

β – διάσπαση II

Δήμος Σαμψωνίδης

(30-11-2016)

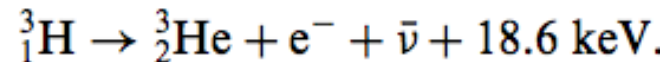
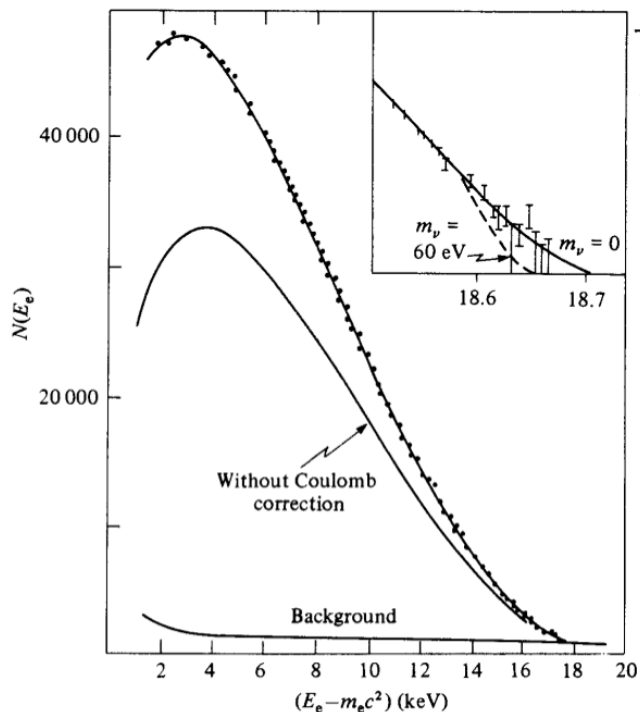
Fermi-Kurie plot (μάζα ν)

Διάγραμμα της ρίζας του αριθμού των σωματίων β με ορμή (ή ενέργεια) μέσα σε μια στενή περιοχή, διά μιας συνάρτησης Fermi ως συνάρτηση της ενέργειας των β.

Είναι ευθεία για επιτρεπτές μεταπτώσεις (και για μερικές απαγορευμένες).

Με fitting των σημείων μπορεί να βρεθεί η $E_{\max}$ των β-σωματιδίων

$$\left[\frac{dR/dE_e}{F(Z_d, E_e)E_e(E_e^2 - m_e^2 c^4)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}} = (\text{constant})(E_0 - E_e)^{\frac{1}{2}}[(E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2 c^4]^{\frac{1}{4}}.$$



$$m_\nu < 4.35 \text{ eV}$$

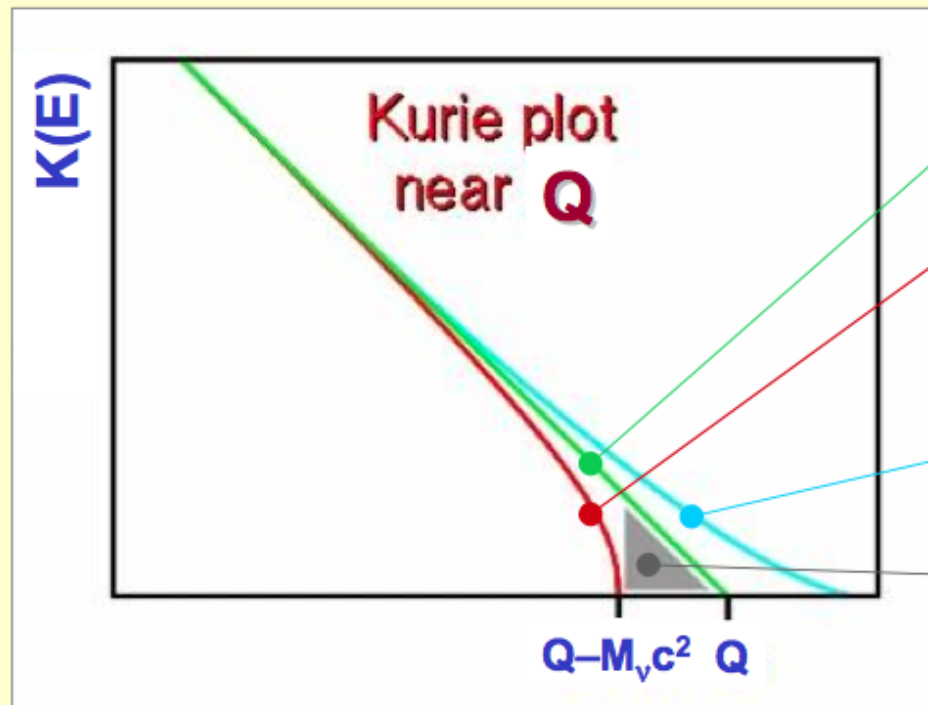
(Belesev, A. I. *et al.* (1995), *Phys. Lett. B* **350**, 263)

Fermi-Kurie plot

Effects of a finite neutrino mass on the Kurie plot

The Kurie plot $K(E_e)$ is a convenient linearization of the beta spectrum

$$K(E) \equiv \left[\frac{\frac{dN}{dE}}{G_F |M_{if}|^2 F(Z, E_e) S(E_e) [1 + \delta_R(Z, E_e)] (E_e + m_e c^2)} \right]^{1/2} \propto \left[(Q - E_e) \sqrt{(Q - E_e)^2 - M_\nu^2 c^4} \right]^{1/2}$$



zero neutrino mass

finite neutrino mass

effect of:

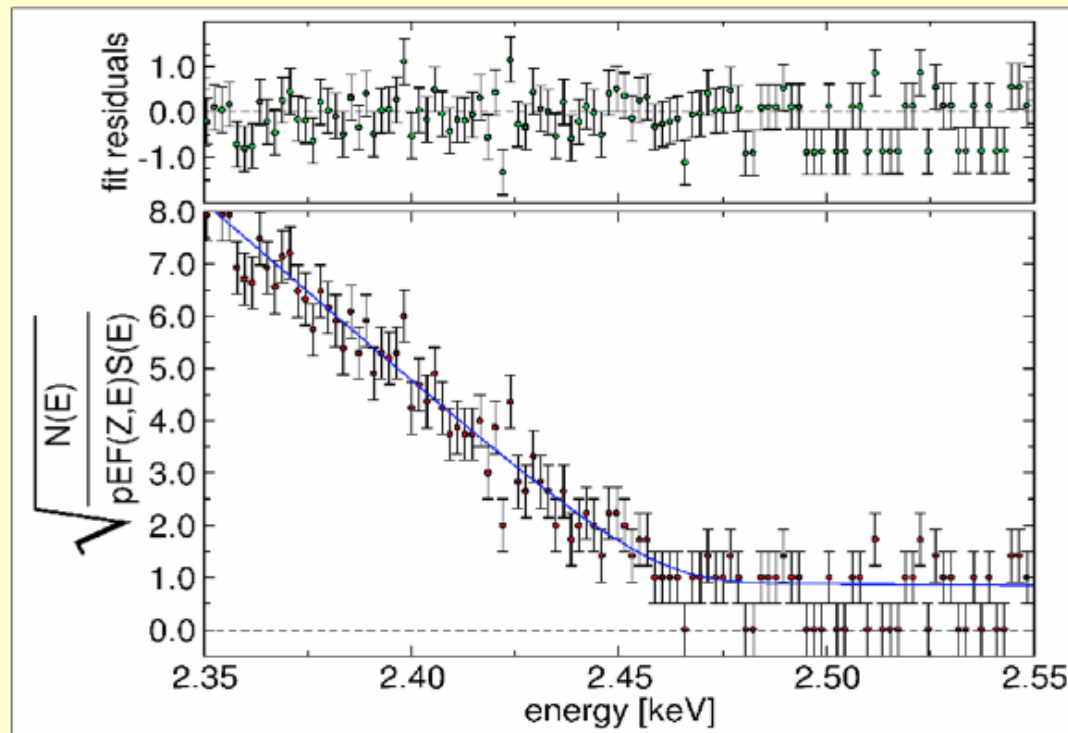
- background
- energy resolution
- excited final states

$$\int_{Q-\delta E}^Q (dN/dE) dE \cong 2(\delta E/Q)^3$$

MIBETA experiment: the neutrino mass

$$M_\nu^2 = -141 \pm 211_{\text{stat}} \pm 90_{\text{sys}} \text{ eV}^2$$

$$M_\nu < 15.6 \text{ eV (90\% c.l.)}$$



Fit parameters

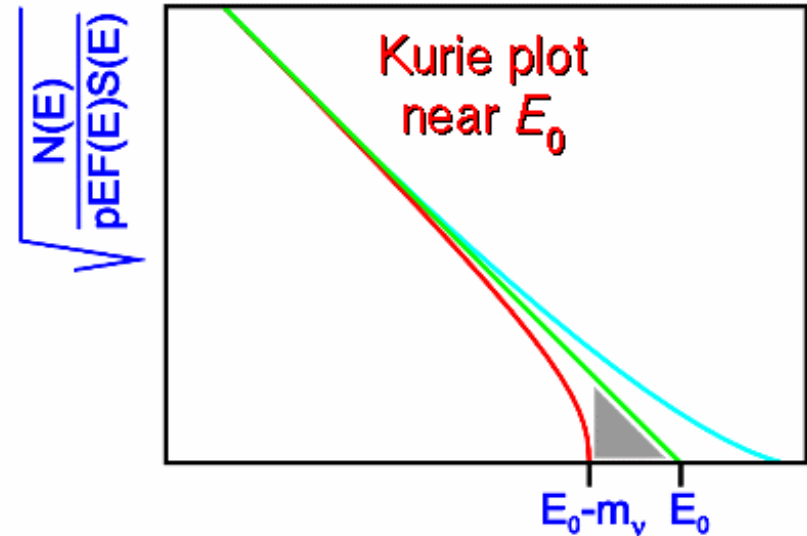
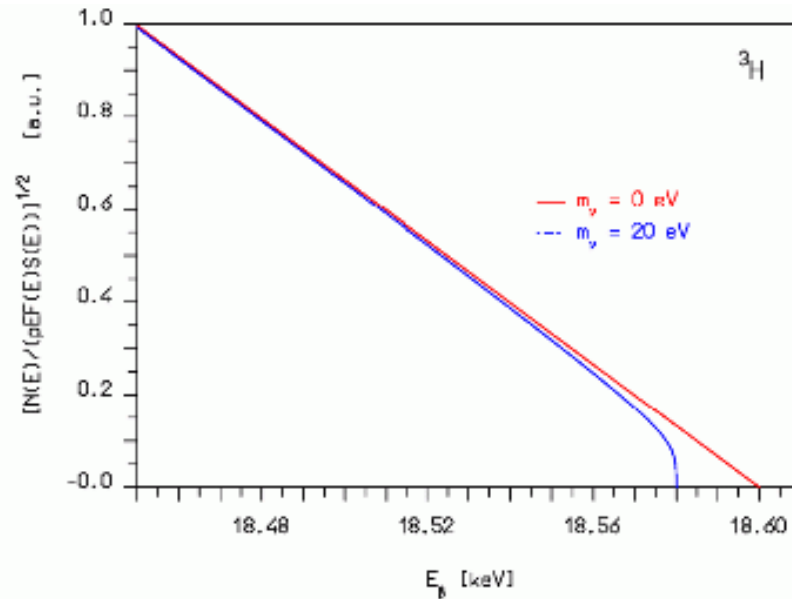
single gaussian:
 $\Delta E_{\text{FWHM}} = 27.8 \text{ eV}$

fitting interval:
0.8 – 3.5 keV

free constant background:
 $6 \times 10^{-3} \text{ c/keV/h}$

free pile-up fraction:
 1.7×10^{-4}

Fermi-Kurie plot



If the neutrino mass is non-zero, then the ideal Kurie spectrum should turn down to the axis as is shown in Fig. 20-6.

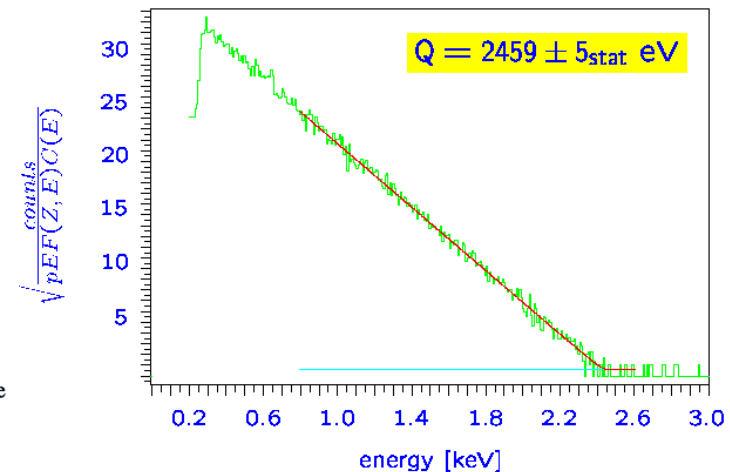
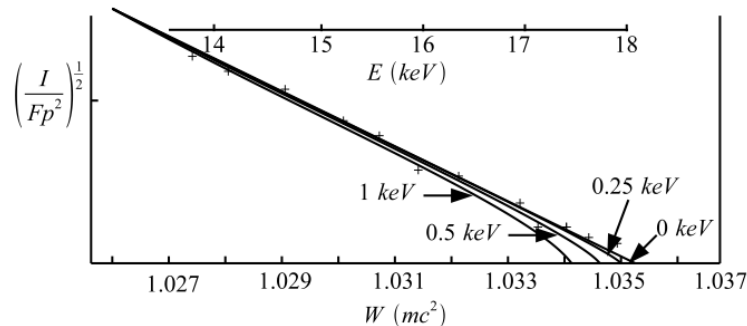


Fig. 20-6 Expanded Kurie plot of the tritium spectrum in the region near the end point. The curves are the theoretical plots expected for the indicated rest mass (in keV) of the neutrino.

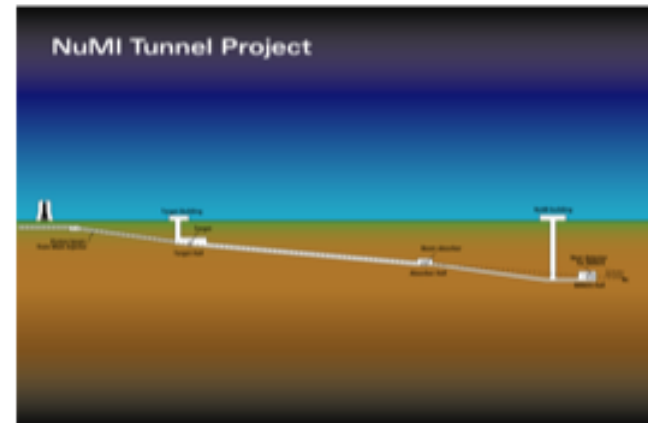
Μάζα ν (ταλαντώσεις ν)

Μάζα ν $\neq 0$

(παρατηρήσαμε “ταλαντώσεις” ν) : ένα είδος νετρίνο μετατρέπεται σε ένα άλλο $\rightarrow$ γίνεται μόνο αν τα νετρίνα έχουν μάζα: άρα έχουν μάζα...



MINOS experiment



This is the most precise measurement of Δm^2 .
The results are: $\Delta m^2_{23} = 2.43^{+0.13}_{-0.13} \text{ eV}^2/c^4$
(90% confidence limit) and
 $\sin^2(2\theta_{23}) > 0.90$ (90% confidence limit)

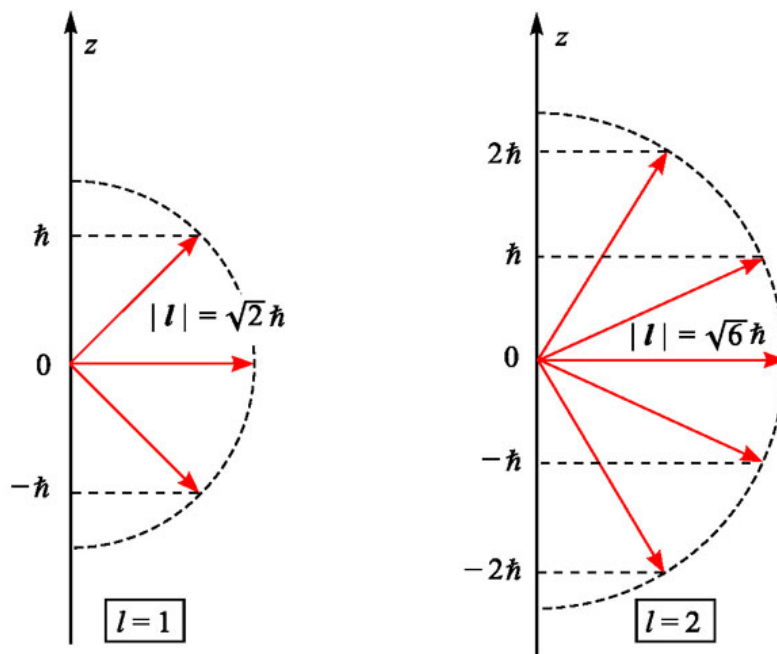
Spin και πάριτυ ενός πυρήνα (J και πάριτυ: J^P)

- Σπιν πυρήνα, J = ολικό τροχιακό σπιν των νουκλεονίων + το άθροισμα των σπιν τους.

$$\vec{J}_{\text{πυρήνα}} \equiv \sum_{\text{νουκλεόνια}} \vec{L} + \sum_{\text{νουκλεόνια}} \vec{S} = \sum_{\text{νουκλεόνια}} (\vec{L} + \vec{S})$$

- Parity = +1 ή -1
- Parity πυρήνα = $(-1)^l$, όπου l = τροχιακή στροφορμή του πυρήνα
- Οπότε για κάθε πυρήνα δίνουμε σπιν (J) και parity (π): J^π π.χ., 2^+

Κβάντωση στροφορμής



$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \text{ όπου : } l = 0, 1, \dots, n-1$$

ΣΧΗΜΑ 9.9: Το κβαντωμένο διάνυσμα της στροφορμής για $\ell = 1$ και $\ell = 2$. Λόγω της κβάντωσης της προβολής του πάνω σε έναν άξονα, το «διάνυσμα» της στροφορμής –αν η σχεδιάσή του ως διανύσματος έχει νόημα– μπορεί να έχει μόνο ορισμένους διακριτούς προσανατολισμούς στον χώρο. Φαινόμενο που αποδίδεται με τον όρο «κβάντωση προσανατολισμού» ή «κβάντωση χώρου». Σημειώστε επίσης –γιατί αυτό είναι το πιο προκλητικό από όλα– ότι το διάνυσμα ℓ ουδέποτε ευθυγραμμίζεται με τον άξονα z . Ακόμα και στην κατάσταση μέγιστης προβολής του σε αυτόν τον άξονα σχηματίζει γωνία μαζί του αφού είναι πάντα $(\ell_z)_{\max} = \hbar\ell < |\ell| = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$.

Άθροισμα
στροφορμών:

$$l_{z(1+2)} = l_{z(1)} + l_{z(2)} \rightarrow |l_1 - l_2| \leq l_{1+2} \leq |l_1 + l_2|$$

Ομοτιμία (parity)

- Κάθε ιδιοκατάσταση της ενέργειας, στροφορμής και σπιν στο άτομο χαρακτηρίζεται από κβαντικούς αριθμούς $\{n, l, s, m_l, m_s\}$.
- **Ο τρόπος που συμπεριφέρεται η αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση σε αναστροφή του χώρου** (που είναι το αποτέλεσμα της εφαρμογής του τελεστή της ομοτιμίας/parity, P , πάνω της) μπορεί να ορίσει κι άλλον έναν κβαντικό αριθμό: την **ομοτιμία ή parity**

$$P(\vec{r}) = -\vec{r} \left\{ \begin{array}{l} P(\psi(\vec{r})) = \psi(-\vec{r}) = \psi(\vec{r}) : \text{άρτια συνάρτηση} \rightarrow \text{Parity} = +1 \\ P(\psi(\vec{r})) = \psi(-\vec{r}) = -\psi(\vec{r}) : \text{περιττή συνάρτηση} \rightarrow \text{Parity} = -1 \end{array} \right.$$

- Κι έτσι γράφουμε το σπίν και την ομοτιμία ως J^π π.χ. κατάσταση $\frac{3}{2}^+$

Parity: η αναστροφή του χώρου και η Αρχή του Pauli

Η απαγορευτική αρχή του Pauli και η μη διακρισιμότητα των ταυτόσημων σωματιδίων στην Κβαντομηχανική

Στην «ρίζα» της γενικευμένης αρχής του Pauli βρίσκεται το θεμελιώδες γεγονός ότι στην Κβαντομηχανική τα ταυτόσημα σωματίδια που ανήκουν στο ίδιο φυσικό σύστημα (π.χ. ένα άτομο) είναι μη διακρίσιμα διότι περιγράφονται από αλληλοεπικαλυπτόμενες κυματοσυναρτήσεις, κι επομένως είναι αδύνατον να πούμε ποιο είναι το #1 ποιο είναι το #2 κ.ο.κ. Αυτή η αδυναμία διάκρισης διασφαλίζεται κβαντομηχανικά μόνο με κύματοσυναρτήσεις $\psi(x_1, x_2)$ που είναι συμμετρικές [$\psi(x_2, x_1) = \psi(x_1, x_2)$] ή αντισυμμετρικές [$\psi(x_2, x_1) = -\psi(x_1, x_2)$] κι επομένως οδηγούν σε πιθανότητα $|\psi(x_1, x_2)|^2$ που είναι συμμετρική στην εναλλαγή $x_1 \leftrightarrow x_2$ κι άρα δεν επιτρέπει τη διάκριση των δύο σωματιδίων.

ΜΕΛΕΤΗ: Σ. Τραχανά, Κβαντομηχανική I, σελ. 468 – 480.

- Όλα τα σωματίδια με ακέραιο σπιν ($s=0, 1, 2, \dots$) - τα αποκαλούμενα **μποζόνια** – περιγράφονται από **συμμετρικές κυματοσυναρτήσεις (Parity = +1)**, ενώ όλα τα σωματίδια με ημι-ακέραιο σπιν ($s=1/2, 3/2, \dots$) - τα αποκαλούμενα **φερμιόνια** – περιγράφονται από **αντισυμμετρικές κυματοσυναρτήσεις (Parity = -1)**
ως προς την εναλλαγή των μεταβλητών τους (=αναστροφή του χώρου)

Σπιν και πάριτυ (J^π) - μοντέλο των φλοιών

- Σπιν πυρήνα, J = ολικό τροχιακό σπίν των νουκλεονίων + το άθροισμα των σπιν τους.

$$\vec{J}_{\text{πυρήνα}} \equiv \sum_{\text{νουκλ.}} \vec{L} + \sum_{\text{νουκλ.}} \vec{S} = \sum_{\text{νουκλ.}} (\vec{L} + \vec{S})$$

- Το ολικό σπίν (J) **άρτιων-άρτιων πυρήνων** έχει βρεθεί ότι είναι 0 και η πάριτυ + : $J^\pi = 0^+$
→ άρα, υπάρχει ισχυρό ζευγάρωμα των σπιν που δίνει άθροισμα 0

- Για **περιττό αριθμό νουκλεονίων**, το ασύζευκτο νουκλεόνιο καθορίζει σπίν και parity του πυρήνα

π.χ., $^{17}_8\text{O}$: $J^\pi = 5/2^+$, σελ. 87 βιβλίου σας. Parity = $(-1)^l$

- Για **περιττούς-περιττούς** πυρήνες, το κάθε αζευγάρωτο πρωτόνιο και νετρόνιο συνεισφέρουν το δικό τους J^π . Το ολικό σπίν είναι το άθροισμα των επι μέρους σπίν σύμφωνα με τους κανόνες άθροισης σπιν, αλλά αν έχουμε πολλές επιλογές δεν έχουμε κάποιον γενικό κανόνα για το ποιο αποτέλεσμα προτιμάται. Η ολική πάριτυ είναι το γινόμενο των επι μέρους πάριτυ.

Σπιν και πάριτυ (J^π) - μοντέλο των φλοιών

Παράδειγμα - Εξηγήστε τα J^π του πίνακα 4.2, με τον πίνακα 5.1 του βιβλίου σας

Table 4.2. *Energies of some light nuclei*

Nucleus	Binding energy (MeV)	Binding energy of last nucleon (MeV)	Binding energy per nucleon (MeV)	Spin and parity
^2_1H	2.22	2.2	1.1	1^+
^3_2H	8.48	6.3	2.8	$\frac{1}{2}^+$
^4_2He	28.30	19.8	7.1	0^+
^5_2He	27.34	-1.0	5.5	$\frac{3}{2}^-$
^6_3Li	31.99	4.7	5.3	1^+
^7_3Li	39.25	7.3	5.6	$\frac{3}{2}^-$
^8_4Be	56.50	17.3	7.1	0^+
^9_4Be	58.16	1.7	6.5	$\frac{3}{2}^-$
$^{10}_5\text{B}$	64.75	6.6	6.5	3^+
$^{11}_5\text{B}$	76.21	11.5	6.9	$\frac{3}{2}^-$
$^{12}_6\text{C}$	92.16	16.0	7.7	0^+
$^{13}_6\text{C}$	97.11	5.0	7.5	$\frac{1}{2}^-$
$^{14}_7\text{N}$	104.66	7.6	7.5	1^+
$^{15}_7\text{N}$	115.49	10.8	7.7	$\frac{1}{2}^-$
$^{16}_8\text{O}$	127.62	12.1	8.0	0^+
$^{17}_8\text{O}$	131.76	4.1	7.8	$\frac{5}{2}^+$

Table 5.1

	x_{nl}	Neutron		Proton	
1s	3.14	$1s_{\frac{1}{2}}$	2	2	$1s_{\frac{1}{2}}$
1p	4.49	$1p_{\frac{3}{2}}$	6	6	$1p_{\frac{3}{2}}$
		$1p_{\frac{1}{2}}$	8	8	$1p_{\frac{1}{2}}$
1d	5.76	$1d_{\frac{5}{2}}$	14	14	$1d_{\frac{5}{2}}$
		$2s_{\frac{1}{2}}$	16	16	$2s_{\frac{1}{2}}$
2s	6.28	$1d_{\frac{3}{2}}$	20	20	$1d_{\frac{3}{2}}$
1f	6.99	$1f_{\frac{7}{2}}$	28		
		$2p_{\frac{3}{2}}$	32	28	$1f_{\frac{7}{2}}$
2p	7.73	$1f_{\frac{5}{2}}$	38		
		$2p_{\frac{1}{2}}$	40	32	$2p_{\frac{3}{2}}$
1g	8.18	$1g_{\frac{9}{2}}$	50	38	$1f_{\frac{5}{2}}$
					2p

- π.χ., $^{17}_8\text{O}$: α) τα 8 πρωτόνια συνεισφέρουν $J^\pi = 0^+$ β) από τα 9 νετρόνια, τα 8 συνεισφέρουν $J^\pi = 0^+$, κι έτσι το ένατο (το αζευγάρωτο) καθορίζει το J^π . Όμως, το ένατο νετρόνιο είναι στον φλοιό $1d_{5/2}$: το d μας λέει ότι $l=2 \rightarrow$ παριτυ $= (-1)^l = (-1)^2 = +1$ και το 5/2 μας λέει ότι $j=5/2$, οπότε αυτό το ασύζευκτο νετρόνιο δίνει: $J^\pi = 5/2^+$ για το $^{17}_8\text{O}$

β-διασπάσεις: “Επιτρεπτές” και “απαγορευμένες”

- Οι αποδιεγέρσεις β κατηγοριοποιούνται σε
- “επιτρεπτές” ή “απαγορευμένες” όσον αφορά τη διατήρηση του σπίν κατά τη διάσπαση:
- “Επιτρεπτές” σημαίνει ότι έχουν πολύ μεγαλύτερη πιθανότητα να γίνουν, σε σχέση με άλλες που είναι πιο σπάνιες και λέγονται “απαγορευμένες”.
- Όσο μεγαλύτερου βαθμού “απαγόρευση” έχει μια διάσπαση, τόσο πιο σπάνιο είναι να γίνει.

Διατήρηση στροφορμής (σπιν)

- Γενικά, με διατήρηση του σπίν, γράφουμε για τη β-διάσπαση:

$$i \rightarrow f + e + \nu \quad \Rightarrow \quad \vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{S}_{ev} + \vec{l}_{ev}$$

Όπου:

- $\vec{J}_i$ και $\vec{J}_f$ είναι το ολικό σπίν του αρχικού και του τελικού πυρήνα, αντίστοιχα,
- $\vec{S}_{ev}$ είναι το ολικό σπίν του συστήματος ηλεκτρονίου-αντινεutrino που μπορεί να είναι 0 ή 1
(αφού συνδυάζω το ηλεκτρόνιο και το αντινεutrino που έχουν σπίν 1/2 το καθένα),
και
- $\vec{l}_{ev}$ είναι η σχετική στροφορμή ηλεκτρονίου-αντινεutrino.

Στροφορμή λεπτονίων

- Θεωρούμε μια διάσπαση με στροφορμή $L=1\hbar$
- Εστω ότι η διάσπαση συμβαίνει στην επιφάνεια του πυρήνα σε απόσταση $r=5\text{fm}$
- Ποια η επίδραση στην ενέργεια των λεπτονίων?

Για τη μέγιστη στροφορμή για την εκπομπή σε απόσταση 5fm :

$$L = rp \implies p = \frac{L}{r} \implies E = pc = \frac{Lc}{r}$$

$$E = \frac{\hbar c}{r} = \frac{197 [\text{MeV fm}]}{5 [\text{fm}]} \approx 20 [\text{MeV}]$$

Αυτό συνεπάγεται ότι τα λεπτόνια εκπέμπονται με σχεδόν μηδενική στροφορμή

Στροφορμή λεπτονίων (II)

- Τα λεπτόνια (e και νεutrίνο) είναι ελαφρά
- Η στροφορμή των λεπτονίων μπορεί $L \neq 0$ αν:
 - Εκπέμπονται με μεγάλη ενέργεια, αλλά η μέγιστη ενέργεια εκπομπής = Q
 - Εκπέμπονται από μεγάλη απόσταση (ακτίνα r), είναι πιθανό καθώς η κατανομή της πυκνότητας του πυρήνα επεκτείνεται πέρα από την ακτίνα r , αλλά με μικρή πιθανότητα.
- Οι β διασπάσεις με μεγάλους ρυθμούς (μικρούς τ) είναι διαδικασίες με $L=0$, ενώ οι διαδικασίες με $L=1$, $L=2$ και $L=3$ είναι πιθανές αλλά με μεγάλους χρόνους ζωής.

Μεταβολή σπιν μεταξύ αρχικού και τελικού πυρήνα και σχετική τροχιακή στροφορμή ηλεκτρονίου-νετρίνο

Οπότε γράφουμε: $\vec{J}_i - \vec{J}_f = \vec{S}_{ev} + \vec{l}_{ev} \longrightarrow \Delta J = \vec{S}_{ev} + \vec{l}_{ev}$

όπου η μεταβολή ΔJ του σπιν (αρχικού πυρήνα - τελικού) μπορεί να έχει μέτρο οποιαδήποτε τιμή μέσα στα όρια:

$$|J_i - J_f| \leq \Delta J \leq |J_i + J_f|$$

και το ολικό σπιν ηλεκτρονίου-νετρίνο (καθένα με σπιν 1/2):

$$|1/2 - 1/2| \leq S_{ev} \leq |1/2 + 1/2| \rightarrow S_{ev} = 0 \text{ ή } 1$$

Όσο μικρότερο το $\vec{l}_{ev}$ τόσο πιο εύκολα γίνεται η μετάβαση
(δηλ. τόσο πιο “επιτρεπτή” είναι).

Οπότε, από όλα τα ΔJ , το πιο πιθανό είναι αυτό με τη μικρότερη τιμή, δηλαδή το $|J_i - J_f|$

Επιτρεπτές μεταπτώσεις: Fermi ή Gamow-Teller ανάλογα με $S_{ev}=0$ ή 1

ΚΑΝΟΝΑΣ #1: Οι επιτρεπτές μεταπτώσεις έχουν

$$\vec{l}_{ev} = 0$$

Αν:

- $S_{ev}=0$ (που έχει μόνο έναν τρόπο να γίνει, $S_z=0$), τότε η β-διάσπαση/μετάπτωση λέγεται **μετάπτωση Fermi**.
- $S_{ev}=1$ (που έχει τρεις τρόπους να γίνει, έναν με $S_z = +1$, έναν με $S_z = 0$, έναν με $S_z = -1$),
τότε η β-διάσπαση/μετάπτωση λέγεται **μετάπτωση Gamow-Teller**.

Οπότε αφού το σπίν διατηρείται, σύμφωνα με τα παραπάνω, το ΔJ στις επιτρεπτές β-διασπάσεις είναι 0 ή 1, όσο και το S_{ev} .

Επιτρεπτές μεταπτώσεις: μεταβολή της parity

Εκτός από το σπιν, έχουμε να σκεφτούμε και την πάριτυ.

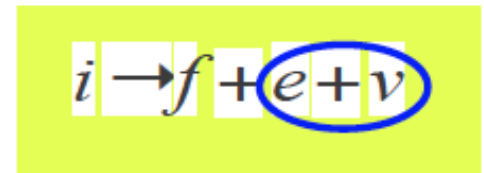
Η πάριτυ του συστήματος ηλεκτρονίου-αντινεutrino είναι:

$$(-1)^{l_{ev}}$$

που για τις επιτρεπτές μεταπτώσεις ($l_{ev}=0$) δίνει:

$$(-1)^{l_{ev}} = (-1)^0 = +1$$

Άρα, επειδή: $\text{Parity}(i) = \text{Parity}(f) * \text{Parity}(ev)$,



$$\pi_p = \pi_d (-1)^l \rightarrow \Delta\pi = \pi_p \pi_d = (-1)^l$$

Όπου l η στροφορμή του συστήματος ηλεκτρονίου-αντινεutrino

Επιτρεπτές μεταπτώσεις: μεταβολή της parity

ΚΑΝΟΝΑΣ #2:

οι επιτρεπτές μεταπτώσεις [που έχουν $l_{ev} = 0$, και άρα έχουν $\text{Parity}(ev) = (-1)^0 = +1$] δεν έχουν μεταβολή της párity μεταξύ αρχικού και τελικού πυρήνα.

Απαγορευμένες β-διασπάσεις

- Όταν **δεν έχουμε** $\Delta J = 0$ ή 1 και $\Delta \text{πάριτυ} = \Delta \pi = +1$, τότε η β-διάσπαση είναι **απαγορευμένη**.
- **Ερώτηση:** Μια απαγορευμένη μετάπτωση (δηλαδή που δεν είναι $\Delta J^{\Delta \pi} = 1^+$ ή $\Delta J^{\Delta \pi} = 0^+$),
 - **τι τάξης απαγορευμένη είναι;**
 - **Απάντηση:**
 - **όση η ελάχιστη τιμή της I_{ev} που μας χρειάζεται για να εξηγήσουμε τη μετάπτωση που μας δίνεται.**
- Βρίσκουμε την τιμή αυτή δοκιμάζοντας:
 - 1) ποιά I_{ev} χρειάζεται (άρτιο ή περιττό) για να εξηγήσει την $\Delta \text{πάριτυ}$, και
 - 2) πόσο να είναι αυτό το I_{ev} για να μας δώσει το ΔJ (σε συνδυασμό με το $S_{ev} = 0$ ή 1)

Τάξη β-διάσπασης

- Οπότε:

- **ΚΑΝΟΝΑΣ #3:**

- η τάξη της β-διασπασης είναι το μικρότερο I_{ev} που εξηγεί και την μεταβολή της παριτυ [$\Delta\text{παριτυ} = (-1)^I$] και τη μεταβολή του σπιν ΔJ μεταξύ αρχικού και τελικού πυρήνα.

- Αν αυτό το I είναι το $I=0$, τότε η β-διάσπαση ονομάζεται **επιτρεπτή**,
• αλλιώς ονομάζεται **απαγορευμένη τάξης I** .

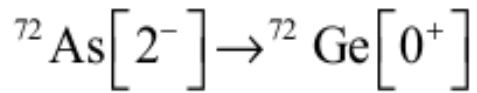
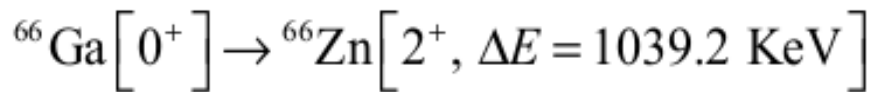
(“απαγορευμένη” λέγεται γιατί έχει πολύ μικρότερη πιθανότητα να γίνει, σε σχέση με την “επιτρεπτή”)

β διασπαση

Type	L	$\Delta\pi$	$\Delta\vec{J}$	
			$\vec{S} = \vec{0}$ Fermi	$\vec{S} = \vec{1}$ Gam-Tel
super-allowed	0	+	0	0
allowed	0	+	0	0,1
first forbidden	1	-	0,1	0,1,2
second forbidden	2	+	1,2	1,2,3
third forbidden	3	-	2,3	2,3,4

Άσκηση: αντιδράσεις β-διάσπασης: Q-values, επιτρεπτές, τάξη απαγόρευσης

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω διασπάσεις β (π.χ. απαγορευμένες ή όχι, β^+ ή ϵ , κλπ.) και υπολογίστε τις τιμές Q



Για να βρίσκετε τις ατομικές μάζες των στοιχείων που σας χρειάζονται, χρησιμοποιείτε:

$$M(A,Z) = 931.478 * A + \Delta \text{ (MeV)},$$

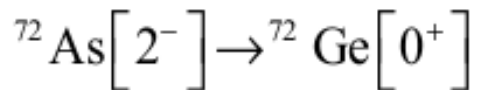
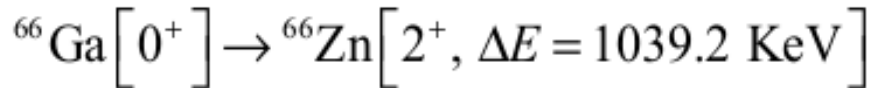
Όπου το Δ το βρίσκεται για κάθε στοιχείο και τα ισότοπά του στο:

http://skiathos.physics.auth.gr/atlas/Nuclear_Physics/wallarge.pdf

- $\Delta(^{66}\text{Ga}) = -63.724 \text{ MeV}$, $\Delta(^{66}\text{Zn}) = -68.899 \text{ MeV}$
- $\Delta(^{72}\text{As}) = -68.230 \text{ MeV}$, $\Delta(^{72}\text{Ge}) = -72.586 \text{ MeV}$
- $m(e) = 0.511 \text{ MeV}$, $m(\nu) = 0$

Άσκηση – σημείωση για επιτρεπτή ή όχι

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω διασπάσεις β (π.χ. απαγορευμένες ή όχι, β^+ ή ϵ , κλπ.) και υπολογίστε τις τιμές Q

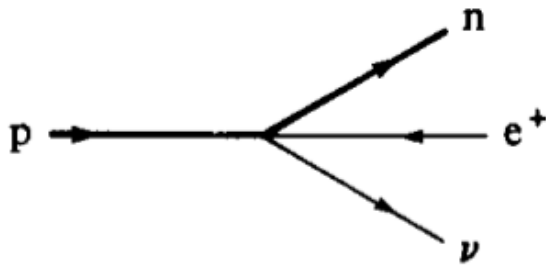


- με $\Delta J^{\Delta\pi} = 2^+$ έχουμε αναγκαστικά $l=\text{άρτιο}$ γιατί $(-1)^l = +1$.
 - Αφού το S_{ev} γίνεται το πολύ $S_{\text{ev}}=1$, δεν μπορεί να γίνει η μετάβαση με $l=0$.
 - $\rightarrow$ Άρα **δεν είναι επιτρεπτή η μετάβαση**.
 - * Η επόμενη άρτια τιμή είναι $l=2$. Με $S=0$, δίνουν $\Delta J=2$. Με $S=1$, δίνουν από $\Delta J = 2-1 = 1$ μέχρι και $2+1=3$,
- $\rightarrow$ οπότε το $l=2$ (και με $S=0$ και με $S=1$) μπορεί να εξηγήσει το $\Delta J=2^+$
- $\rightarrow$ “απαγορευμένη” 2ης τάξης

β-διάσπαση

Enrico Fermi:

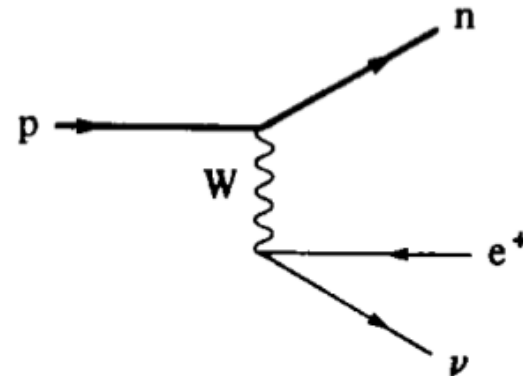
*θεωρία της β- διάσπασης. Θεωρεί ότι
τα σωματΙΑ που αλληλεπιδρούν ότι
βρίσκονται στο ίδιο σημείο*



Αλληλεπίδραση επαφής

Σύγχρονη εικόνα.

*Η β- διάσπαση προκαλείται από την
ασθενή δύναμη, που σημαίνει
αλληλεπίδραση μέσω ανταλλαγής
ένος σωματιδίου W*



Αλληλεπίδραση με ανταλλαγή W

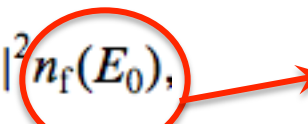
Θεωρία Fermi

Fermi (1934) : απλή θεωρία,
 περιγράφει τα φάσματα,
 εξηγεί ποιοτικά τους μέσους χρόνους ζωής τ ,
 αλλά δεν επιτρέπει την παραβίαση της ομοτιμίας

Θεωρεί ότι τα σωματίδια που
 αλληλεπιδρούν βρίσκονται
 στο ίδιο σημείο

• Αρχική κατάσταση $\Psi_0 = \psi_p(\mathbf{r}_p)$

• Τελική κατάσταση $\Psi_f = \psi_n(\mathbf{r}_n)\psi_e(\mathbf{r}_e)\psi_\nu(\mathbf{r}_\nu)$

• Ο ρυθμός μεταπτώσεων $= \frac{2\pi}{\hbar} |H_{f0}|^2 n_f(E_0)$,  $n_f(E_0) = dn/dE$: πυκνότητα των
 τελικών καταστάσεων

• Όπου H_{f0} το στοιχείο πίνακα της αλληλεπίδρασης $H_{f0} = \int \Psi_f^* H \Psi_0 d^3\mathbf{r}_n d^3\mathbf{r}_p d^3\mathbf{r}_e d^3\mathbf{r}_\nu$
 και H η χαμιλτονιανή για τη μετάπτωση από την κατάσταση $0 \rightarrow f$

$$H_{f0} = G_w \int \psi_n^*(\mathbf{r}) \psi_e^*(\mathbf{r}) \psi_\nu^*(\mathbf{r}) \psi_p(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r},$$

οπου G_w η σταθερά Fermi, μέτρο της ισχύος της ασθενούς αλληλεπίδρασης

Θεωρία Fermi

Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor

$$H_{f0} = \frac{G_w}{V} \int \psi_n^*(\mathbf{r}) \psi_p(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} - \frac{iG_w}{V} (\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_v) \cdot \int \psi_n^*(\mathbf{r}) \mathbf{r} \psi_p(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} + \dots$$

Επιτρεπτές μεταπτώσεις: ο πρώτος όρος $\neq 0$

Απαγορευμένη α' τάξης : ο πρώτος όρος $= 0$, δεύτερος $\neq 0$

Απαγορευμένη β' τάξης : ο πρώτος όρος = δεύτερος $= 0$, τρίτος $\neq 0$

.....

Οι ρυθμοί διάσπασης των καταστάσεων εξαρτώνται από την τάξη απαγόρευσης,
(η οποία εξαρτάται από τη μεταβολή του *spin*)

Θεωρία Fermi (φάσματα e^+ , e^-)

Έστω β -διάσπαση όπου το e με ενέργεια E_e (σχετικιστική).

$$E_0 = E_e + E_\nu$$

Ο ρυθμός μεταπτώσεων που καταλήγουν σε ενέργειες από E_e μέχρι $E_e + dE_e$

$$dR = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{f0}|^2 n_\nu(E_0 - E_e) n_e(E_e) dE_e.$$

Η σχετικιστική πυκνότητα καταστάσεων ενός σωματίου μάζας m

$$n(E) dE = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{\hbar^3 c^3} (E^2 - m^2 c^4)^{\frac{1}{2}} E dE$$

Τελικά
$$dR = \frac{G_w^2 |M_F|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} S_0(E_e) dE_e$$

όπου
$$S_0(E_e) = [(E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2 c^4]^{\frac{1}{2}} (E_0 - E_e) (E_e^2 - m_e^2 c^4)^{\frac{1}{2}} E_e.$$

Ο ρυθμός μεταπτώσεων εξαρτάται από την ενέργεια του e^- (e^+).

Αν λάβουμε υπόψη την αλληλεπίδραση με το πεδίο Coulomb του θυγατρικού

$$(Z_d S_c(E_e) = F(Z_d, E_e) S_0(E_e), \quad \text{όπου} \quad F(Z_d, E_e) = \left| \frac{\psi_e(Z_d, 0)}{\psi_e(0, 0)} \right|^2$$

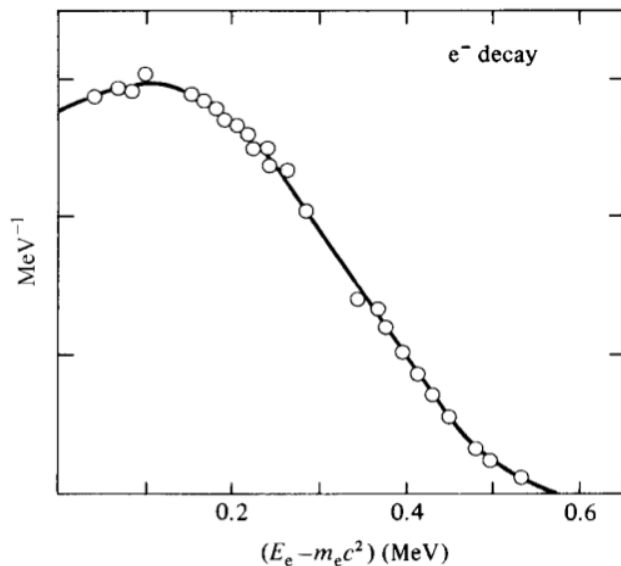
Θεωρία Fermi(φάσματα e^+ , e^-)

Η σχέση $F(Z_d, E_e) = \left| \frac{\psi_e(Z_d, 0)}{\psi_e(0, 0)} \right|^2$ προσεγγίζεται ως $F(Z, E_e) = \frac{2\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}}$
 όπου $\eta = \pm Z_d e^2 / 4\pi\epsilon_0 \hbar v$ (-για e^- , +για e^+)

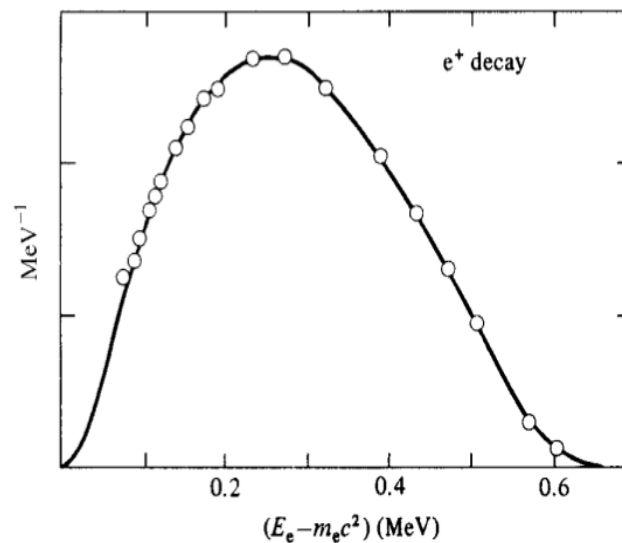
$$dR = \frac{G_w^2 |M_F|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} F(Z_d, E_e) S_0(E_e) dE_e \rightarrow$$

$$dR = \frac{G_w^2 |M_F|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} S_0(E_e) \frac{2\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}} dE_e$$

Για e^-
 $u \rightarrow 0$ $F(Z, E_e) \rightarrow 2\pi\eta$, το $S_c \neq 0$
 πεδίο Coulomb ελκτικό



Για e^+ $F(Z, E_e) \rightarrow 2\pi|\eta|e^{-2\pi|\eta|}$
 πεδίο Coulomb απωστικό



Σύλληψη ηλεκτρονίου

Θεωρώντας ότι η μετάπτωση είναι επιτρεπτή καταλήγουμε :

$$H_{f0} = \frac{G_w}{V^{\frac{1}{2}}} \psi_e(0) \int \psi_n^*(\mathbf{r}) \psi_p(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \frac{G_w}{V^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{Z m_e e^2}{4 \pi \epsilon_0 \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} M_F$$

Αγνοώντας την ανάκρουση του πυρήνα και θεωρώντας $m_\nu=0$ παίρνουμε

$$n_\nu(E_\nu) = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{\hbar^3 c^3} E_\nu^2 = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{f0}|^2 n_\nu(E_\nu)$$

και ρυθμό διασπάσεων σύλληψης

$$= \frac{G_w^2 |M_F|^2 E_\nu^2}{\pi^2 \hbar^4 c^3} \left(\frac{Z m_e e^2}{4 \pi \epsilon_0 \hbar^2} \right)^3$$

$$\frac{R_K}{R_{e^+}} = 2\pi \left(\frac{E_\nu}{m_e c^2} \right)^2 \left(\frac{Z}{137} \right)^3 \frac{1}{f(Z_d, E_0)}$$

Για μεγάλα Z η σύλληψη ηλεκτρονίου
προεξάρχει

Άσκηση 1

Το ισότοπο του άνθρακα $^{14}_6\text{C}$ παράγεται από πυρηνικές αντιδράσεις των κοσμικών ακτίνων στην ατμόσφαιρα. Διασπάται δίνοντας $^{14}_7\text{N}$.

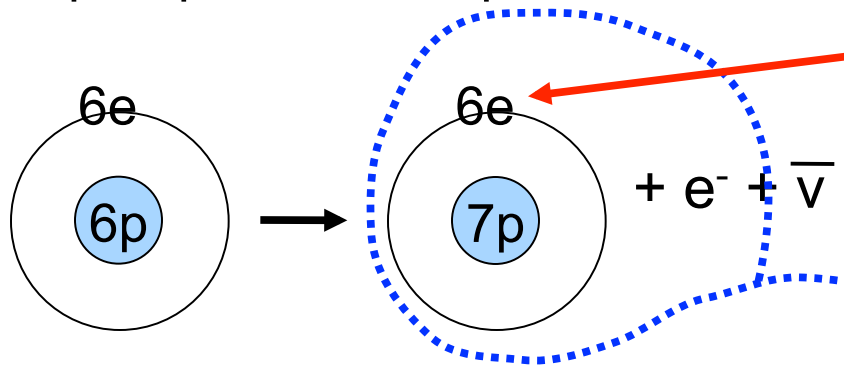
- α) Τί είδους διάσπαση είναι; Δώστε την αντίδραση της διάσπασης.
- β) Αν οι ατομικές μάζες ^{14}C και ^{14}N είναι $13044,00 \text{ MeV}/c^2$ και $13043,85 \text{ MeV}/c^2$ αντίστοιχα, πόση είναι η ενέργεια που απελευθερώνεται κατά την αντίδραση;
- γ) Σχεδιάστε το ενεργειακό φάσμα των ηλεκτρονίων.

Δίνονται οι μάζες:

$$M(n) = 939.6 \text{ MeV}/c^2, M(p) = 938,3 \text{ MeV}/c^2, M(e) = 0,511 \text{ MeV}/c^2$$

Άσκηση 1 – Λύση (α,β)

- α) $^{14}_6\text{C} \rightarrow ^{14}_7\text{N} + e^- + \bar{\nu}_e$; $Q = M(^{14}_6\text{C}) - M(^{14}_7\text{N}) = 0.15 \text{ MeV}$
- β) Ατομικές μάζες (M): δίνονται πάντα για άτομα με ίσο αριθμό ηλεκτρονίων και πρωτονίων



Βασική ιδέα: Τα ατομικά ηλεκτρόνια βρίσκονται από τη μία στιγμή στην άλλη με περισσότερα πρωτόνια στον πυρήνα.

Μάζα ατόμου με: $Z+1$ πρωτόνια και $Z+1$ ηλεκτρόνια

• ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Αν θέλουμε, μπορούμε να δουλεύουμε με πυρηνικές μάζες ($m_{\text{πυρ}}$):

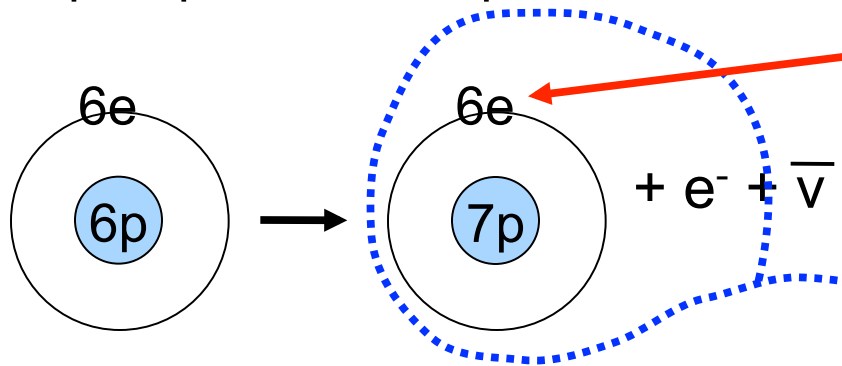
$$m_{\text{πυρ}}(^{14}_6\text{C}) = m_{\text{πυρ}}(^{14}_7\text{N}) + m_e + Q$$

όπου: $m_{\text{πυρ}}(^A_Z\text{X}) = M_{\text{ατόμου}}(^A_Z\text{X}) - Z * m_e = M(^A_Z\text{X}) - Z * m_e$

$$M(^{14}_6\text{C}) - 6 * M(e) = M(^{14}_7\text{N}) - 7 * M(e) + M(e) + Q \implies Q = M(^{14}_6\text{C}) - M(^{14}_7\text{N})$$

Άσκηση 1 – Λύση (α,β)

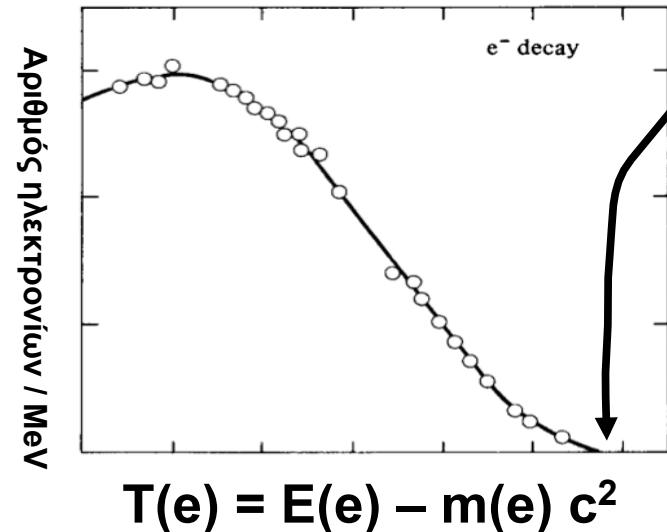
- α) $^{14}_6\text{C} \rightarrow ^{14}_7\text{N} + e^- + \bar{\nu}_e$; $Q = M(^{14}_6\text{C}) - M(^{14}_7\text{N}) = 0.15 \text{ MeV}$
- β) Ατομικές μάζες (M): δίνονται πάντα για άτομα με ίσο αριθμό ηλεκτρονίων και πρωτονίων



Βασική ιδέα: Τα ατομικά ηλεκτρόνια βρίσκονται από τη μία στιγμή στην άλλη με περισσότερα πρωτόνια στον πυρήνα.

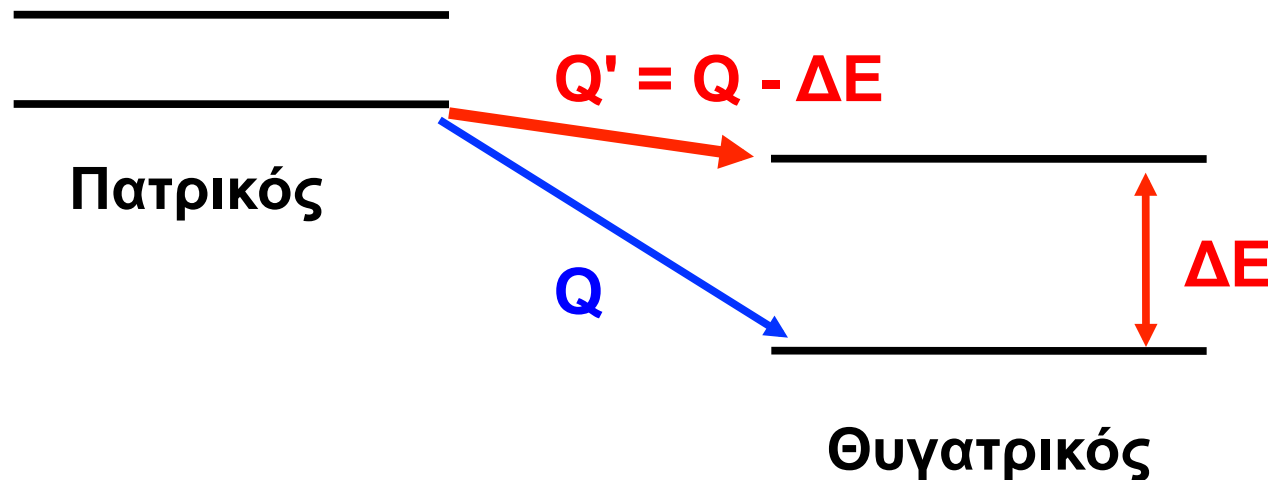
Μάζα ατόμου με: $Z+1$ πρωτόνια και $Z+1$ ηλεκτρόνια

- γ) **Ενεργειακό φάσμα ηλεκτρονίων**
= κατανομή των ενεργειών ηλεκτρονίων
= πληθυσμός ηλεκτρονίων (άξονας y)
σαν συνάρτηση της
ενέργειας του ηλεκτρονίου (άξονας x)



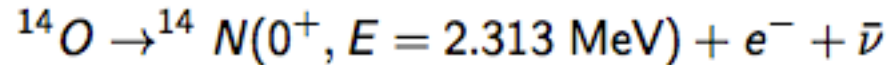
ΠΡΟΣΟΧΗ #1) αν όχι από βασική σε βασική κατάσταση:

- Οι τιμές του Q που δίνονται στα προηγούμενα είναι για β -διασπάσεις από
 - Τη βασική στάθμη του πατρικού πυρήνα
 - Στη βασική σταθμη του θυγατρικού πυρήνα
- Αν πάμε σε **διεγερμένη κατάσταση του θυγατρικού** (με ενέργεια ΔE πάνω από τη βασική του), τότε **το Q είναι μικρότερο κατά ΔE** . Αυτό το Q' είναι που μοιράζονται ως κινητική ενέργεια τα προϊόντα.



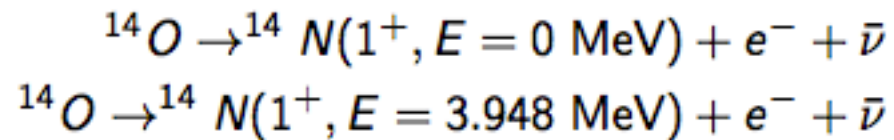
Ασκηση

Διάσπαση του ^{14}O απο την κατάσταση 0^+ σε ^{14}N .



- $\Delta\pi = +$ συνεπάγεται οτι η στροφορμή l είναι άρτια
- $l=0, l=2, \dots$
- Αν $l=2$ και $S=0$ ή $S=1$ το άθροισμα $S+l$ δεν μπορεί να είναι 0
- Αρα ο μόνος επιτρεπτός συνδιασμός είναι $l=0$ και $S=0$
- Επιτρεπτή μετάπτωση Fermi.

Μπορει όμως να έχουμε διάσπαση του ^{14}O σε άλες καταστάσεις του ^{14}N .



- Fermi διάσπαση $0^+ \rightarrow 1^+$ είναι απαγορευμένη λόγω διατήρησης στροφορμής
- $\Delta\pi = + \rightarrow l = \text{άρτιος}$
- Αν $l=0$ και $S=0$, $l+S = 0$ και δεν ταιριάζει με τη μετάπτωση $0 \rightarrow 1$
- Ο συνδιασμός $l=0$ και $S=1$, $l+S = 1$ είναι η επιτρεπτή μετάπτωση G-T

