εσωτερική στροφορμή, μια ιδιοστροφορμή (= spin = σπίν) ανεξάρτητα από το αν κινείται ή όχι. Το σπίν είναι μια ιδιότητα του ηλεκτρονίου, όπως το φορτίο που έχει

$$S = \sqrt{s(s+1)} \hbar, \text{ όπου: } s = 1/2$$

$$S_z = m_s \hbar, \text{ όπου: } m_s = -1/2, +1/2$$

Λόγω του σπίν, το υδρογόνο έχει μια μαγνητική ροπή μ_s :

$$\vec{\mu}_s = g_e \left(\frac{q}{2 m_e c} \right) \vec{S} = g_e \frac{-e}{2 m_e c} \vec{S} = -g_e \mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar}$$

Το ηλεκτρόνιο είναι
στοιχειώδες $\rightarrow g_e = 2$

$$\mu_B \equiv \frac{e \hbar}{2 m_e c}$$

$$\mu_s = -g_e \mu_B \sqrt{s(s+1)}$$

$$\mu_{s,z} = -g_e \mu_B m_s$$

Δυναμική ενέργεια λόγω σπιν: $U_s = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} \rightarrow U_s = \pm \mu_B B, \text{ για } m_s = \mp 1/2$

Ολική στροφορμή (J) = τροχιακή (L) + σπίν (S) = “το σπίν” του συστήματος (π.χ., του ατόμου)

- Κάθε ιδιοκατάσταση της ενέργειας, στροφορμής κ' σπιν στο άτομο χαρακτηρίζεται από 5 κβαντικούς αριθμούς $\{n, \ell, s, m_\ell, m_s\}$
 - Για κάθε συγκεκριμένο ℓ , υπάρχουν $(2\ell + 1) \cdot (2s + 1)$ ανεξάρτητες καταστάσεις, Y_{lm}

- Ολική στροφορμή J ενός σωματιδίου: άθροισμα τροχιακής στροφορμής και σπίν

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, \text{ και } J_z = L_z + S_z, \text{ όπου: } J_z^{\max} = \ell + s$$

- J^2 και J_z μπορούν να έχουν ιδιοκαταστάσεις ίδιες με L^2 και S^2 , οπότε να χαρακτηρίζω μία κατάσταση από τους κβαντικούς αριθμούς:

$$\{n, \ell, s, j, m_j\}$$

$$J^2 Y_{lm} = j(j+1) \hbar^2 Y_{lm}, \text{ όπου: } j = \ell \pm 1/2$$

$$J_z Y_{lm} = m_j \hbar Y_{lm}, \text{ όπου: } m_j = -j, \dots, 0, \dots, j$$

Ενέργεια: εξάρτηση κι από τροχιακή στροφορμή κι από σπίν

Κάθε ιδιοκατάσταση της ενέργειας, στροφορμής κ' σπιν στο άτομο χαρακτηρίζεται από κβαντικούς αριθμούς $\{n, l, s, j, m_j\}$

Ολική στροφορμή ατόμου: άθροισμα τροχιακής στροφορμής και σπίν

$$\text{π.χ, για } s=1/2: \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, j = l \pm 1/2$$

$$\text{Για } l=1 \rightarrow j = 1 \pm 1/2 = 3/2 \text{ ή } 1/2$$

Διπλή κίτρινη γραμμή του Νατρίου (θυμάστε στο εργαστήριο ατομικής;)
Αποτέλεσμα της **σύζευξης σπίν-τροχιάς (Spin-orbit coupling = $L \cdot S$ coupling)**: σύζευξη του σπιν του ηλεκτρονίου με το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το πρωτόνιο, το οποίο θεωρούμε σαν περιστρεφόμενο γύρω από το ηλεκτρόνιο, όταν βρίσκμαστε πάνω στο ηλεκτρόνιο)

Συμβολισμός καταστάσεων:

$$ns_J, np_J, nd_J, nf_J, \dots$$

$$\text{Π.χ, } 2p_{1/2}: (n=2, l=1, j=1/2)$$



Ακόμα ένας κβαντικός αριθμός: Ομοτιμία (parity)

- Είδαμε ότι κάθε ιδιοκατάσταση της ενέργειας, στροφορμής και σπιν στο άτομο χαρακτηρίζεται από κβαντικούς αριθμούς $\{n, l, s, m_l, m_s\}$. **Ο τρόπος που συμπεριφέρεται η αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση σε αναστροφή του χώρου** (που είναι το αποτέλεσμα της εφαρμογής του τελεστή της ομοτιμίας/parity, P , πάνω της) μπορεί να ορίσει κι άλλον έναν κβαντικό αριθμό: την **ομοτιμία ή parity**

$$P(\vec{r}) = -\vec{r} \left\{ \begin{array}{l} P(\psi(\vec{r})) = \psi(-\vec{r}) = \psi(\vec{r}) : \text{άρτια συνάρτηση} \rightarrow \text{Parity} = +1 \\ P(\psi(\vec{r})) = \psi(-\vec{r}) = -\psi(\vec{r}) : \text{περιττή συνάρτηση} \rightarrow \text{Parity} = -1 \end{array} \right.$$

- Κι έτσι γράφουμε το σπίν και την ομοτιμία ως J^π π.χ., κατάσταση $\frac{3}{2}^+$

- Σημείωση:** για κεντρικά δυναμικά, όπου $\psi(\vec{r}) = R(r) Y(\theta, \varphi)$, η πάριτυ της ψ οφείλεται μόνο στις σφαιρικές συναρτήσεις Y_{lm} : $\vec{r} \rightarrow -\vec{r} : P(Y(\theta, \varphi)) = Y(\pi - \theta, \pi + \varphi) = (-1)^l Y(\theta, \varphi)$, οπότε: **Parity = $(-1)^l$**

1β. Αντίστοιχοι κβαντικοί αριθμοί
ορίζονται και στο δέσμιο σύστημα
που μας απασχολεί –
τους πυρήνες

Spin και πάριτυ ενός πυρήνα (J και πάριτυ: J^p)

- Σπιν πυρήνα, J = ολικό τροχιακό σπιν των νουκλεονίων + το άθροισμα των σπιν τους.

$$\vec{J}_{\text{πυρήνα}} \equiv \sum_{\text{νουκλεόνια}} \vec{L} + \sum_{\text{νουκλεόνια}} \vec{S} = \sum_{\text{νουκλεόνια}} (\vec{L} + \vec{S})$$

- Parity = +1 ή -1

- Οπότε για κάθε πυρήνα δίνουμε σπιν (J) και parity (π): **J^π**

π.χ., 2⁺

1γ. Είδαμε ότι η ενέργεια ενός συστήματος εξαρτάται και από το σπιν του: OK.

Ερώτηση:

Η ομοτιμία / πάριτυ / parity επηρεάζει κάτι μετρήσιμο/παρατηρήσιμο;

→ Βεβαίως και ναι.

Parity: η αναστροφή του χώρου και η Αρχή του Pauli (1)

Η απαγορευτική αρχή του Pauli
και η μη διακρισιμότητα των ταυτόσημων σωματιδίων στην Κβαντομηχανική

Στην «ρίζα» της γενικευμένης αρχής του Pauli βρίσκεται το θεμελιώδες γεγονός ότι στην Κβαντομηχανική τα ταυτόσημα σωματίδια που ανήκουν στο ίδιο φυσικό σύστημα (π.χ. ένα άτομο) είναι μη διακρίσιμα διότι περιγράφονται από αλληλοεπικαλυπτόμενες κυματοσυναρτήσεις, κι επομένως είναι αδύνατον να πούμε ποιο είναι το #1 ποιο είναι το #2 κ.ο.κ. Αυτή η αδυναμία διάκρισης διασφαλίζεται κβαντομηχανικά μόνο με κύματοσυναρτήσεις $\psi(x_1, x_2)$ που είναι συμμετρικές [$\psi(x_2, x_1) = \psi(x_1, x_2)$] ή αντισυμμετρικές [$\psi(x_2, x_1) = -\psi(x_1, x_2)$] κι επομένως οδηγούν σε πιθανότητα $|\psi(x_1, x_2)|^2$ που είναι συμμετρική στην εναλλαγή $x_1 \leftrightarrow x_2$ κι άρα δεν επιτρέπει τη διάκριση των δύο σωματιδίων.

ΜΕΛΕΤΗ: Σ. Τραχανά, Κβαντομηχανική I, σελ. 468 – 480.

- Όλα τα σωματίδια με ακέραιο σπιν ($s=0, 1, 2, \dots$) - τα αποκαλούμενα **μποζόνια** - περιγράφονται από **συμμετρικές κυματοσυναρτήσεις (Parity = +1)**, ενώ όλα τα σωματίδια με ημι-ακέραιο σπιν ($s=1/2, 3/2, \dots$) - τα αποκαλούμενα **φερμιόνια** - περιγράφονται από **αντισυμμετρικές κυματοσυναρτήσεις (Parity = -1)**
ως προς την εναλλαγή των μεταβλητών τους (=αναστροφή του χώρου)

Parity: η αναστροφή του χώρου και η Αρχή του Pauli (2)

Το σπιν και η γενικευμένη αρχή του Pauli

Φερμιόνια και Μποζόνια:

Οι δύο θεμελιώδεις κατηγορίες σωματιδίων και ο ρόλος τους στη φύση

	Σπιν	Είδος συμπεριφοράς	Ποια είναι ποια	...και γιατί
Φερμιόνια	Ημιακέραιο $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$	«Ατομικιστική» Υπόκεινται στην αρχή του Pauli (είναι αδύνατη η συνύπαρξη τους στην ίδια κβαντική κατάσταση). Περιγράφονται από <u>αντισυμμετρικές κυμ/σεις</u> .	Όλα τα σωματίδια <u>δομικοί λίθοι</u> της ύλης. (e, p, n, ν κουάρκς). Όλα έχουν $s = \frac{1}{2}$	Διαφορετικά θα ήταν δυνατή η απεριόριστη συσσώρευσή τους στην ίδια περιοχή του χώρου υπό την επίδραση των αμοιβαίων έλξεων, με αποτέλεσμα την πλήρη κατάρρευση της ύλης σε μια «σταγόνα» άπειρης πυκνότητας.
Μποζόνια	Ακέραιο $s = 0, 1, 2, \dots$	«Κολλεκτιβιστική» Δεν υπόκεινται στην αρχή του Pauli (Είναι δυνατή η απεριόριστη συνύπαρξη τους στην ίδια κβαντική κατάσταση) περιγράφονται από <u>συμμετρικές κυμ/σεις</u> .	Όλα τα σωματίδια <u>φορείς δυνάμεων</u> της φύσης (γ , $w^\pm$, z, γλοιόνια, βαρυτόνιο). Όλα έχουν $s = 1$ πλήν του βαρυτονίου που (εικάζεται ότι) έχει $s = 2$.	Έτσι είναι δυνατή η απεριόριστη συνύπαρξη τους στην ίδια κβαντική κατάσταση και η δημιουργία μ' αυτό τον τρόπο ενός μακροσκοπικού πεδίου δυνάμεων (ΗΜ πεδίο, πεδίο βαρύτητας, πυρηνικά πεδία).

Parity: η αναστροφή του χώρου και η Απαγορευτική Αρχή του Pauli

Η απαγορευτική αρχή του Pauli για τα ατομικά ηλεκτρόνια:
Μια ειδική συνέπεια της γενικευμένης αρχής

Έχοντας σπιν $s = \frac{1}{2}$ τα ηλεκτρόνια είναι φερμιόνια και επομένως η συνύπαρξή τους στην ίδια κβαντική κατάσταση ενός ατόμου θα είναι αδύνατη. Και δεδομένου ότι μια κβαντική κατάσταση σ' ένα άτομο καθορίζεται μονοσήμαντα από την τετράδα κβαντικών αριθμών n, ℓ, m_ℓ, m_s , η εφαρμογή της γενικής αρχής του Pauli στα άτομα οδηγεί στην:

ΑΠΑΓΟΡΕΥΤΙΚΗ ΑΡΧΗ ΤΟΥ PAULI: Δύο ηλεκτρόνια σ' ένα άτομο είναι αδύνατον να έχουν την ίδια τετράδα κβαντικών αριθμών n, ℓ, m_ℓ, m_s . Θα διαφέρουν τουλάχιστον σε ένα κβαντικό αριθμό.

Παρατηρήσιμο;

Μα, έτσι ακριβώς εξηγούμε τη δομή των ατόμων!!!

2. Για τα άτομα είδαμε ότι περιγράφουμε τις καταστάσεις τους με την εξίσωση Schroedinger και το δυναμικό Coulomb

Για τους πυρήνες, τι δυναμικό να χρησιμοποιήσουμε;

Χαρακτηριστικά της πυρηνικής δύναμης

- **Ελκτική**
 - και μάλιστα υπερνικάει τις απωστικές δυνάμεις Coulomb των πρωτονίων στους πυρήνες
- **Μικρής εμβέλεια**
 - γιατί ξέρουμε ότι έχουμε τέλεια συμφωνία μόνο με Coulomb στα ατομικά φαινόμενα
 - Περίπου 1 fm , από σκεδάσεις σωματίων α
- **Κορεσμένη**
 - Δεν αισθάνεται κάθε νουκελόνιο όλα τα άλλα, αλλιώς η ενέργεια σύνδεσης θα αυξάνοταν με $A(A-1)$. Όμως αυξάνεται με A (θυμηθείτε: $B/A \sim 8 \text{ MeV}$)
- **Ανεξάρτητη του φορτίου**
 - Η πυρηνική δύναμη είναι ίδια για τις αλληλεπιδράσεις pp , nn , np
- **Σε πολύ μικρές αποστάσεις γίνει απώθητική (repulsive core)**

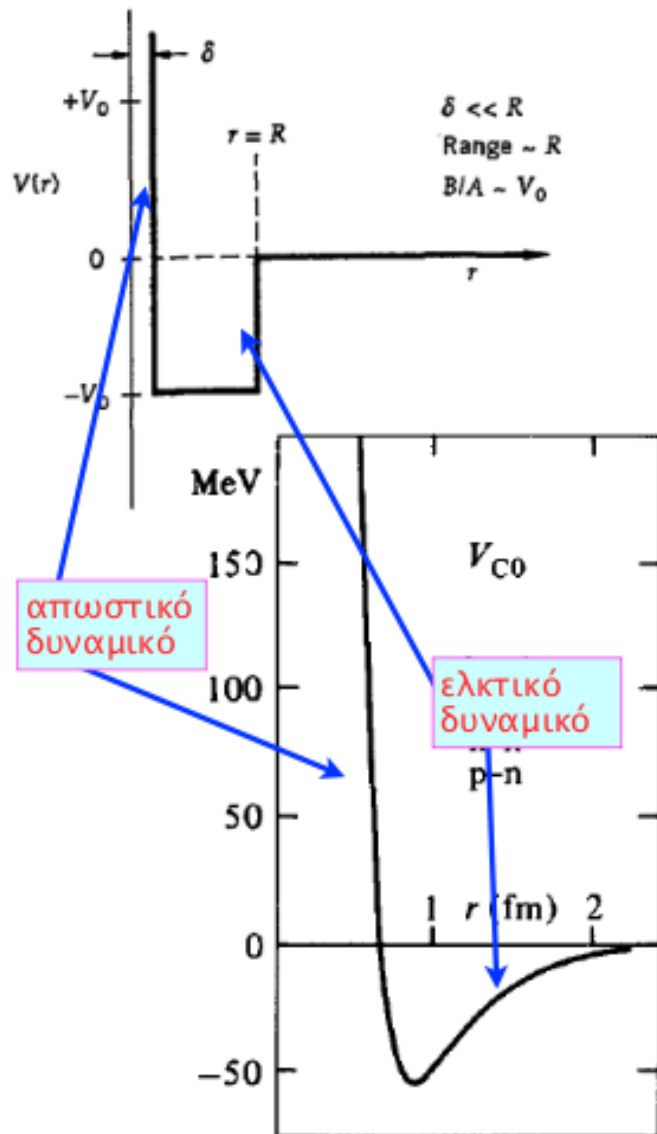
Δυναμικά με τη σωστή συμπεριφορά

- Το δυναμικό, V (=δυναμική ενέργεια), δύο νουκλεονίων πρέπει να περιγράφει τις βασικές ιδιότητες του πυρήνα: κορεσμό, μικρή εμβέλεια

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

- Διαλέγουμε ένα εύλογο δυναμικό $V \rightarrow$ το χρησιμοποιούμε στην Χαμιλτονιανή και λύνουμε την εξίσωση Schroedinger για δύο νουκλεόνια $\rightarrow$ προσαρμόζουμε τη λύση στα πειραματικά δεδομένα (υπολογίζουμε τις παραμέτρους της λύσης)
- Πειραματικά δεδομένα από
 - σκεδάσεις pn και np (σκεδάσεις nn : δύσκολες πειραματικά)
 - τη μελέτη των ιδιοτήτων του δευτερίου
- Δοκιμάζουμε διάφορα Δυναμικά:
 - Στατικά Δυναμικά: Coulomb, Yukawa (διαφέρουν ως προς τη συνάρτηση)
 - Αλληλεπιδράσεις Νουκλεονίου-Νουκλεονίου: Δυναμικό Παρισιού

Κεντρικά δυναμικά – εξάρτηση μόνο από απόσταση, όχι διεύθυνση



- Από το δυναμικό δύο νουκλεονίων πρέπει να προκύπτει η δύναμη κορεσμού

- ▶ Τα δυναμικά δίνουν μια **ελκτική δύναμη** για r -εμβέλεια: $F = -\partial V / \partial r$ και μια **απωστική δύναμη** για πολύ μικρό r

- Το απωστικό δυναμικό Coulomb

$$V(r) \propto \frac{1}{r}$$

είναι δυνατόν να δημιουργεί δυσκολίες στους υπολογισμούς.

- Συχνά για μικρές ορμές νουκλεονίων το αντικαθιστούμε με το “**πηγάδι δυναμικού**”, ή με το **δυναμικό Yukawa**

$$V(r) \propto \frac{e^{-\frac{mc}{\hbar}r}}{r}$$

Πέφτει πολύ πιο γρήγορα από το απλό $1/r$

Δυναμικό Yukawa

- Αλληλεπίδραση μεταξύ των νουκλεονίων με την ανταλλαγή ενός **σωματιδίου-διαδότη με σχετικά μεγάλη μάζα, m**
 - Πεπερασμένη ακτίνα δράσης
 - Εκπομπή και απορρόφηση του σωματιδίου διαδότη με παραβίαση της ενέργειας που δεν μπορεί να διαρκέσει πάνω από

$$\Delta E \Delta t \simeq \hbar \rightarrow m c^2 \Delta t \simeq \hbar$$

$$Εμβέλεια = R = c \Delta t = \frac{\hbar}{m c}$$

- Χρησιμοποιώντας την εμβέλεια (~ 1.4 fm) υπολογίζεις $m \sim 140$ MeV ($\sim$ μάζα πιονίου: οπότε αρχικά υποθέσαμε ότι ο διαδότης των πυρηνικών δυνάμεων μεταξύ νουκλεονίων ήταν το πiónιο)

Αλληλεπίδραση νουκελονίου-νουκλεονίου – “δυναμικό Παρισιού”

Απωστικό κέντρο

Δυναμικό = άθροισμα διαφόρων όρων:

$$V(r) = V_{C1}(r) + V_T(r)\Omega_T + V_{SO}(r)\Omega_{SO} + V_{SO2}(r)\Omega_{SO2}$$

• Περιλαμβάνει:

- ▶ συνάρτηση για τις επιτρεπτές (αντισυμμετρικές) καταστάσεις δύο πρωτονίων ή δύο νετρονίων ή νετρονίου πρωτονίου ($S=0$: αντισυμμετρικές)
- ▶ συνάρτηση για τις συμμετρικές καταστάσεις (εφικτές μόνο στο σύστημα πρωτονίου-νετρονίου) ($S=1$: συμμετρικές)

Για ολικό $S=0$, τα νουκλεόνια “αισθάνονται” μόνο ένα κεντρικό δυναμικό πάντα

Έχει αρκετό βάθος για δέσμιο σύστημα

$$\Omega_T = 3 \frac{(\sigma_1 \cdot r)(\sigma_2 \cdot r)}{r^2} - \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

σύζευξη σπιν-σπίν

Για ολικό $S=1$, υπάρχουν τεσσereis συνεισφορές στο δυναμικό

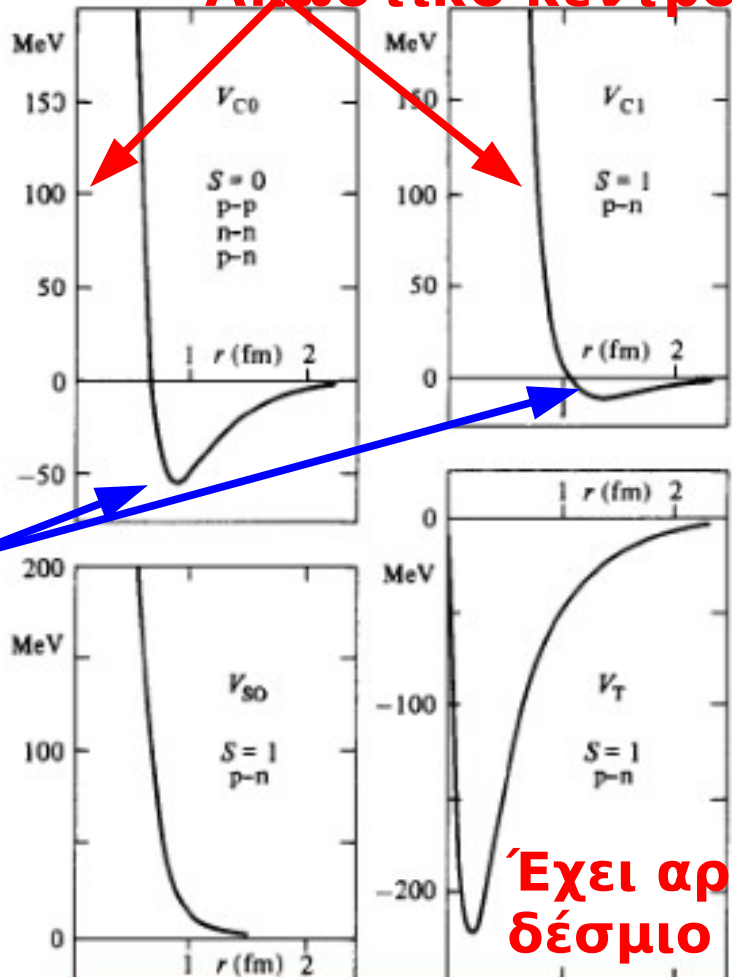
(οι 3 παραπάνω με $S=1$ και το V_{SO2})

$$\hbar\Omega_{SO} = (\sigma_1 + \sigma_2) \cdot L$$

$$\hbar^2\Omega_{SO2} = (\sigma_1 \cdot L)(\sigma_2 \cdot L) + (\sigma_2 \cdot L)(\sigma_1 \cdot L)$$

Οι 4 όροι στο $V(r)$: κεντρικό, τανυστικό δυναμικό & 2 όροι σύζευξης $L \cdot S$

Όχι αρκετό βάθος για δέσμιο σύστημα



Γιατί ο μικρότερος πυρήνας είναι το δευτέριο (πρωτόνιο-νετρόνιο) και όχι άλλος;

- Η βασική κατάσταση συστήματος δύο νουκλεονίων έχει $l=0$ μεταξύ των 2 νουκλεονίων: συμμετρική κυματοσυνάρτηση ως προς την εναλλαγή των νουκλεονίων ($1 \leftrightarrow 2$ ή $\mathbf{r} \leftrightarrow -\mathbf{r}$).

Παράρτημα Γ.4, "Το δευτέριο"

- Αν $S=0$, το μόνο δυναμικό είναι το κεντρικό V_{co} (Σχήμα προηγούμενη σελ.): δεν έχει αρκετό βάθος για δέσμιο σύστημα.
- **Οπότε μένει η $S=1$ σαν επιλογή.**
 - Οι κυματοσυναρτήσεις $S=1$ είναι **συμμετρικές** ως προς την εναλλαγή των νουκλεονίων
 - οπότε, ΔΕΝ γίνεται να έχουμε δύο ταυτόσημα φερμιόνια σ' αυτή την κατάσταση,
 - δηλ, **δεν γίνεται να έχουμε πρωτόνιο-πρωτόνιο ή νετρόνιο-νετρόνιο.**
 - **κι έτσι μένει το πρωτόνιο-νετρόνιο μόνη επιλογή!**

Παρένθεση: γιατί η $S=1$ είναι συμμετρική

C.4 The deuteron

Παράρτημα Γ.4, “Το δευτέριο”

The total intrinsic spin S of two spin $\frac{1}{2}$ fermions is

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2,$$

where from the rules above the quantum number S can take the values $S = 1$ and $S = 0$. Explicitly, the three $S = 1$ states $|S, S_m\rangle$ are found to be

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= |+\tfrac{1}{2}\rangle_1 |+\tfrac{1}{2}\rangle_2 \\ |1, 0\rangle &= (|+\tfrac{1}{2}\rangle_1 |-\tfrac{1}{2}\rangle_2 + |-\tfrac{1}{2}\rangle_1 |+\tfrac{1}{2}\rangle_2)/\sqrt{2} \\ |1, -1\rangle &= |-\tfrac{1}{2}\rangle_1 |-\tfrac{1}{2}\rangle_2 \end{aligned} \tag{C.6}$$

and the $S = 0$ state is

$$|0, 0\rangle = (|+\tfrac{1}{2}\rangle_1 |-\tfrac{1}{2}\rangle_2 - |-\tfrac{1}{2}\rangle_1 |+\tfrac{1}{2}\rangle_2)/\sqrt{2}. \tag{C.7}$$

(The factors $\sqrt{2}$ are for normalisation.)

ΟΛΕΣ οι καταστάσεις με το ίδιο S έχουν την ίδια συμμετρία ως προς την εναλλαγή $1 \leftrightarrow 2$. Π.χ., οι $S=1$ είναι ΌΛΕΣ συμμετρικές, αφού η $|S=1, S_z=+1\rangle$ είναι συμμετρική

Δευτέριο (1)

- Είναι η μόνη δέσμια κατάσταση νουκλεονίου-νουκλεονίου (n-p) που υπάρχει: ($A=2$, $Z=N=1$)
 - ▶ Μπορεί να διαχωριστεί στα n, p με ακτινοβολήση $E_\gamma \geq 2.2245 \text{ MeV}$ (ενέργεια σύνδεσης)
 - ▶ Το δευτέριο ΔΕΝ έχει διεγερμέν
 - ▶ Στροφορμή $J = 1\hbar$
 - ▶ Μαγνητική διπολική ροπή μ_d και
 - ▶ Ηλεκτρική τετραπολική ροπή

binding energy = 2.2245 MeV,
angular momentum $j = 1$,
magnetic moment = $0.8574 (e\hbar/2m_p)$,
electric quadrupole moment = 0.286 fm^2 .

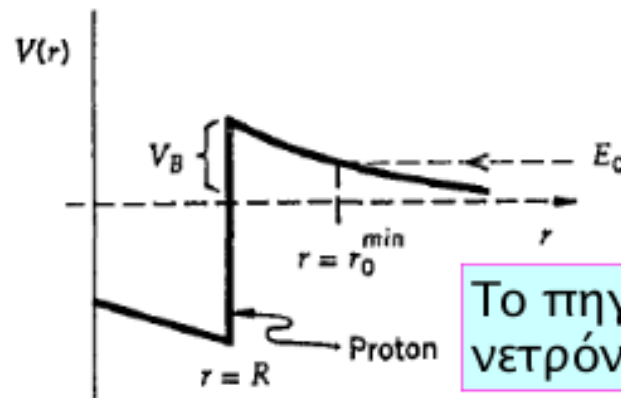
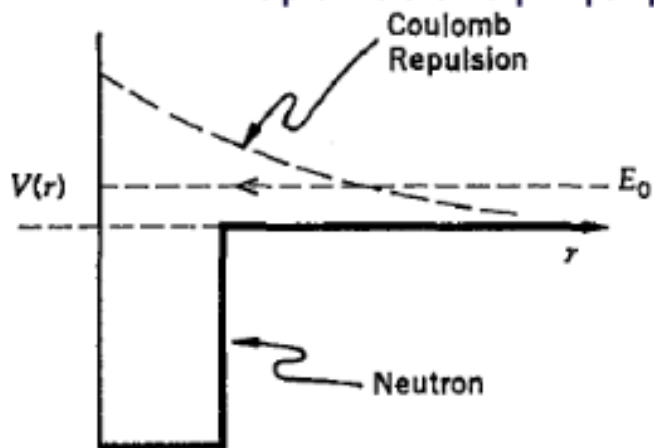
“Πυρηνική”
Μαγνητόνη
 μ_N

Παρατηρούμε: $\mu_d \neq \mu_n + \mu_p$ (αλγεβρικό άθροισμα) Αλλά ούτε είναι πολύ διαφορετικό. Αποκλείεται η ύπαρξη τροχιακής στροφορμής ($L = 0$)

- Έχουμε τις εξής επιλογές με: $S_p = 1/2$, $S_n = 1/2$
 - $S_d = 1$ ($S_z = -1, 0, 1$)
 - $S_d = 0$ ($S_z = 0$)
- Η κατάσταση $S_d = 0$ ΔΕΝ είναι δέσμια

Δευτέριο (2)

- Γιατί η τετραπολική ροπή του δευτερίου δεν είναι μηδέν?
 - ▶ $L=0$ πρόκειται για **S** “σφαιρική” κατανομή φορτίου
 - ▶ Πιθανή εξήγηση:
 - ▶ Δεν είναι καθαρή S αλλά έχει κι ένα μικρό ποσοστό D ($D \equiv I=2$: σχετική στροφορμή p-n)
- Για να βρούμε τις κυματοσυναρτήσεις χρησιμοποιούμε σφαιρικό πηγάδι δυναμικού:
- Η εξίσωση Schroedinger: $d^2u/dr^2 + 2\mu/\hbar^2 (V_0 - E)u$ $u = r \psi(r)$ ($L=0$)
- Η κυματοσυνάρτηση πρέπει να τείνει στο μηδέν για $r > R$ (δυναμικού)



Το πηγάδι δυναμικού για νετρόνια και για πρωτόνια