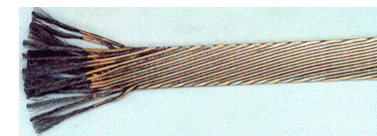
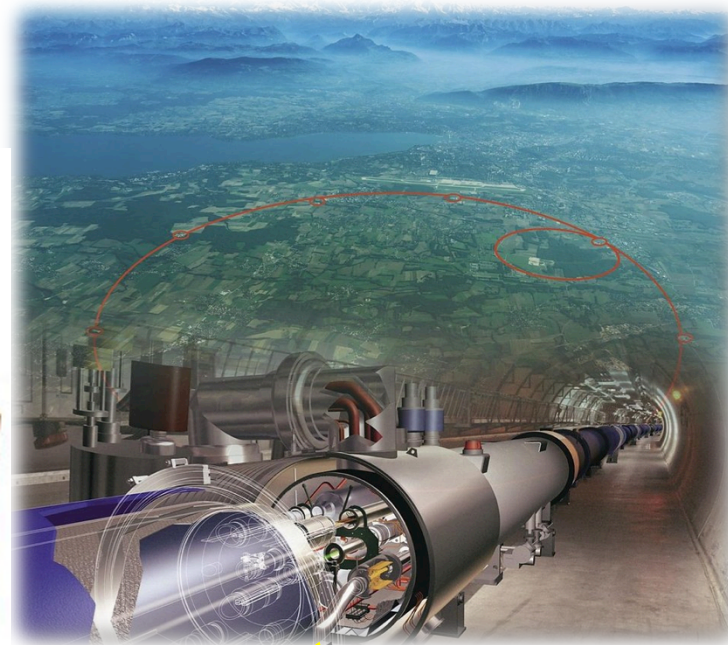
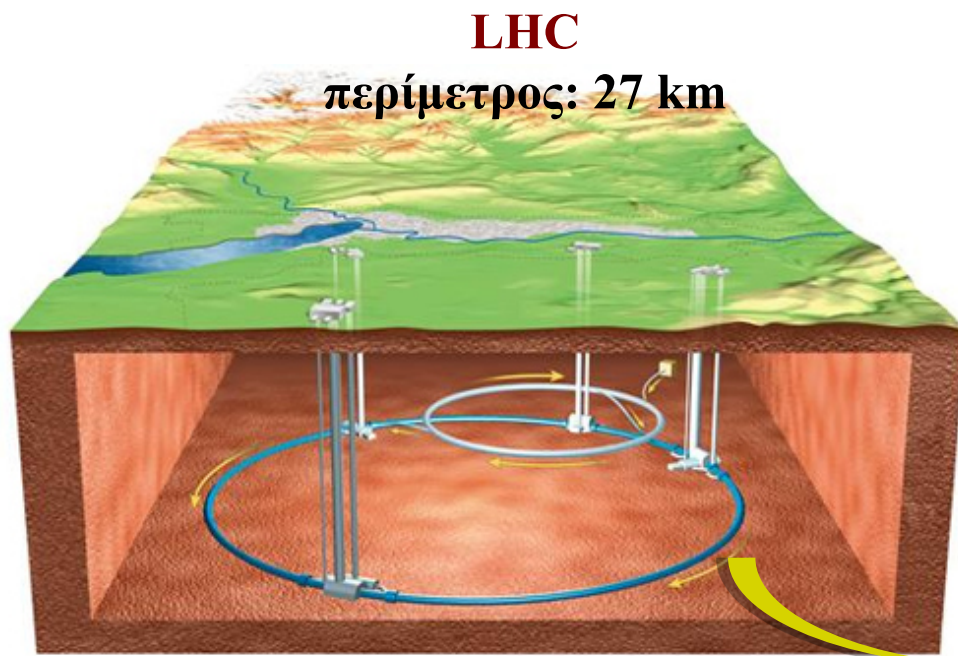


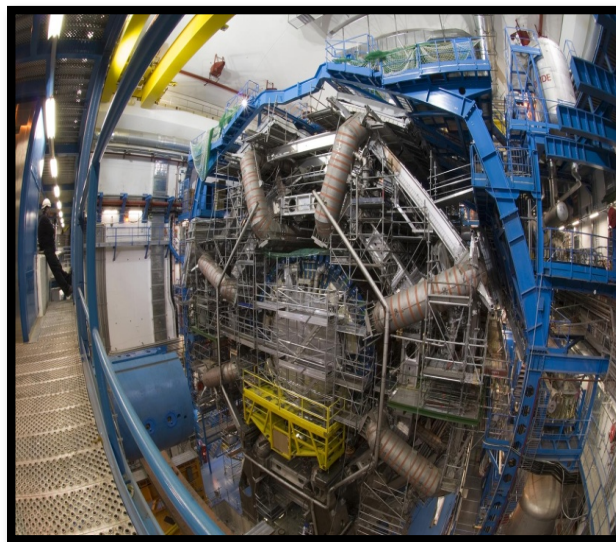
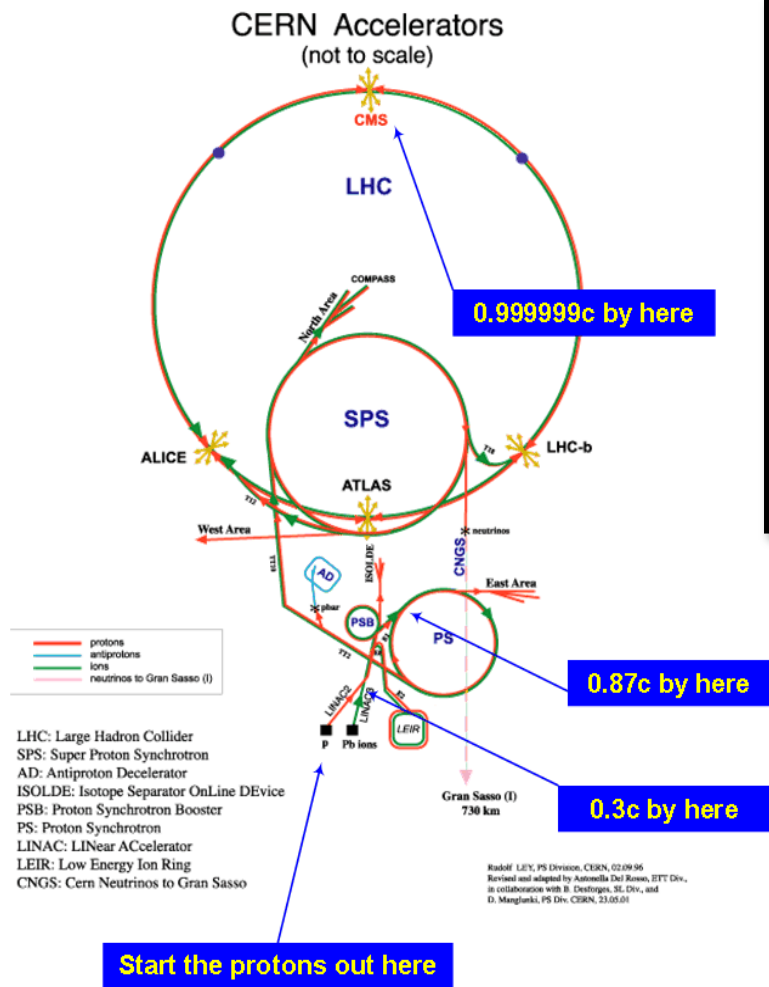
# Εισαγωγή στην Σωματιδιακή Φυσική

*Δομική Συγκρότηση και  
Θεμελιώδεις Αλληλεπιδράσεις της  
‘Υλης*



9300 υπεραγώγιμοι μαγνήτες σε θερμοκρασία  $1,9^{\circ}\text{ K}$ , 12000 τόννοι «πολύκλωνο» υπεραγώγιμο καλώδιο – μήκους 7600 km (κάθε κλώνος είναι 10 φορές λεπτότερος από την ανθρώπινη τρίχα και το συνολικό μήκος κλώνων:  $> 5$  φορές πήγαινε-έλα από την γη στον ήλιο), αποθηκευμένη ενέργεια στους μαγνήτες: 10,4 GJ ( $\sim$  η ενέργεια ενός Airbus A380 που πετάει με 700 km/h)

Επιταχύνει δύο δέσμες, κάθε μια με 2802 πακέτα πρωτονίων και κάθε πακέτο με 115000000000 ( $1.15 \cdot 10^{11}$ ) πρωτόνια, σε ενέργεια 7 TeV ανά πρωτόνιο ( $70000000000000 = 7 \cdot 10^{12}$  μπαταρίες του 1 V), συνολική ενέργεια δέσμης 362 MJ ( $\sim$  η ενέργεια ενός τρένου 400 τόννων με ταχύτητα 150 km/h), διάμετρος δέσμης στις περιοχές συγκρούσεων 16 χιλιοστά του χιλιοστού του μέτρου ( $16 \mu\text{m}$ )

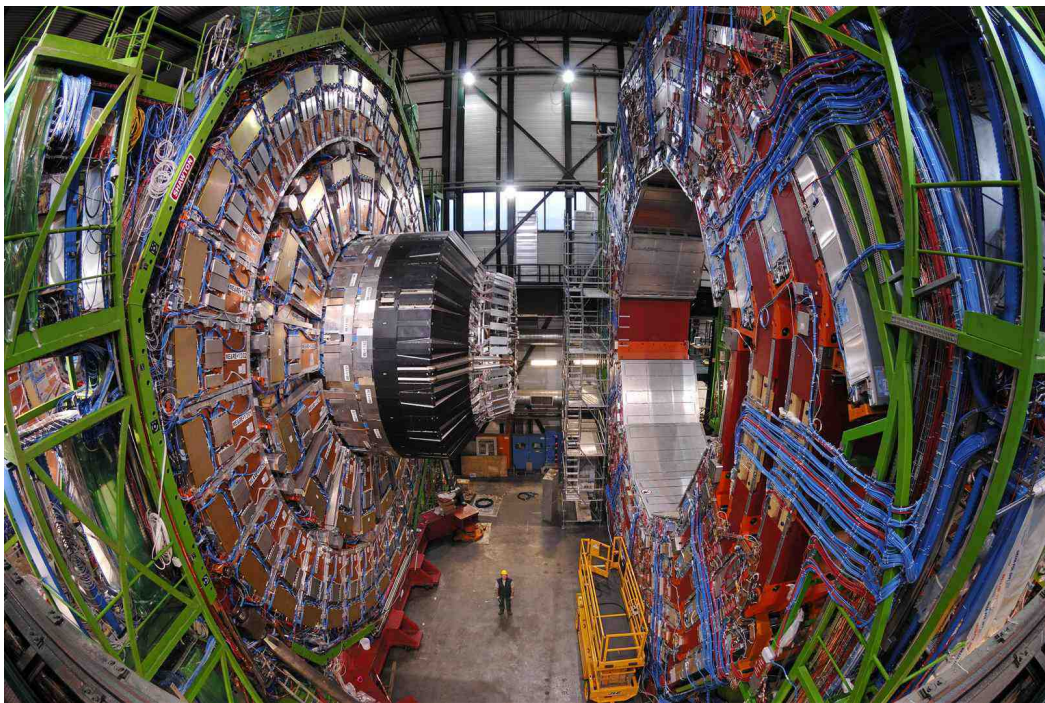


Τα πρωτόνια, με ταχύτητες 99.9999% του  $c$ , συγκρούονται σε 4 σημεία και τα αποτελέσματα των συγκρούσεων ανιχνεύονται και καταγράφονται από μεγάλες ανιχνευτικές εγκαταστάσεις (τα Πειράματα)

Η πειραματική εγκατάσταση ATLAS είναι ένα κύλινδρος ασφυκτικά γεμάτος με εξειδικευμένα όργανα, μήκους 45m και διαμέτρου 25 m, με βάρος 7000 τόννους (λίγο περισσότερο από τον πύργο του Eiffel)

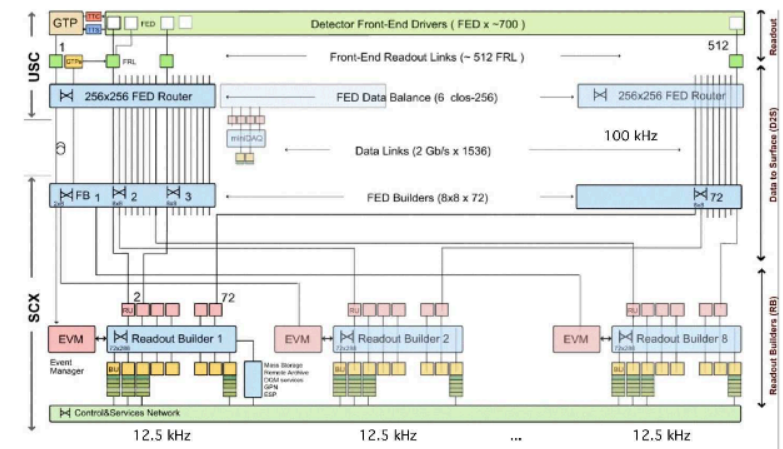
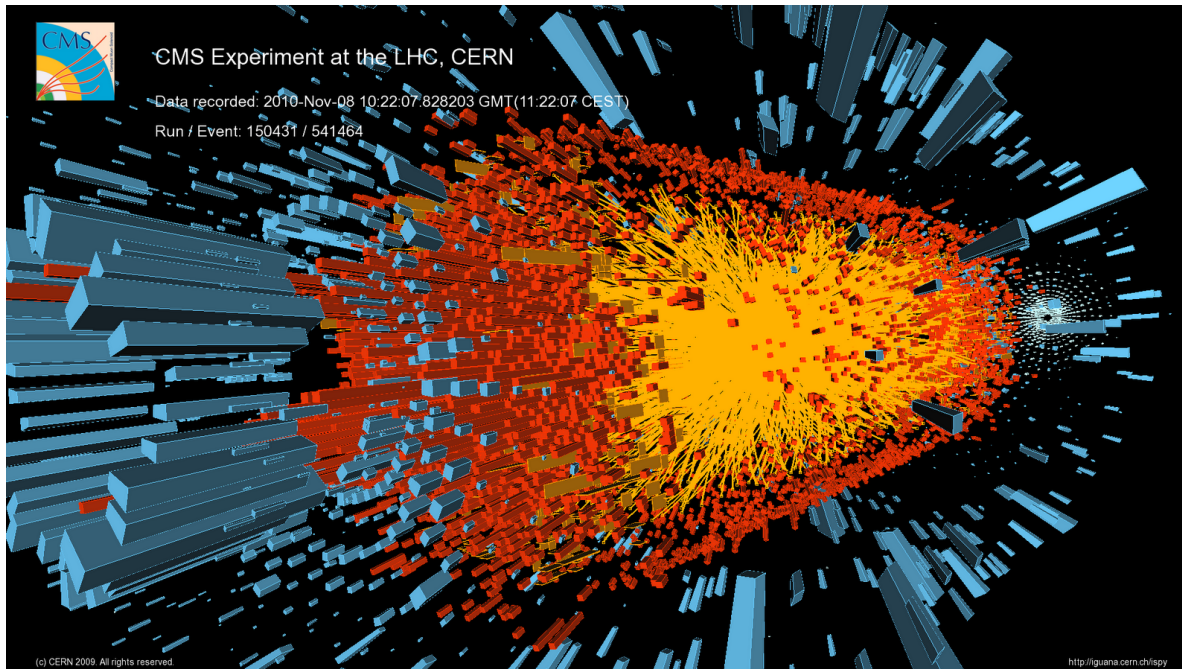
Ο μαγνήτης που χρησιμοποιεί η εγκατάσταση CMS δημιουργεί μαγνητικό πεδίο έντασης 4T (100.000 το γήινο μαγνητικό πεδίο)





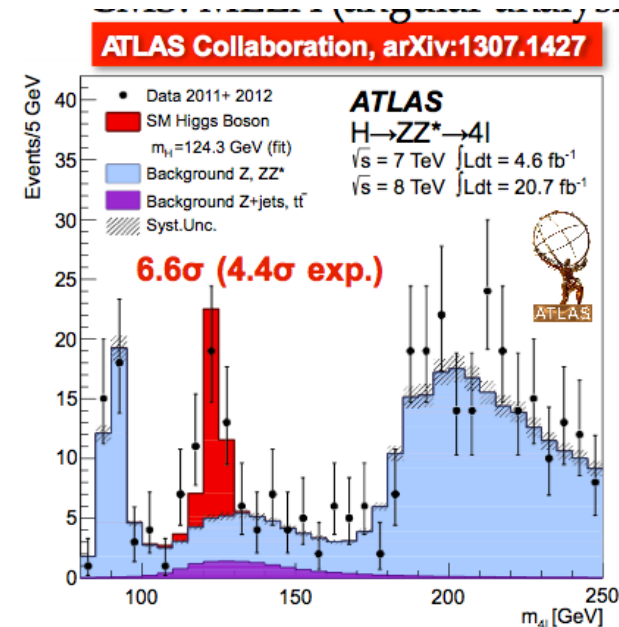
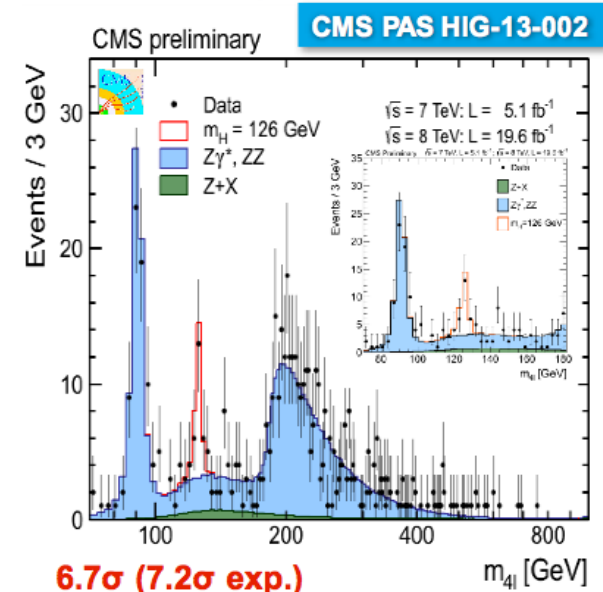
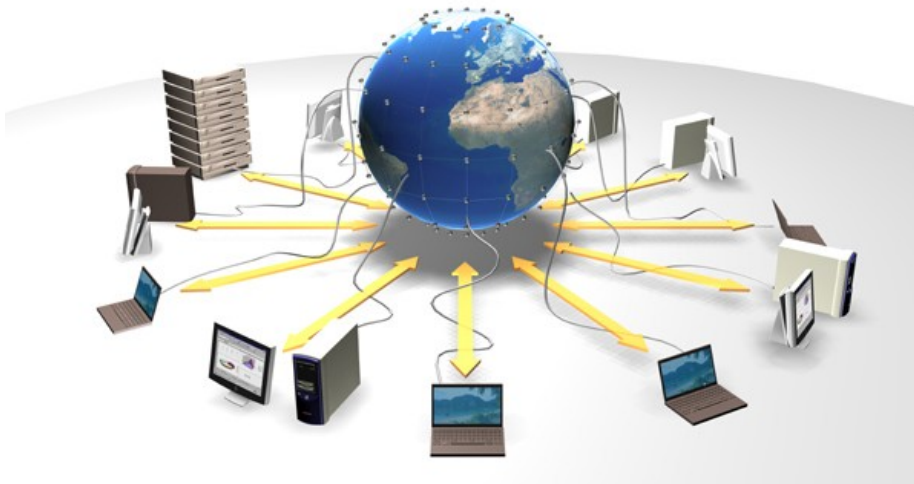
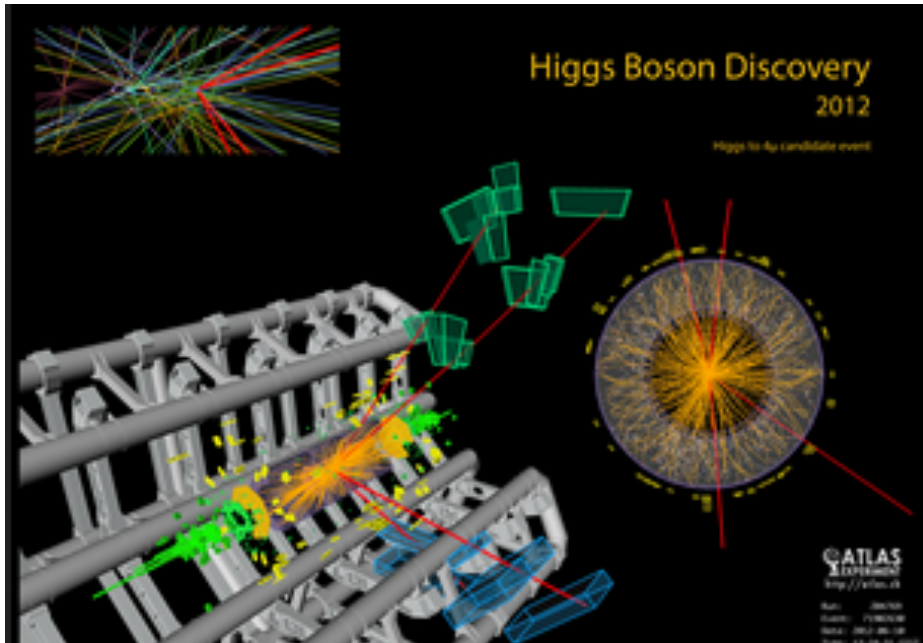
**Λειτουργικές απαιτήσεις για τους ανιχνευτές:** Κατά μ.ο., κάθε φορά που τα «πακέτα πρωτονίων» των δεσμών συναντώνται (30.000.000 φορές/s) συμβαίνουν 20 συγκρούσεις πρωτονίων, που αντιστοιχεί σε **600.000.000 συγκρούσεις πρωτονίων/s !!!**

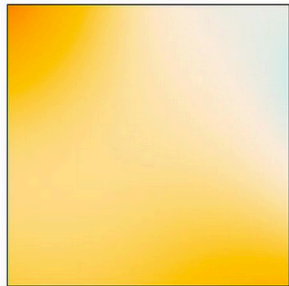
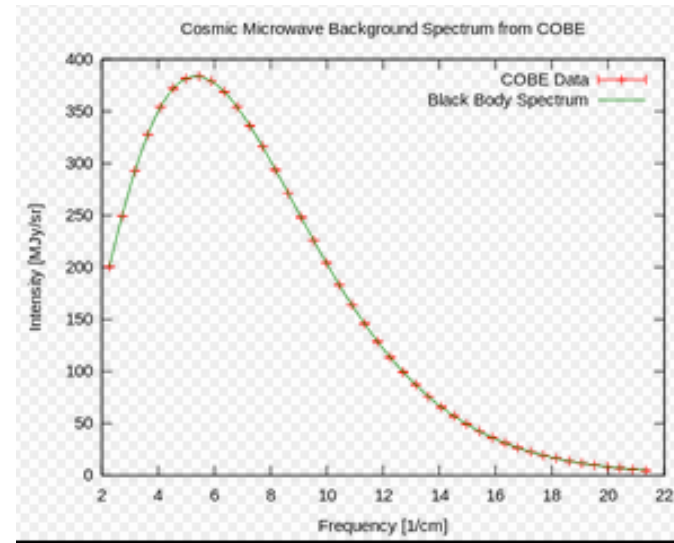
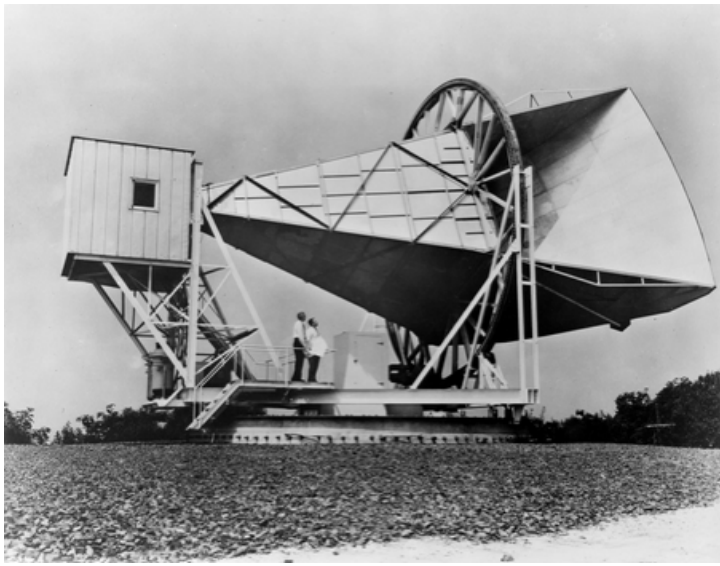
**Απαιτήσεις για τα συστήματα ψηφιοποίησης και συλλογής δεδομένων:** Γρήγορη επιλογή εκείνων των γεγονότων (προϊόντων συγκρούσεων) που ενδεχομένως να έχουν ενδιαφέρον, δηλ. **200 γεγονότα /s**



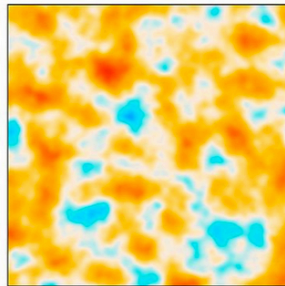


Η ψηφιοποιημένη πληροφορία για τα αποτελέσματα κάθε σύγκρουσης, χρειάζεται περίπου 1MB αποθηκευτικού χώρου, που αντιστοιχεί σε 10 PetaBytes ( $10^{10}$  bytes) αποθηκευτικού χώρου/έτος/πείραμα (σε σύγκριση με 1000 PetaBytes της παγκόσμιας, ετήσιας, παραγωγής πληροφορίας)

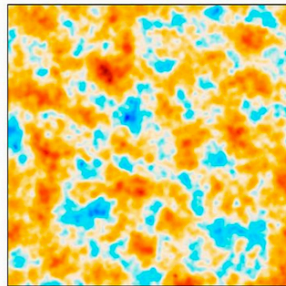




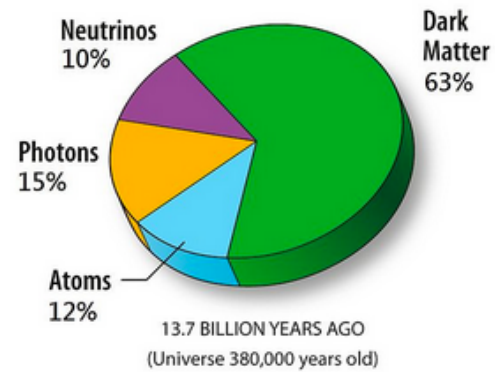
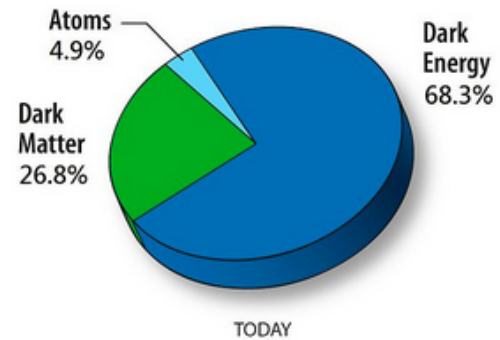
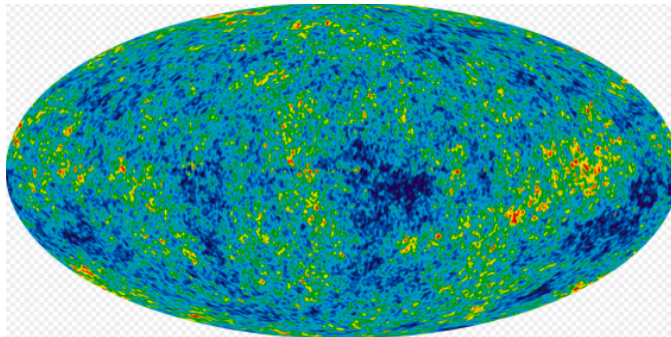
COBE



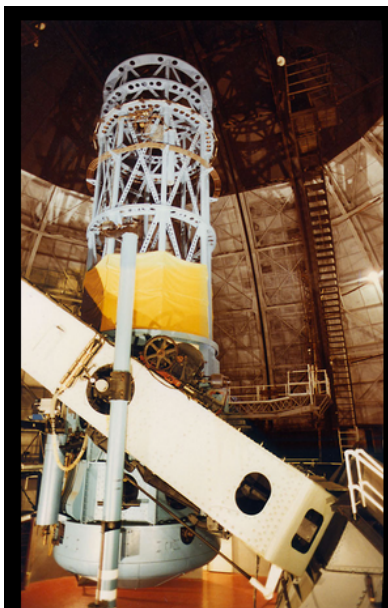
WMAP



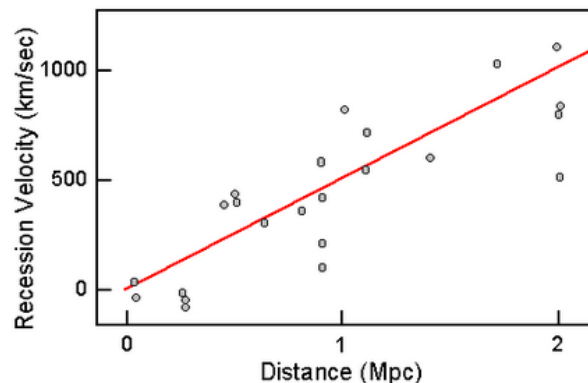
Planck





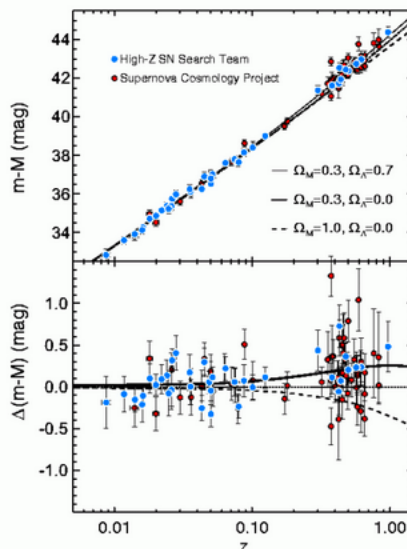


Hubble's Data (1929)



Το σύμπαν διαστέλλεται !

Το 100'' Hooker τηλεσκόπιο, στο Mount Wilson Observatory, το οποίο χρησιμοποίησε ο Edwin Powell Hubble

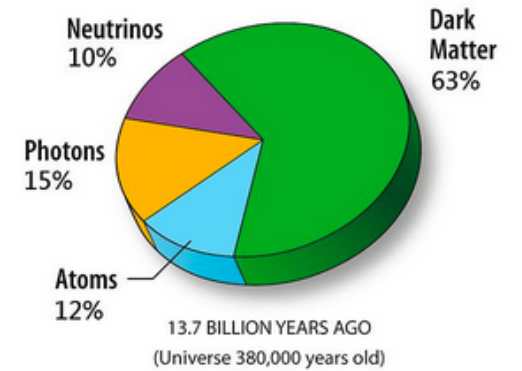
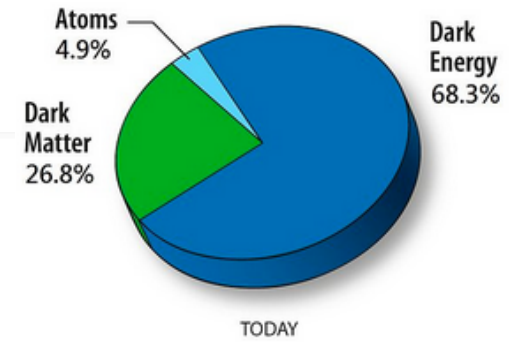


Το σύμπαν διαστέλλεται επιταχυνόμενα !!!

Το ESO Very Large Telescope (VLT) στο Cerro Paranal στην Chile είναι μία συστοιχία τεσσαρων τηλεσκοπίων των 8 m. Μόνο μεγάλα τηλεσκόπια όπως το VLT, το 10m Keck το Gemini μπορούν να συλλέξουν αρκετό φως για λεπτομερή ανάλυση μακρινών γαλαξιών από τα supernova τους

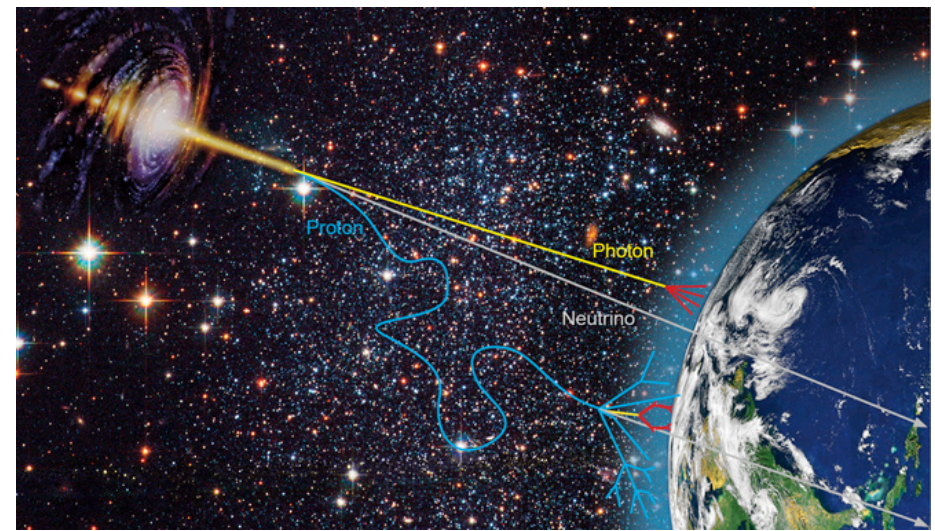
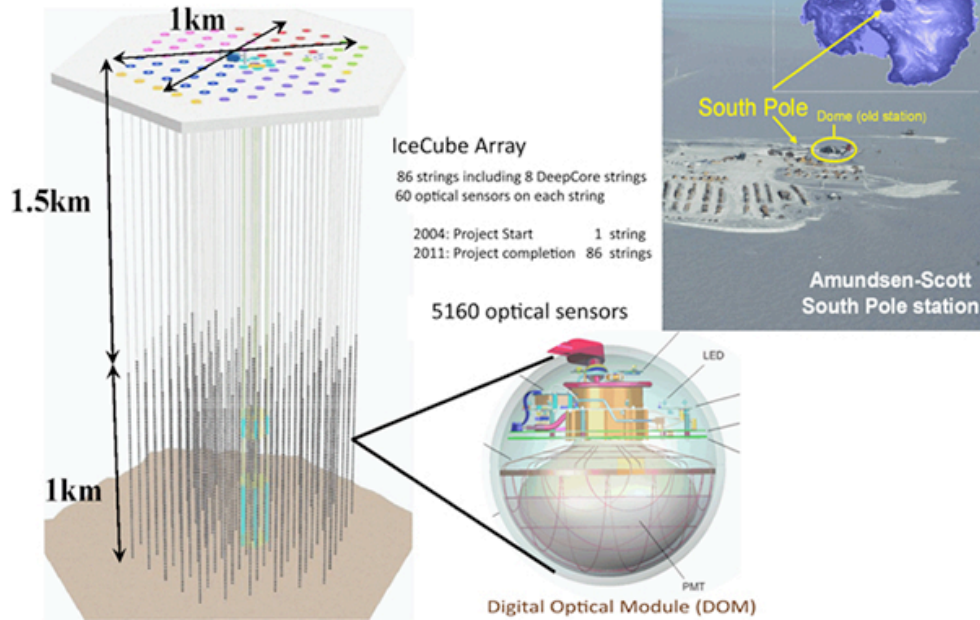
Cosmological parameters from 2013 Planck results<sup>[25][26][27]</sup>

| Parameter                          | Age of the universe (Gy) | Hubble's constant<br>( $\text{km/Mpc s}$ ) | Physical baryon density | Physical cold dark matter density | Dark energy density       | Density fluctuations at $8h^{-1}$ Mpc | Scalar spectral index | Reionization optical depth |
|------------------------------------|--------------------------|--------------------------------------------|-------------------------|-----------------------------------|---------------------------|---------------------------------------|-----------------------|----------------------------|
| Symbol                             | $t_0$                    | $H_0$                                      | $\Omega_b h^2$          | $\Omega_c h^2$                    | $\Omega_\Lambda$          | $\sigma_8$                            | $n_s$                 | $\tau$                     |
| Planck Best fit                    | 13.819                   | 67.11                                      | 0.022068                | 0.12029                           | 0.6825                    | 0.8344                                | 0.9624                | 0.0925                     |
| Planck 68% limits                  | $13.813 \pm 0.058$       | $67.4 \pm 1.4$                             | $0.02207 \pm 0.00033$   | $0.1196 \pm 0.0031$               | $0.686 \pm 0.020$         | $0.834 \pm 0.027$                     | $0.9616 \pm 0.0094$   | $0.097 \pm 0.038$          |
| Planck+lensing Best fit            | 13.784                   | 68.14                                      | 0.022242                | 0.11805                           | 0.6964                    | 0.8285                                | 0.9675                | 0.0949                     |
| Planck+lensing 68% limits          | $13.796 \pm 0.058$       | $67.9 \pm 1.5$                             | $0.02217 \pm 0.00033$   | $0.1186 \pm 0.0031$               | $0.693 \pm 0.019$         | $0.823 \pm 0.018$                     | $0.9635 \pm 0.0094$   | $0.089 \pm 0.032$          |
| Planck+WP Best fit                 | 13.8242                  | 67.04                                      | 0.022032                | 0.12038                           | 0.6817                    | 0.8347                                | 0.9619                | 0.0925                     |
| Planck+WP 68% limits               | $13.817 \pm 0.048$       | $67.3 \pm 1.2$                             | $0.02205 \pm 0.00028$   | $0.1199 \pm 0.0027$               | $0.685^{+0.018}_{-0.016}$ | $0.829 \pm 0.012$                     | $0.9603 \pm 0.0073$   | $0.089^{+0.012}_{-0.014}$  |
| Planck+WP+highL Best fit           | 13.8170                  | 67.15                                      | 0.022069                | 0.12025                           | 0.6830                    | 0.8322                                | 0.9582                | 0.0927                     |
| Planck+WP+highL 68% limits         | $13.813 \pm 0.047$       | $67.3 \pm 1.2$                             | $0.02207 \pm 0.00027$   | $0.1198 \pm 0.0026$               | $0.685^{+0.017}_{-0.016}$ | $0.828 \pm 0.012$                     | $0.9585 \pm 0.0070$   | $0.091^{+0.013}_{-0.014}$  |
| Planck+lensing+WP+highL Best fit   | 13.7914                  | 67.94                                      | 0.022199                | 0.11847                           | 0.6939                    | 0.8271                                | 0.9624                | 0.0943                     |
| Planck+lensing+WP+highL 68% limits | $13.794 \pm 0.044$       | $67.9 \pm 1.0$                             | $0.02218 \pm 0.00026$   | $0.1186 \pm 0.0022$               | $0.693 \pm 0.013$         | $0.8233 \pm 0.0097$                   | $0.9614 \pm 0.0063$   | $0.090^{+0.013}_{-0.014}$  |
| Planck+WP+highL+BAO Best fit       | 13.7965                  | 67.77                                      | 0.022161                | 0.11889                           | 0.6914                    | 0.8288                                | 0.9611                | 0.0952                     |
| Planck+WP+highL+BAO 68% limits     | $13.798 \pm 0.037$       | $67.80 \pm 0.77$                           | $0.02214 \pm 0.00024$   | $0.1187 \pm 0.0017$               | $0.692 \pm 0.010$         | $0.826 \pm 0.012$                     | $0.9608 \pm 0.0054$   | $0.092 \pm 0.013$          |

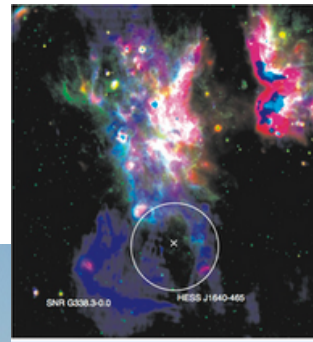
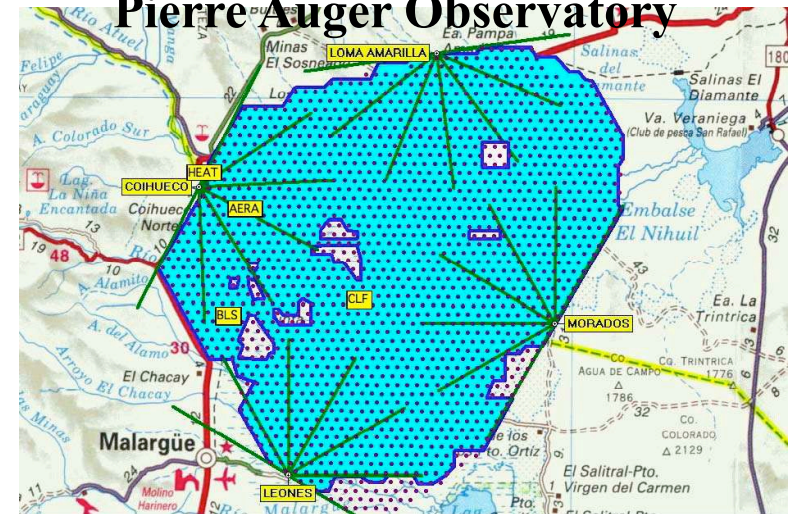




## The IceCube Neutrino Telescope



## Pierre Auger Observatory



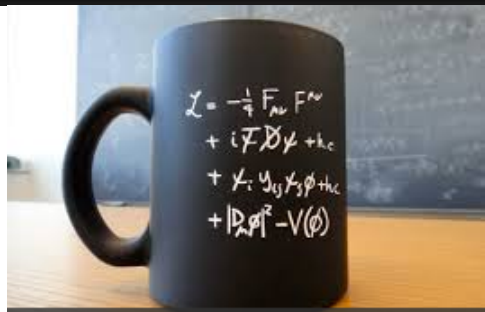
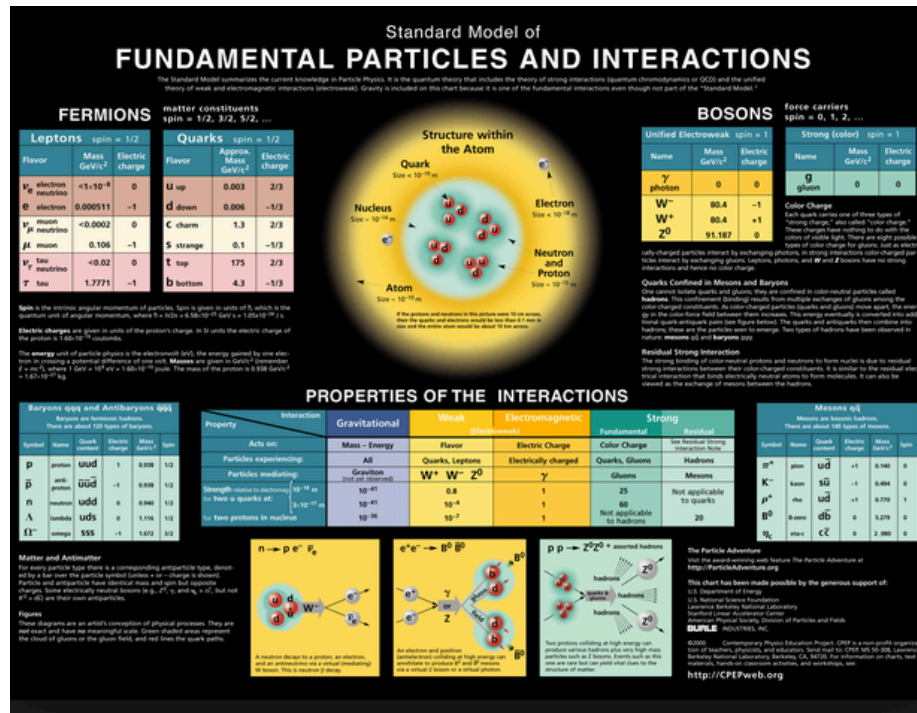
1600 ανιχνευτές σωματιδίων  
 24 μεγάλα κάτοπτρα





Όσο εντυπωσιακή και εάν είναι η πειραματική δραστηριότητα στην Σωματιδιακή και Αστροσωματιδιακή Φυσική συνοψίζεται στην απλοϊκή διαπίστωση πως «ωθεί την πλέον προηγμένη τεχνολογία και οργανολογία (φυσική ανιχνευτικών διατάξεων) στα όριά της»

Ποιο είναι όμως το «δια ταύτα» ;;;;





## και ακόμα...

- τι ακριβώς είναι η αρδάνεια και τι είναι η μάζα;
- πως παίρνουν μάζα τα νετρίνα ;
- γιατί η ύλη είναι περισσότερη από την αντιύλη ;
- γιατί η βαρύτητα να μην είναι κβαντική θεωρία ; (υπερχορδές)
- πόσες διαστάσεις έχει ο χώρος;
- τι είναι η σκοτεινή ύλη ;
- τι είναι η σκοτεινή ενέργεια;
- γιατί η θεωρία που ξέρουμε (το Καθιερωμένο Πρότυπο) είναι τόσο επιτυχής στις ενέργειες που πειράματιζόμαστε αλλά γίνεται «παραλογή» όταν προσπαθούμε να προβλέψουμε φαινόμενα σε πολύ μεγαλύτερες ενέργειες;
- υπάρχει κάποιος μηχανισμός που να ενοποιεί όλες τις αλληλεπιδράσεις ; (τουλάχιστον τον  $HM$ , την ασθενή και ισχυρή αλληλεπίδραση)
- Υπερσυμμετρία ;

# OFFICE OF HIGH ENERGY PHYSICS



## Particle Physics: Benefits to Society

From the earliest days of high energy physics in the 1930s to the latest 21st century initiatives, the innovative ideas and technologies of particle physics have entered the mainstream of society to transform the way we live. Selected examples illustrate a long and growing list of beneficial practical applications with contributions from particle physics.



### Medicine: cancer therapy

Every major medical center in the nation uses accelerators producing x-rays, protons, neutrons or heavy ions for the diagnosis and treatment of disease. It is estimated that there are over 7,000 operating medical linacs around the world that have treated over 30,000,000 patients.



### Medicine: diagnostic instrumentation

Particle detectors first developed for particle physics are now ubiquitous in medical imaging. Positron emission tomography, the technology of PET scans, came directly from detectors initially designed for particle physics experiments sensing individual photons of light.



### Homeland security: monitoring nuclear waste nonproliferation

In nuclear reactors, the amount of plutonium builds up as the uranium fuel is used. Because plutonium and uranium emit different kinds of particles, a particle detector can be used to monitor and analyze the contents of the nuclear reactor core. A prototype detector, originally developed by physicists for experiments, has already demonstrated the potential use of this new monitoring technology.



### Industry: power transmission

Cables made of superconducting material can carry far more electricity than conventional cables with minimal power losses. Further superconducting technology advances in particle physics will help advance this industry, offering an opportunity to meet continued power needs in densely populated areas where underground copper transmission lines are near their capacity.



### Industry: biomedicine and drug development

Biomedical scientists use particle physics technologies to decipher the structure of proteins, information that is key to understanding biological processes and healing disease. A clearer understanding of protein structure allows for the development of more effective drugs, such as Kaletra, one of the world's most-prescribed drugs to fight AIDS.



### Industry: understanding turbulence

From long distance oil pipelines to models for global weather prediction, turbulence determines the performance of virtually all fluid systems. Silicon strip detectors and low-noise amplifiers developed for particle physics are used to detect light scattered from microscopic particles in a turbulent fluid, permitting detailed studies of this challenging area.



### Computing: the World Wide Web

Particle physicists developed the World Wide Web to give them a tool to communicate quickly and effectively with colleagues around the world. Few other technological advances in history have more profoundly affected the global economy and societal interactions than the Web. In 2001, revenues from the World Wide Web exceeded one trillion dollars, with exponential growth continuing.



### Computing: the Grid

The Grid is the newest particle physics computing tool that allows physicists to manage and process unprecedented amounts of data across the globe by combining the strength of hundreds of thousands of individual computing farms. Industries such as medicine and finance are examples other fields that also generate large amounts of data and benefit from advanced computing technology.

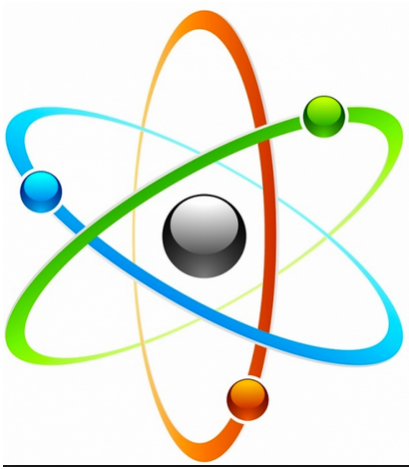


### Sciences: synchrotron light sources

Researchers use the ultra-powerful X-ray beams of dedicated synchrotron light sources to create the brightest lights on earth. These luminous sources provide tools for such applications as protein structure analysis, pharmaceutical research, materials science and restoration of works of art.







$$\left. \begin{aligned} |\vec{F}_{el}| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_e^2}{r^2} \\ |\vec{F}_{gr}| &= G \cdot \frac{m_e M_p}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad \frac{|\vec{F}_{el}|}{|\vec{F}_{gr}|} = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 G m_e M_p} \approx 10^{40}$$

$$\left. \begin{aligned} R_e &= \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \\ D &= ct_o \end{aligned} \right\} \quad \frac{ct_o}{R_e} \approx 10^{40}$$

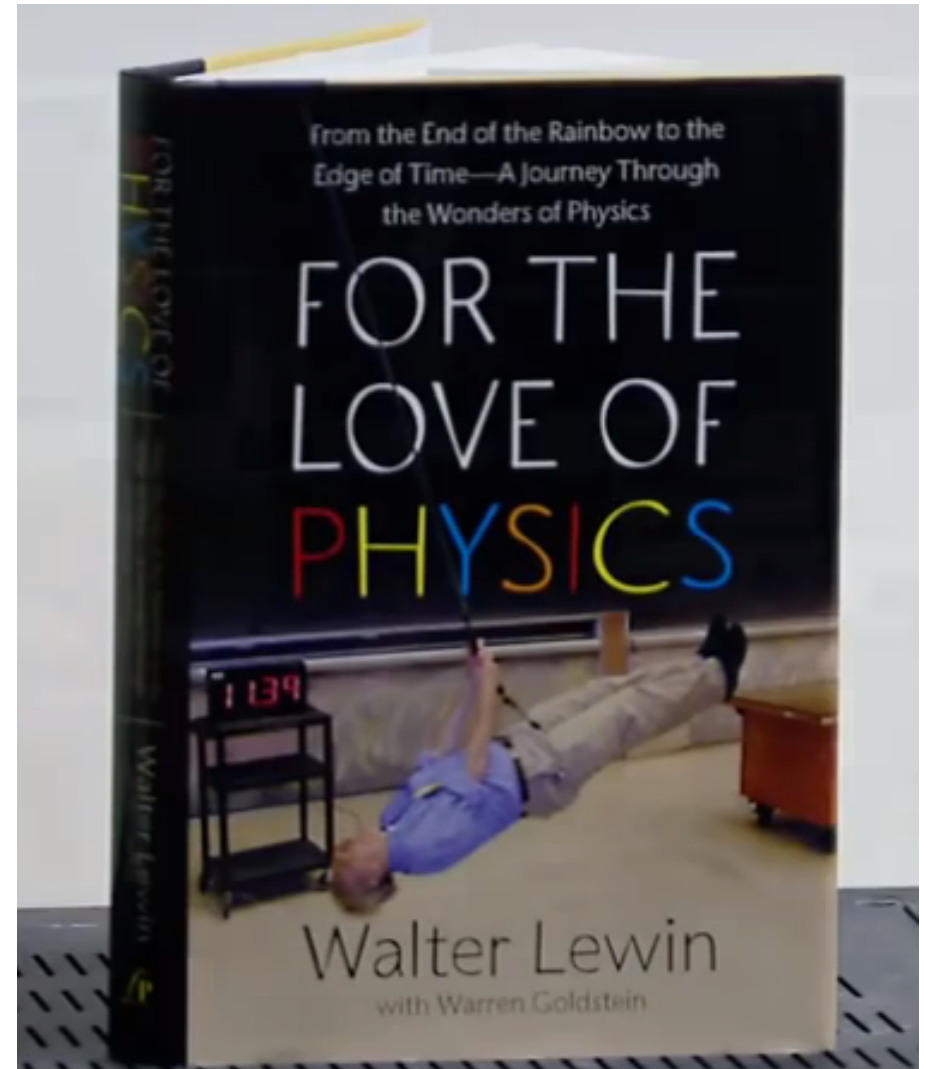


**Paul Dirac:**

Η Υπόθεση των Μεγάλων Αριθμών (1937)

$$G \propto t^{-1}$$

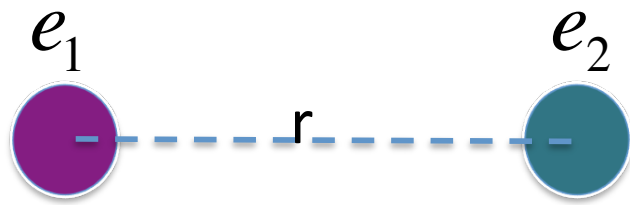
$$q_e^2 \propto t \quad (\text{Gamow})$$



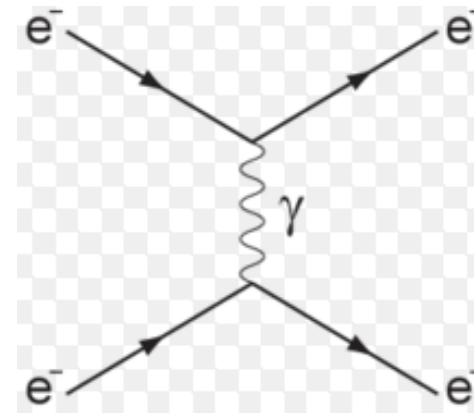
$$m_e c^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 R_e}$$

- **Η Ανθρωπική Αρχή (The Anthropic Principle) :** Η ύπαρξή μας επιβάλλει «αυστηρές» συνθήκες για τις ιδιότητες του Σύμπαντος που θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε και να καταγράψουμε. Επί παραδείγματι, *κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του Σύμπαντος που παρατηρούμε σήμερα, π.χ. το μέγεθός του, φαίνεται ως να είναι συνέπεια του γεγονότος ότι υπάρχουμε .*
- Δεν θα μπορούσαμε να υπάρξουμε σε εποχές όπου στο Σύμπαν δεν είχε δημιουργηθεί ακόμα ο άνθρακας !!!
- Υπάρχουμε σε ένα διαστελλόμενο Σύμπαν όπου ο άνθρακας και τα άλλα βαρέα χημικά στοιχεία δημιουργήθηκαν με πυρηνικές αντιδράσεις στα εσωτερικά των πρώτων, μεγάλων άστρων και διασκορπίστηκαν στο Σύμπαν με τις εκρήξεις supernovae. *Η γη μας δημιουργήθηκε σε αργότερη εποχή, όταν υπήρξε διαθέσιμος άνθρακας.*
- Η σύμπτωση των μεγάλων αριθμών που παρατήρησε ο Dirac, ισχύει για αυτή την εποχή και δεν ισχύει για μικρότερες ηλικίες του Σύμπαντος, π.χ. *εάν κάποιος ένλογο Όν μπορούσε να παρατηρήσει το Σύμπαν όταν απελευθερώθηκαν τα φωτόνια από την ύλη (όταν το Σύμπαν ήταν 370.000 ετών) δεν θα παρατηρούσε αυτή την σύμπτωση !!!*
- Η σύγχρονη Επιστήμονική Γνώση, **για την δόμηση - τις θεμελιώδεις δυνάμεις και την εξέλιξη του Σύμπαντος**, μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι η σύμπτωση των μεγάλων αριθμών, του Dirac, είναι συνέπεια της ακόλουθης απαραίτητης συνθήκης: *« ένα διαστελλόμενο Σύμπαν να περιέχει παρατηρητές φτιαγμένους από άνθρακα » !!!*
- **Εν τούτοις ... Η επιστήμη μας περιγράφει την αντικειμενική πραγματικότητα ή απλώς «σώζει τα φαινόμενα» ;**
- Τι θα λέγαμε για τις τεχνολογικές εφαρμογές ;





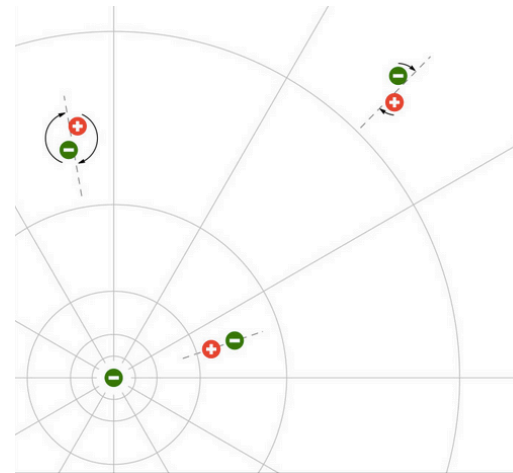
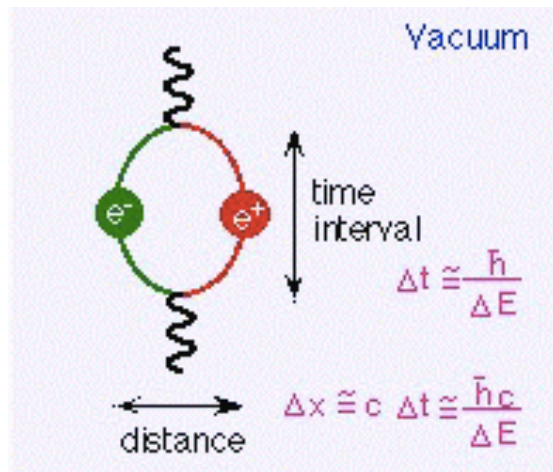
$$|\vec{F}_{el}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_e^2}{r^2}$$

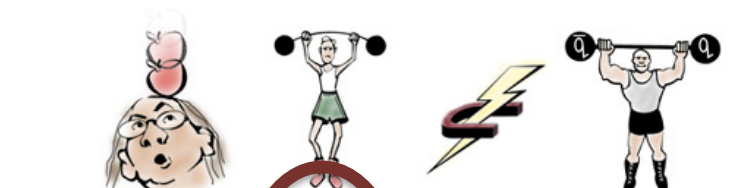


## Renormalization Επανακανονικοποίηση

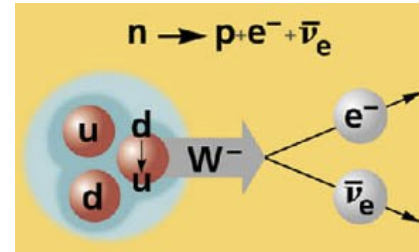


## Φυσικές Ιδιότητες του Κενού !!!

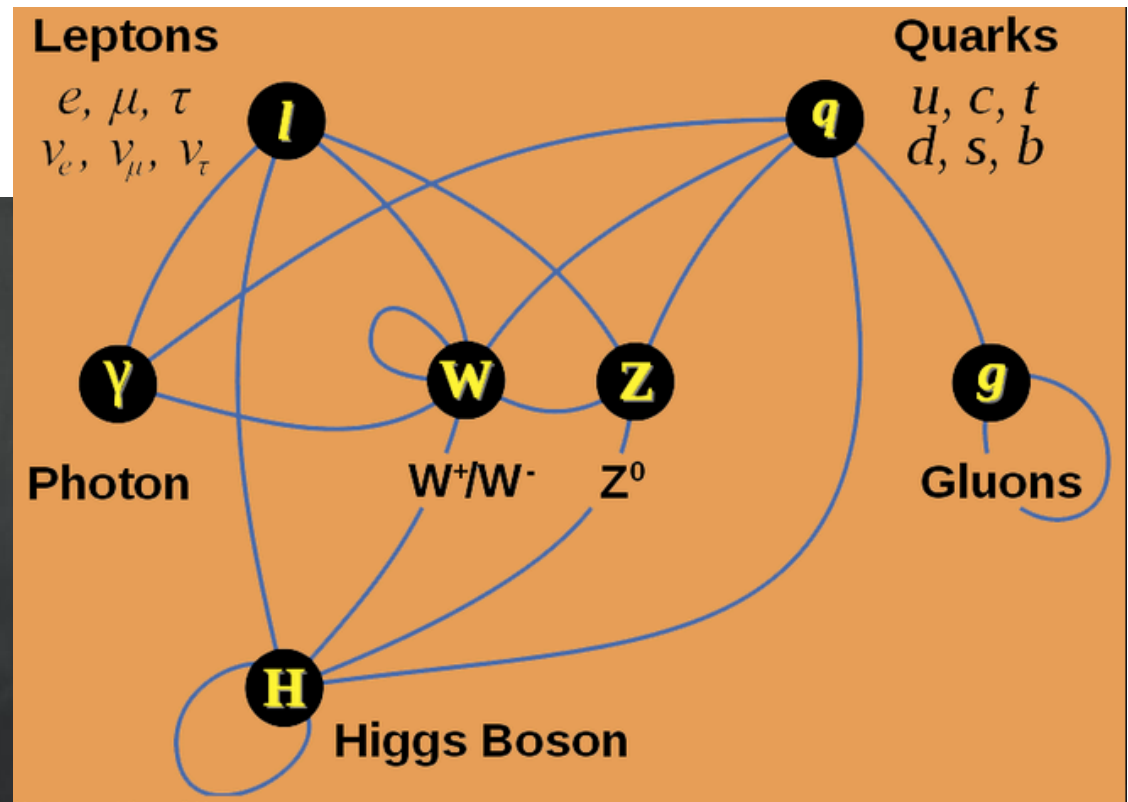
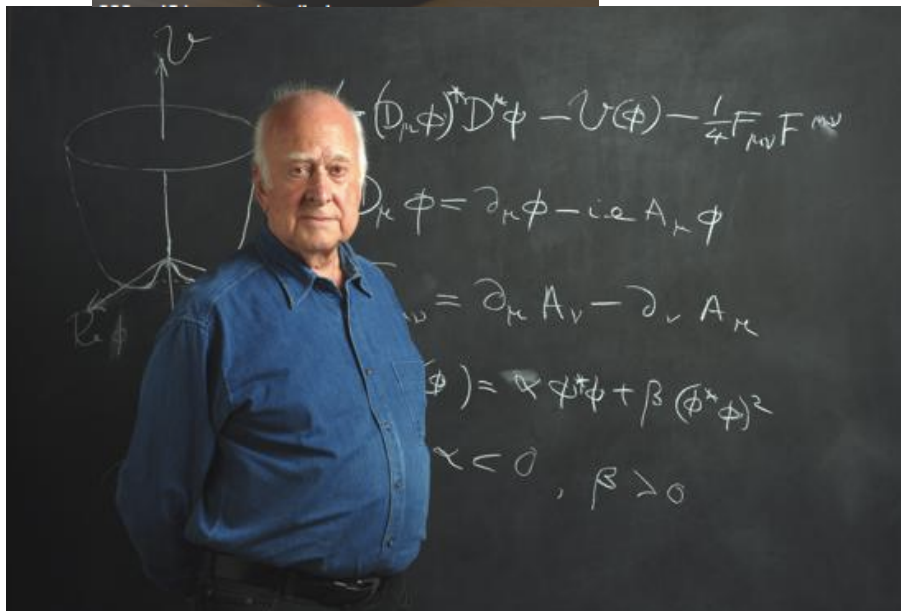
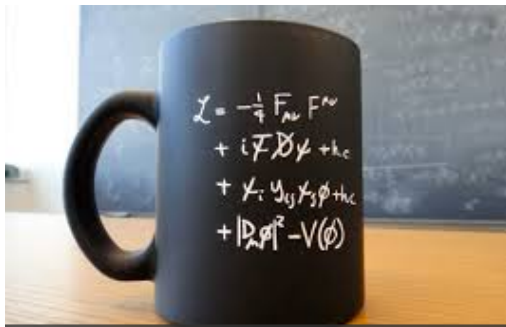




|            | Gravity                        | Weak<br>(Electroweak) | Electromagnetic                          | Strong            |
|------------|--------------------------------|-----------------------|------------------------------------------|-------------------|
| Carried By | Graviton<br>(not yet observed) | $W^+ W^- Z^0$         | Photon                                   | Gluon             |
| Acts on    | All                            | Quarks and Leptons    | Quarks and Charged Leptons and $W^+ W^-$ | Quarks and Gluons |



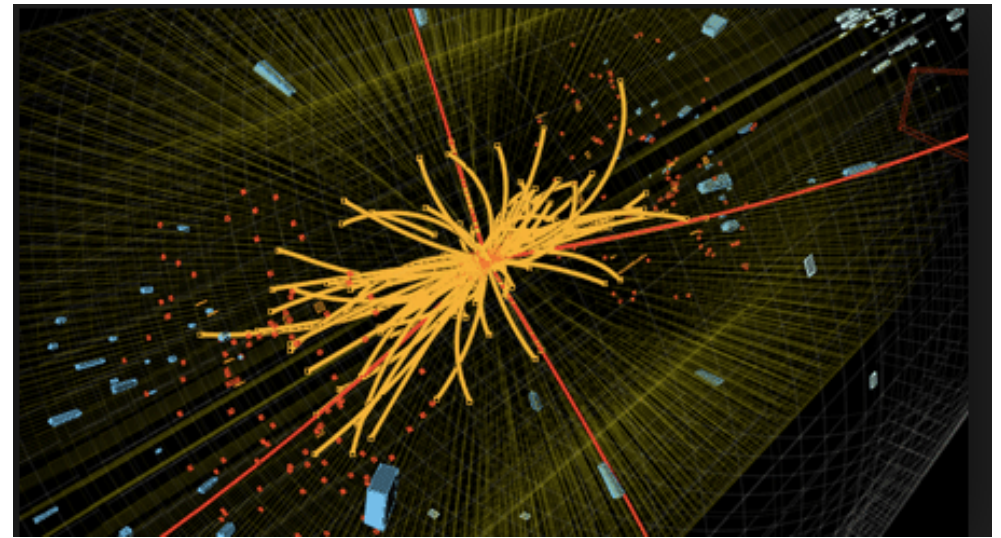
Τι θα συμβεί με την Ασθενή Αλληλεπίδραση, η οποία «φέρεται» μέσω φορέων μη-μηδενικής μάζας ;





Σώζειν τα φαινόμενα ;;;    **Σαφώς ΟΧΙ !**

Η πειραματική ανακάλυψη του **Brout-Englert-Higgs** μποζονίου απέδειξε πως αυτό που κάποιοι χαρακτήρισαν ως «θεωρητικό τέχνασμα προκειμένου να παρακάμψουμε την υπολογιστική μας αδυναμία» στην πραγματικότητα ήταν ένδειξη της θαυμαστής προβλεπτικής ικανότητας της **Ανθρώπινης Επιστήμης !!!**

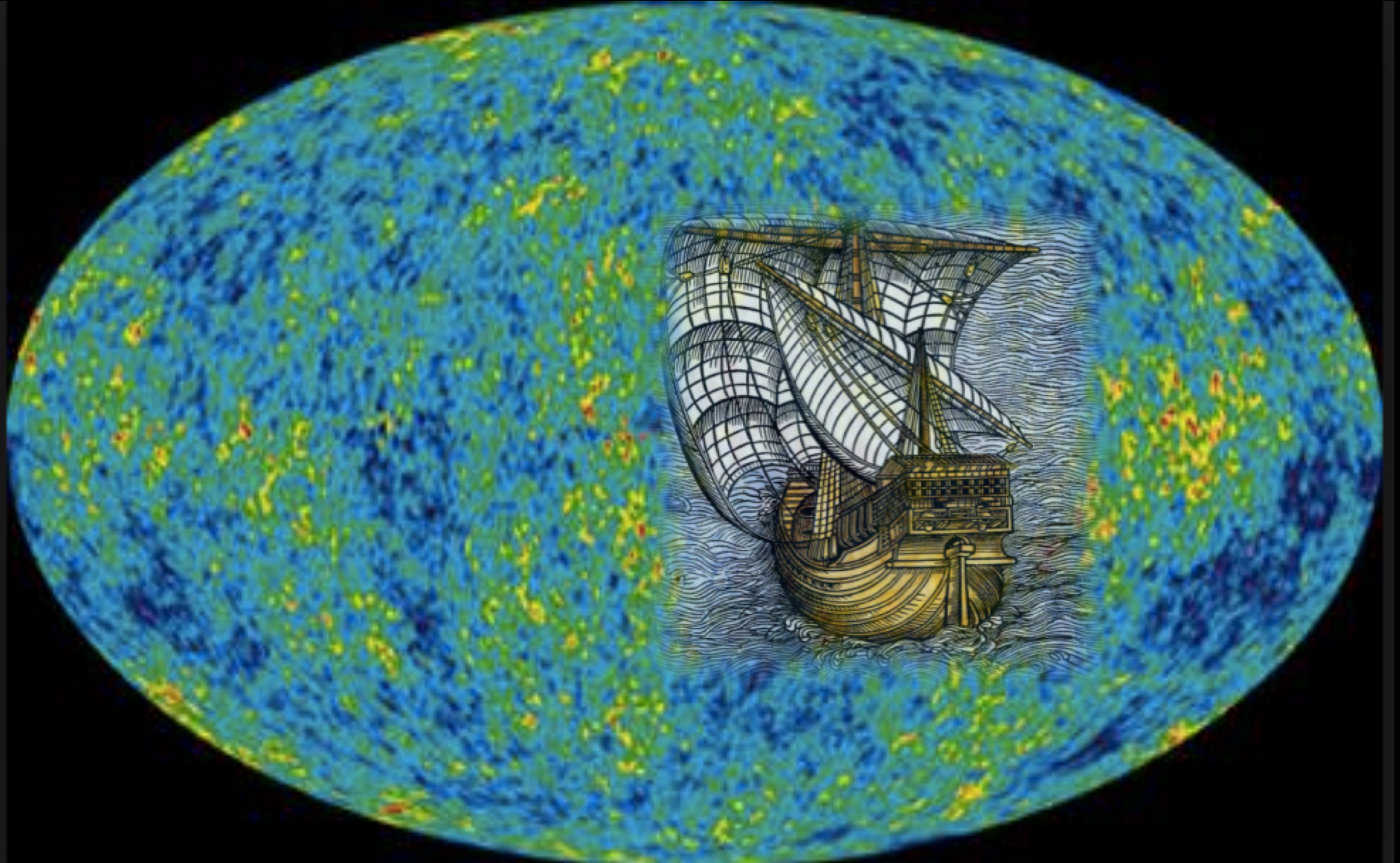


και κάτι περισσότερο...

προσφέρει την αισιοδοξία στις επόμενες γενιές, για την δυνατότητα τους να κατακτήσουν **νέους Κόσμους...** Κόσμους που σήμερα τους θεωρούμε σκοτεινούς, όπως οι παλαιότεροι έβλεπαν σκοτεινές τις άγνωστες Ηπείρους. **Τον Κόσμο της Σκοτεινής Ύλης και εκείνον της Σκοτεινής Ενεργειας**



Ταξιδεύτε να τους κατακτήσετε ...



# 1906: Γνωρίζαμε ήδη ότι τα υλικά είναι φτιαγμένα από άτομα

- Αναλύοντας τα δομένα παρατηρήσεων, φτάσαμε να ξέρουμε ότι υπάρχουν άτομα και κενός χώρος
  - Ατομική θεωρία του Dalton, Avogadro κ.α.

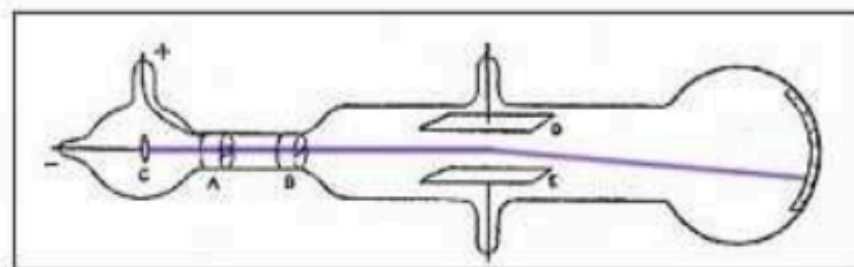
|                                               |                 |                                                  |                                                                                                     |
|-----------------------------------------------|-----------------|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Τα άτομα των<br>92 στοιχείων<br>(19ος αιώνας) | 1. Υδρογόνο (H) | Μάζα $M_H \approx 1.7 \times 10^{-24} \text{ g}$ |  Αυξανόμενη μάζα |
|                                               | 2. Ήλιο (He)    |                                                  |                                                                                                     |
|                                               | 3. Λίθιο (Li)   |                                                  |                                                                                                     |
|                                               | .....           |                                                  |                                                                                                     |
|                                               | .....           |                                                  |                                                                                                     |
|                                               | 92. Ουράνιο (U) | Μάζα $\approx 238 M_H$                           |                                                                                                     |

- 1896 ο Becquerel ανακάλυψε ότι πυρήνες ουρανίου ακτινοβολούν (= εκπέμπουν κάτι) → ραδιενέργεια
- Η προσπάθεια κατανόησης της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας μας έδειξε έναν κουμπμένο κόσμο: τους πυρήνες



# 1906: Γνωρίζαμε ήδη ότι τα άτομα... τεμαχίζονται

- Τα άτομα έχουν δομή = δεν είναι θεμελιώδη
  - J.J Thomson (πειράματα 1894-1897)
    - το ηλεκτρόνιο είναι συστατικό του ατόμου



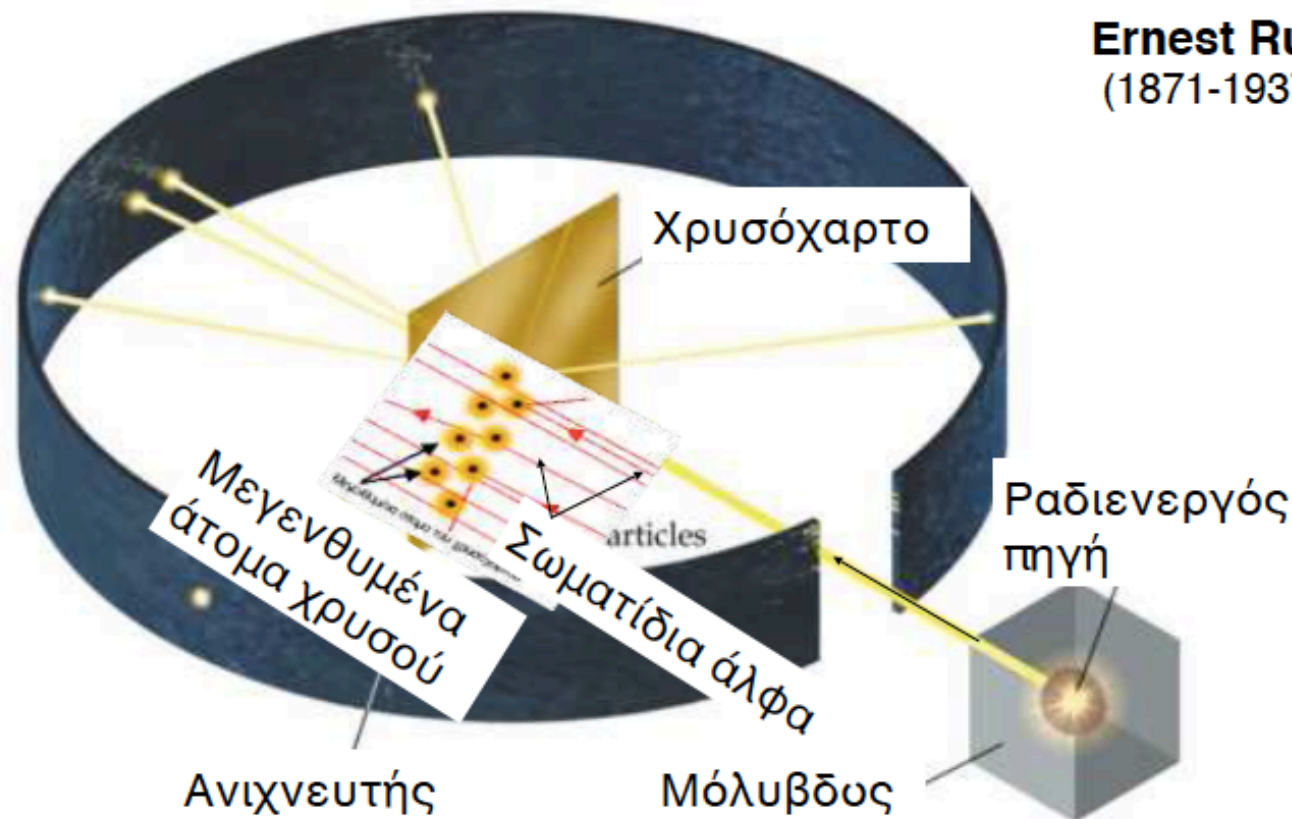
Καθοδικός σωλήνας (*cathode ray tube*)

- Αλλά, τα άτομα είναι ηλεκτρικά ουδέτερα.
- **Ερώτηση: Πώς είναι κατανεμημένα τα ηλεκτρόνια μέσα στο άτομο;**
  - Είναι το άτομο σαν το σταφιδόψωμο;
    - “Σταφίδες” → τα ηλεκτρόνια
    - “Ζύμη” → το θετικό φορτίο

# Απάντηση από πειράματα σκέδασης

- Ο Ernest Rutherford, Hans Geiger και Ernest Marsden, κάνουν πειράματα σκέδασης σωματιδίων άλφα πάνω σε χρυσόχαρτο (1906)

**Ernest Rutherford**  
(1871-1937)



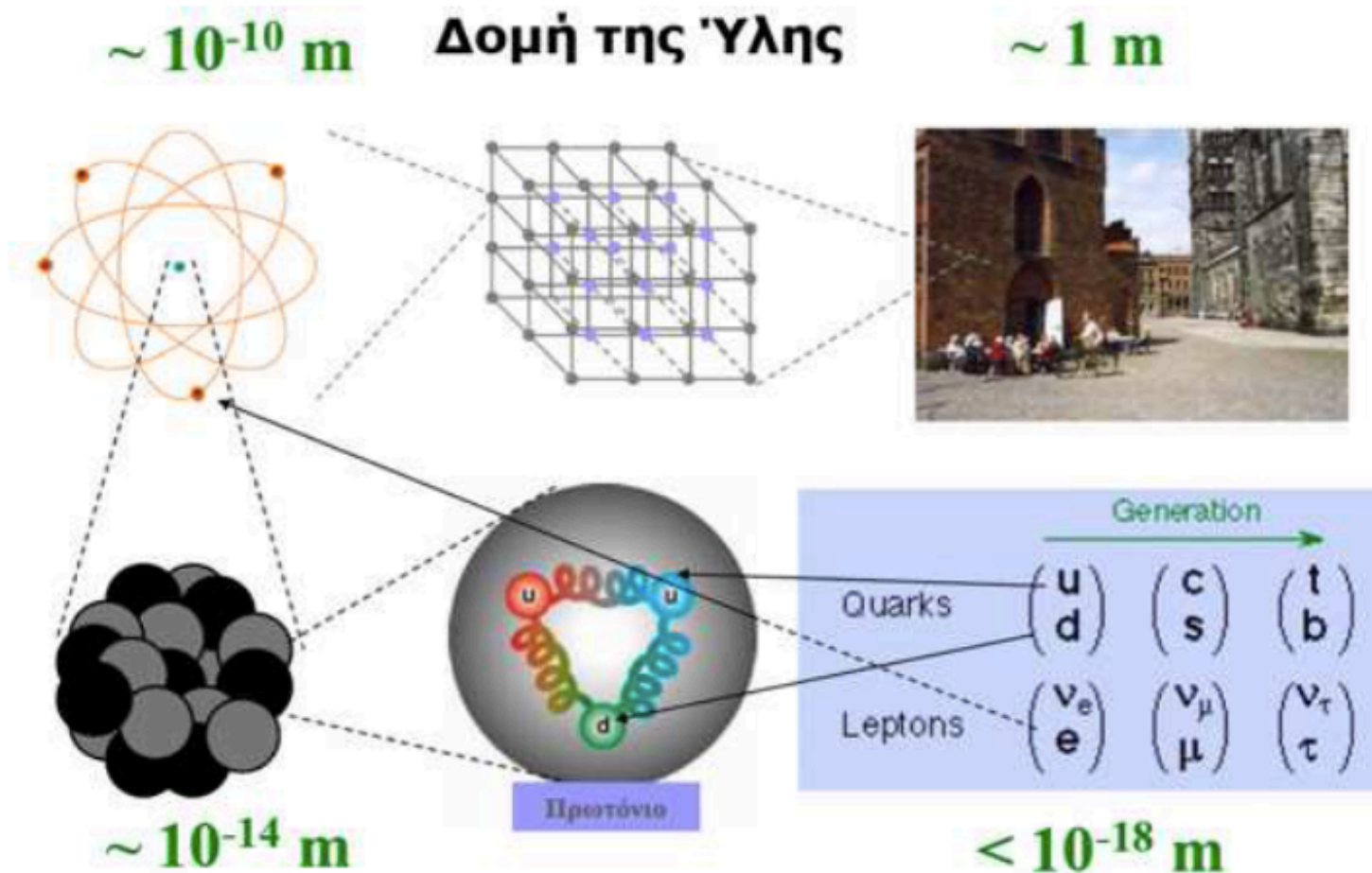
Το άτομο έχει το θετικό του φορτίο συγκεντρωμένο σ' έναν πυρήνα



έτσι εξηγείται η σκέδαση σε μεγάλες γωνίες



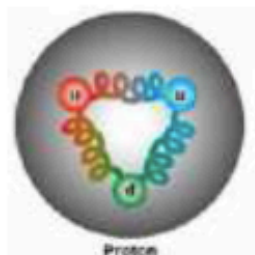
# Μετά από ~100 χρόνια πειραμάτων σκέδασης



# Υπάρχουν και δυνάμεις

## Ισχυρές

Μεταδίδονται με τα  
γκλουόνια



Συγκρατούν τα πρωτόνια και νετρόνια στον πυρήνα  
Συγκρατούν τα quarks στα πρωτόνια και τα νετρόνια

## Βαρυτικές

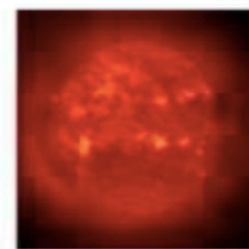
Μεταδίδονται με τα  
γκραβιτόνια



Αναγκάζουν τα αντικείμενα με μάζα να πέφτουν  
Διατηρούν τη γη και τους πλανήτες γύρω από τον ήλιο

## Ασθενείς

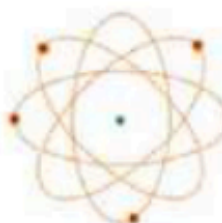
Μεταδίδονται με τα  $W$   
&  $Z^0$



Προκαλούν την διάσπαση των ραδιενεργών πυρήνων  
Διαμορφώνουν την ένταση της ηλιακής ενέργειας

## Ηλεκτρομαγνητικές

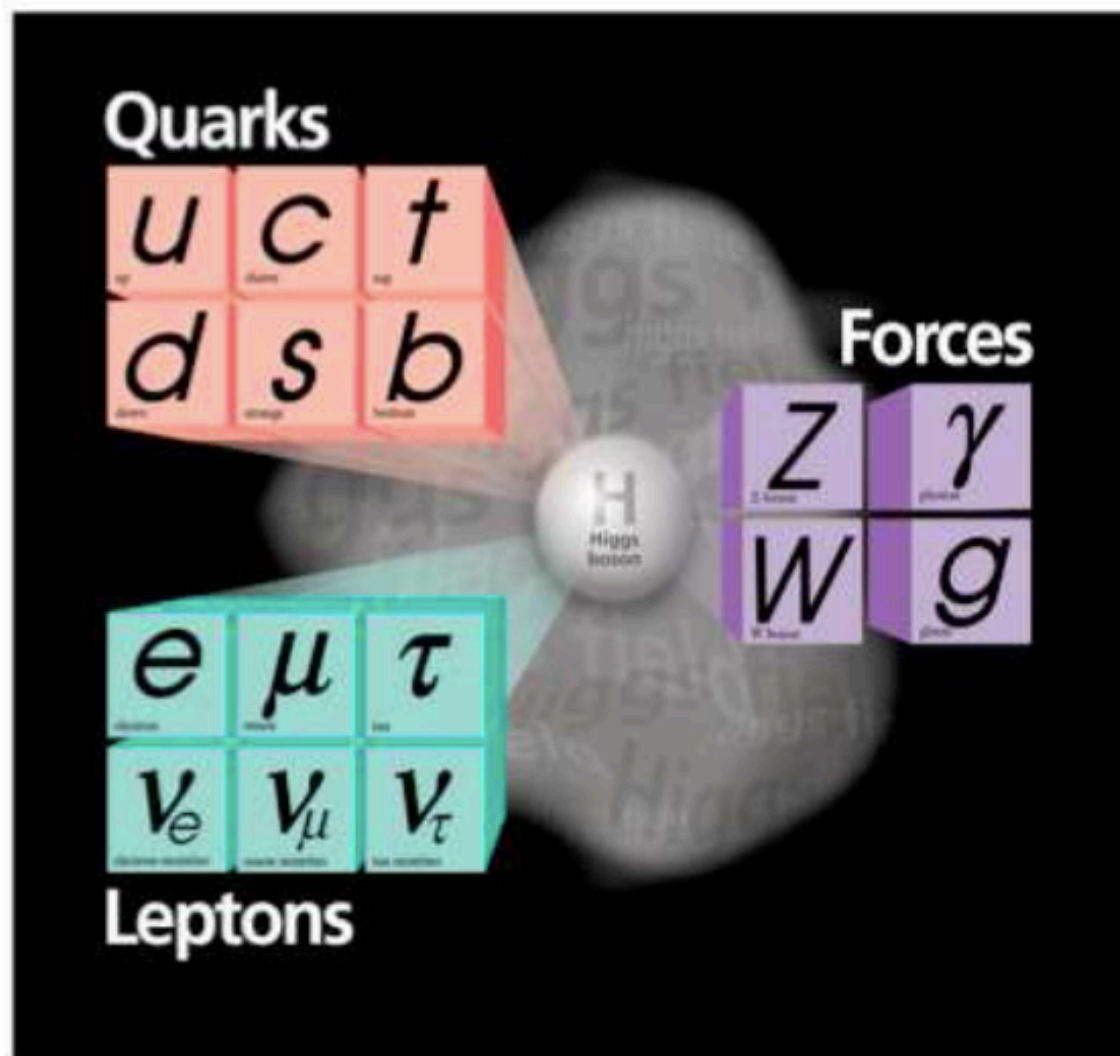
Μεταδίδονται με φωτόνια



Συγκρατούν τα ηλεκτρόνια γύρω από τον πυρήνα  
Ευθύνονται για τις χημικές αντιδράσεις  
Ηλεκτρισμός, Φως, Ακτινοβολία ...

Μετά από ~100 χρόνια πειραμάτων σκέδασης  
Οι δομικοί λίθοι της ύλης

Σωματίδια ύλης



Σωματίδια δυνάμεων



## Νόμοι Διατήρησης

Έστω  $\hat{A}$  ότι είναι τελεστής που αντιστοιχεί σε φυσικό μέγεθος και έστω ακόμα ότι ο τελεστής αυτός δεν εξαρτάται άμεσα (συναρτησιακά) από τον χρόνο, π.χ.  $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_{av} = \left( \frac{d}{dt} \langle \psi | \right) \hat{A} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{A} \left( \frac{d}{dt} | \psi \rangle \right)$$

$$\underline{i\hbar \frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle = \hat{H} | \psi(t) \rangle} \quad \underline{-i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | = \langle \psi(t) | \hat{H}}$$

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_{av} = \frac{i}{\hbar} \{ \langle \psi | \hat{H} \hat{A} | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{A} \hat{H} | \psi \rangle \}$$

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_{av} = \frac{i}{\hbar} \langle \psi | (\hat{H} \hat{A} - \hat{A} \hat{H}) | \psi \rangle$$

$$\hat{A} = \frac{i}{\hbar} (\hat{H} \hat{A} - \hat{A} \hat{H})$$

$$\hat{A} = \frac{i}{\hbar} (\hat{H} \hat{A} - \hat{A} \hat{H}) + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$$

Εάν ο τελεστής αντιμετωπίζεται με την Hamiltonian τότε η φυσική ποσότητα διατηρείται

$$\hat{p} = \frac{i}{\hbar} (\hat{H} \hat{p} - \hat{p} \hat{H})$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right\} \quad \hat{\mathcal{P}}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{\mathcal{H}} \hat{\mathcal{P}} - \hat{\mathcal{P}} \hat{\mathcal{H}} = -i\hbar \frac{dV}{dx}$$

$$\hat{p} = - \frac{dV}{dx}$$

$$\vec{F} = -\nabla V(\vec{r}) = \frac{d\vec{P}}{dt}$$