

ΠΥΡΗΝΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Τάσος Λιόλιος
Μάθημα Πυρηνικής Φυσικής

REF:

Σ. Δεδούσης, Μ.Ζαμάνη, Δ.Σαμψωνίδης
Σημειώσεις Πυρηνικής Φυσικής
στην ιστοσελίδα του μαθήματος

Κβαντομηχανική περιγραφή των πυρήνων

- Βασικός σκοπός της Πυρηνικής Φυσικής είναι η **περιγραφή των ιδιοτήτων των πυρήνων βάσει μαθηματικών μοντέλων** για τη δομή τους και τις μεταβολές της.
- **Ο πυρήνας είναι ένα κβαντικό σύστημα** και έτσι πρέπει να περιγράφεται (εξίσωση Schrödinger κλπ).
- Ένας πυρήνας περιέχει **πολλά νουκλεόνια** και η αντίστοιχη εξίσωση Schrödinger περιλαμβάνει πολλές ανεξάρτητες μεταβλητές (a **many-body equation**). Επομένως, δεν μπορεί να βρεθεί ακριβής αναλυτική λύση της και θα πρέπει να γίνουν διάφορες προσεγγίσεις και παραδοχές.
- Επιπλέον, χρειάζεται η γνώση του **πυρηνικού δυναμικού $U(r_1, r_2, r_3, \dots)$** για το κάθε νουκλεόνιο (κάτι που δεν το γνωρίζουμε). Ξέρουμε μόνο ότι οφείλεται στην ισχυρή πυρηνική δύναμη και στην απωστική ηλεκτροστατική δύναμη Coulomb.
- Επιπλέον ξέρουμε ότι τα νουκλεόνια έχουν **στροφορμές και μαγνητικές ροπές** και δεδομένου του ότι βρίσκονται πολύ σφικτά ενωμένα, οι μαγνητικές τους αλληλεπιδράσεις θα πρέπει να είναι **σημαντικές**.

ΑΠΑΙΤΟΥΝΤΑΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

Δύο είναι οι προσεγγίσεις που χρησιμεύουν ως αφετηρία των υπολογισμών και οι οποίες οδηγούν σε **δύο τύπους μοντέλων**.

- Θεωρούμε ότι η **κυματοσυνάρτηση είναι διαχωρίσιμη**:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, t) = \psi_1(\mathbf{r}_1, t) \psi_2(\mathbf{r}_2, t) \psi_3(\mathbf{r}_3, t) \dots,$$

δηλαδή ότι μπορεί να γραφεί ως γινόμενο κυματοσυναρτήσεων μονών σωματιδίων και ότι είναι δυνατός κατ' αρχήν ο χωρισμός των μεταβλητών. Το κάθε σωματίδιο κινείται ανεξάρτητα στο φρέαρ του μέσου δυναμικού που δημιουργούν τα νουκλεόνια και έτσι **συμπεριφέρονται τα νετρόνια και τα πρωτόνια ως αέριο Fermi**, γεμίζοντας τις **ενεργειακές στάθμες** που επιτρέπει η **απαγορευτική αρχή του Pauli**. Τέτοια μοντέλα ξεχωριστών σωματιδίων (individual particle models) είναι το **Fermi Gas Model** και το **Shell Model (πρότυπο φλοιών)**.

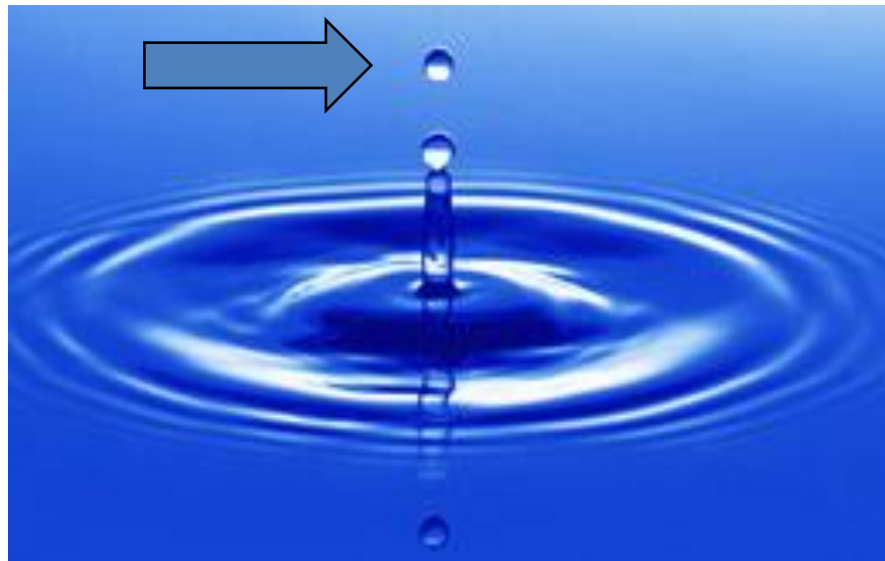
- Θεωρούμε ότι η **κυματοσυνάρτηση δεν είναι διαχωρίσιμη**, οπότε θεωρείται **ο πυρήνας ως ένα ενιαίο κβαντικό σωματίδιο**. Έτσι, έχουμε μεν ξανά ένα πρόβλημα μονού σωματιδίου (αυτό του πυρήνα), αλλά το σωματίδιο αυτό δεν είναι σημειακό και μπορεί να έχει και **σχήμα**. Η κυματοσυνάρτηση τώρα πρέπει να περιγράφει το **σχήμα του πυρήνα**, ενώ το δυναμικό πρέπει να εξαρτάται από το σχήμα. Αν παραμορφώνεται το σχήμα, το δυναμικό θα πρέπει να αλλάζει. Η κινητική ενέργεια θα είναι αυτή ενός περιστρεφόμενου και δονούμενου σώματος. Παράδειγμα τέτοιου μοντέλου είναι το **μοντέλο της υγρής σταγόνας**.

ΤΟ ΠΙΟ ΑΠΛΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΥΡΗΝΑ

Το μοντέλο της υγρής σταγόνας (the liquid drop model)

Από τα δεδομένα ότι οι πυρήνες έχουν ακτίνα ανάλογη του $A^{1/3}$
συνεπάγεται ότι οι πυρήνες έχουν σταθερή πυκνότητα.

Ο πυρήνας μοιάζει (σε πρώτη προσέγγιση)
με μια **σταγόνα υγρού**.



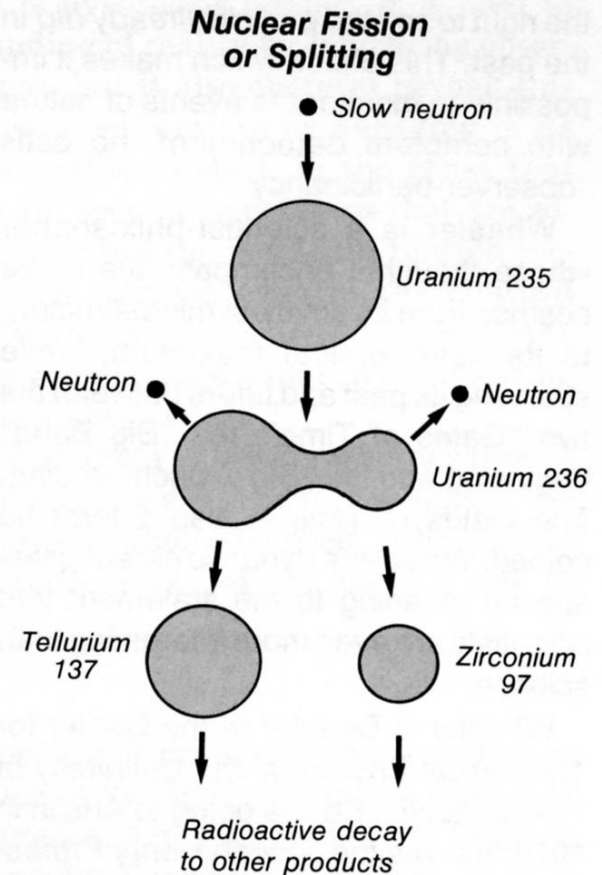
Το μοντέλο της υγρής σταγόνας (the liquid drop model)

Ο πυρήνας ως ένα ενιαίο κβαντικό σωματίδιο.

Στο προσεγγιστικό αυτό μοντέλο, παραλείπονται τα δευτερεύοντα πυρηνικά χαρακτηριστικά, και δίνεται έμφαση στην ισχυρή έλξη μεταξύ των νουκλεονίων.

Το μοντέλο αναπτύχθηκε (1935) από τον **von Weizsäcker** με βάση την ομοιότητα του πυρήνα με υγρή σταγόνα και μπορεί να δώσει την ενέργεια σύνδεσης και επομένως τη **μάζα των πυρήνων**.

Επίσης, το μοντέλο περιγράφει με απλό τρόπο το φαινόμενο της **πυρηνικής σχάσης**.



According to the “liquid drop” model of Bohr and Wheeler (1939), a slow neutron entering a uranium 235 nucleus causes it to split like a drop of liquid into two smaller drops representing the nuclei of a tellurium 137 atom and a zirconium 97 atom while emitting two neutrons. Energy released by this type of reaction forms the basis of nuclear fission power.

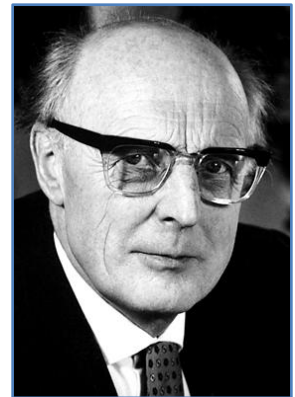
Πρότυπο Πυρήνα κατά φλοιούς (Shell Model)

Το πρότυπο κατά φλοιούς αναπτύχθηκε από δύο Γερμανούς φυσικούς: τη **Maria Goeppert-Mayer** και τον **Hans Jensen**.

Το μοντέλο αυτό μελετά τις καταστάσεις των νουκλεονίων εντός του πυρήνα, θεωρώντας ότι το καθένα νουκλεόνιο υπάρχει ξεχωριστά στον πυρήνα ως σωματίδιο ενός **συνόλου φερμιονίων** (individual particle model), γεμίζοντας **ενεργειακές στάθμες**.

Το μοντέλο ερμηνεύει την ύπαρξη των **“μαγικών αριθμών”**.

Το 1948, η Mayer δημοσίευσε την εργασία της σχετικά με το **πυρηνικό πρότυπο φλοιών**, το οποίο προβλέπει πολλές από τις ιδιότητες των πυρήνων. Η έμπνευση-κλειδί ήταν η σύζευξη σπιν-τροχιάς, στοιχείο βάσει του οποίου η Mayer μπόρεσε να υπολογίσει (σχεδόν ταυτόχρονα με τον Jensen) τις ενεργειακές στάθμες και τους μαγικούς αριθμούς. Η **Maria Goeppert-Mayer** (Göttingen και San Diego) και ο **Hans Jensen** (Heidelberg) τιμήθηκαν με το βραβείο Nobel Φυσικής του 1963 *"for their discoveries concerning nuclear shell structure"*.



Τα δεδομένα: οι “Μαγικοί αριθμοί”

Στην **Ατομική Φυσική** υπάρχουν κάποιοι “σημαντικοί” αριθμοί:

2-8-18-32-50.

που βάσει αυτών αιτιολογούνται οι περιοδικές ιδιότητες των χημικών στοιχείων.

Οι αριθμοί αυτοί αναφέρονται στον αριθμό των ηλεκτρονίων. Τα άτομα με αυτούς τους αριθμούς έχουν ιδιαίτερη σταθερότητα. Αυτό οφείλεται στο ότι τα άτομα τότε έχουν πλήρεις όλους τους ηλεκτρονικούς φλοιούς (2, 6, 10, 14, 18 ηλεκτρόνια για πλήρεις υποφλοιούς με s, p, d, f, g καταστάσεις, αντίστοιχα).

Στην **Πυρηνική Φυσική** εμφανίζονται οι αριθμοί:

2 – 8 – 20 – 28 – 50 – 82 – 126

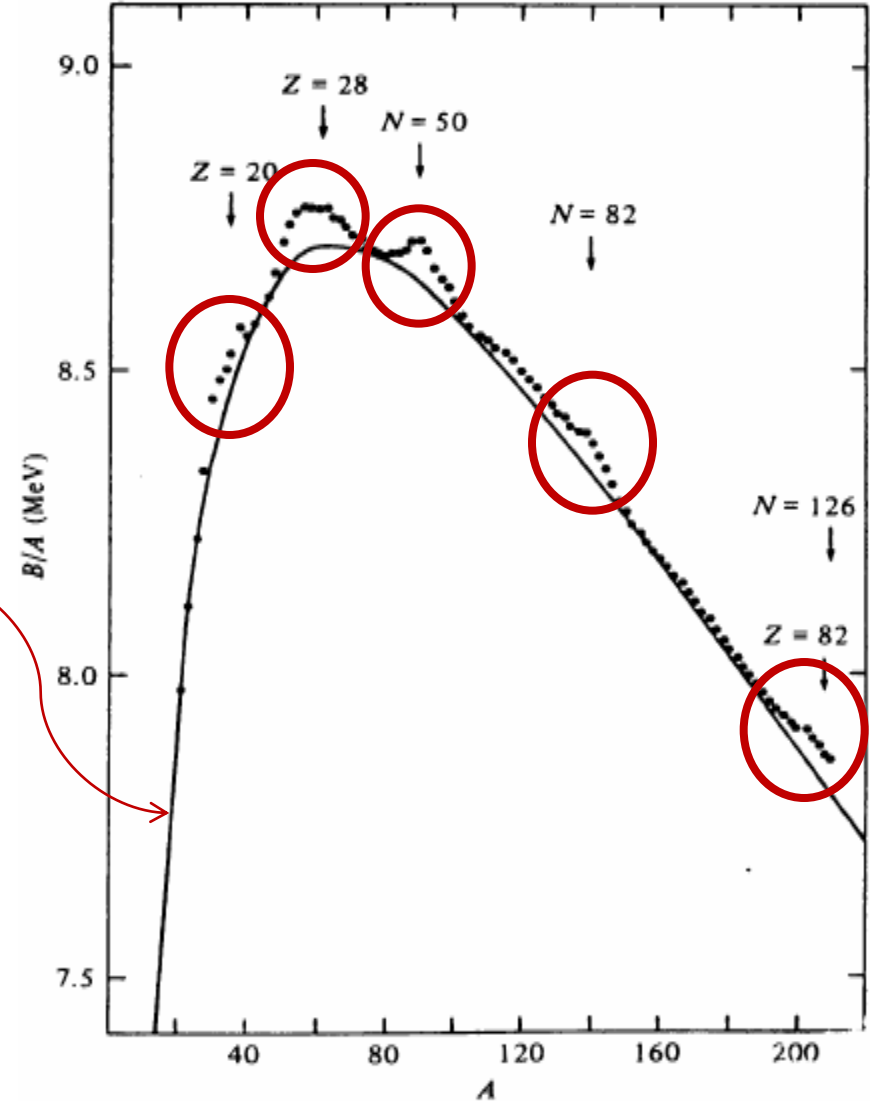
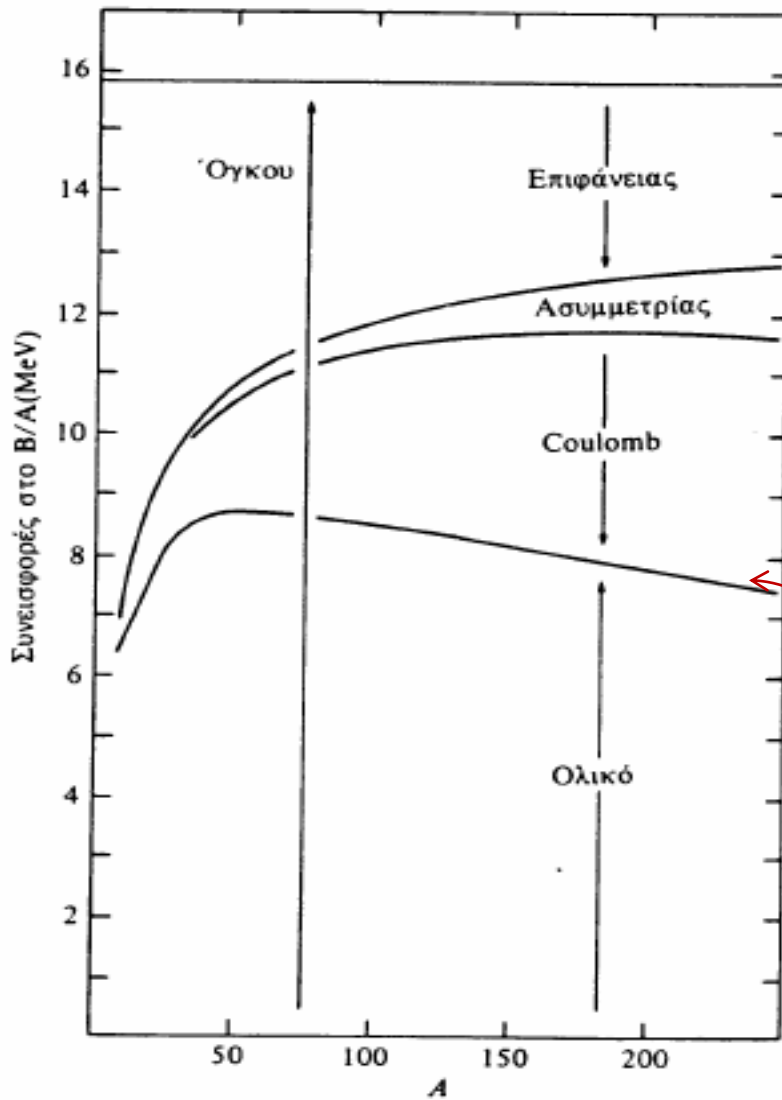
που αναφέρονται σε αριθμό είτε πρωτονίων είτε νετρονίων και για τους οποίους υπάρχουν μια σειρά από ξεχωριστές ιδιότητες στους αντίστοιχους πυρήνες, όπως η μεγαλύτερη σταθερότητα.

Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται κατά παράδοση στην Πυρηνική Φυσική:

«Μαγικοί αριθμοί».

**Η ύπαρξη των μαγικών αριθμών συνδέεται με το
Πρότυπο Πυρήνα κατά φλοιούς (Shell model)**

Υπενθύμιση: Στην περιοχή των μαγικών αριθμών (2-8-20-28-50-82-126) είδαμε αυξημένη B/A σε σχέση με την πρόβλεψη του ημι-εμπειρικού τύπου μάζας



Η τελική καμπύλη του τύπου Weizsäcker και οι πειραματικές τιμές.

Μαγικοί αριθμοί: 2-8-20-28-50-82-126

Ξεχωριστές ιδιότητες των πυρήνων με μαγικούς αριθμούς

1) Αριθμός σταθερών ισοτόπων

Στοιχεία που ο ατομικός τους αριθμός είναι μαγικός έχουν περισσότερα ισότοπα από τα γειτονικά τους:

20Ca (6), 19K (3), **82Pb (4)**, 81Tl (2), **50Sn (21)**, 49In (2), 51Sb (2)

2) Αριθμός σταθερών ισοτόνων

Ισότονα λέγονται τα στοιχεία που έχουν ίδιο αριθμό νετρονίων (N). Αν ο αριθμός νετρονίων είναι μαγικός έχουμε περισσότερα ισότονα από τα γειτονικά τους, π.χ.:

Για N=20 υπάρχουν 5 ισότονα

Για N=19 υπάρχουν 1 ισότονο

Για N=21 υπάρχουν 1 ισότονο

Μαγικοί αριθμοί: 2-8-20-28-50-82-126

Ξεχωριστές ιδιότητες των πυρήνων με μαγικούς αριθμούς

1) Αριθμός σταθερών ισοτόπων

Στοιχεία που ο ατομικός τους αριθμός είναι μαγικός έχουν περισσότερα ισότοπα από τα γειτονικά τους:

20Ca (6), 19K (3), **82Pb (4)**, 81Tl (2), **50Sn (21)**, 49In (2), 51Sb (2)

2) Αριθμός σταθερών ισοτόνων

Ισότονα λέγονται τα στοιχεία που έχουν ίδιο αριθμό νετρονίων (N). Αν ο αριθμός νετρονίων είναι μαγικός έχουμε περισσότερα ισότονα από τα γειτονικά τους, π.χ.:

Για N=20 υπάρχουν 5 ισότονα

Για N=19 υπάρχουν 1 ισότονο

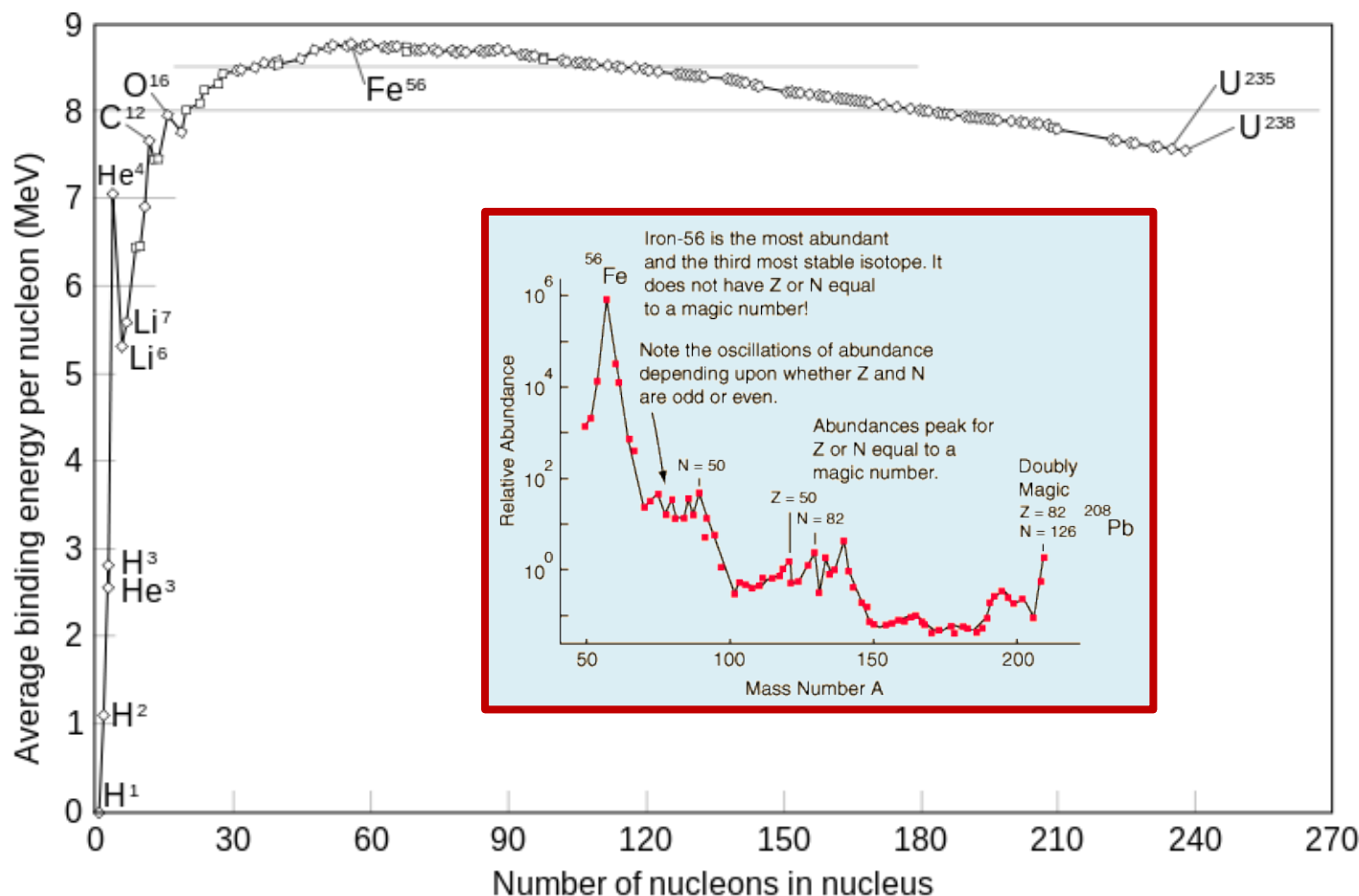
Για N=21 υπάρχουν 1 ισότονο

Μαγικοί αριθμοί: 2-8-20-28-50-82-126

Ξεχωριστές ιδιότητες των πυρήνων με μαγικούς αριθμούς

3) Φυσική ισοτοπική αφθονία

Αν ο αριθμός των πρωτονίων ή ο αριθμός των νετρονίων είναι μαγικός, η αφθονία των στοιχείων είναι μεγαλύτερη από την αναμενόμενη (Μια εντυπωσιακή εξαίρεση ο Fe-56).

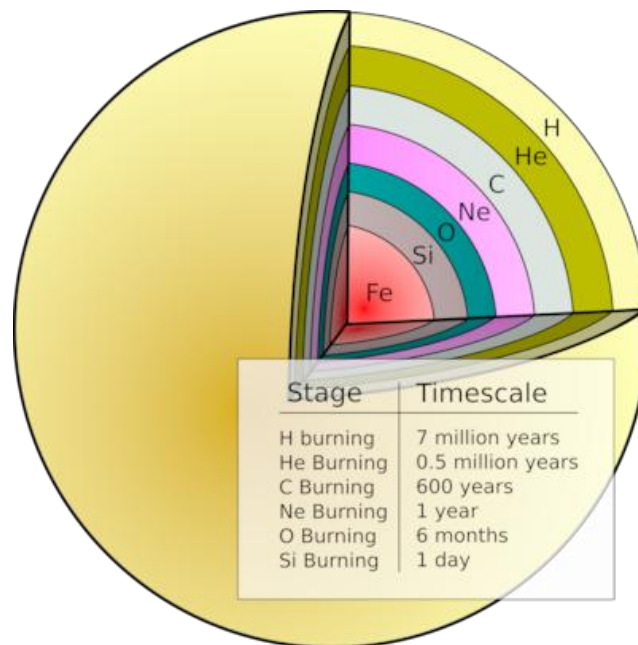


Για την αφθονία του Fe-56

Η σταθερότητα ενός πυρήνα, εκφρασμένη με την μέση ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο (BE/A) και η σχετική αφθονία του στη φύση δεν συμβαδίζουν πάντα. Οι διάφοροι παράγοντες που επηρεάζουν την δόμηση των πυρήνων οδηγούν στον Ni-62 ως προς την μέγιστη σταθερότητα και στον Fe-56 ως προς την μέγιστη αφθονία (στην περιοχή $Z > 14$, δηλ. μετά το Si).

Το Ni-62 έχει την μέγιστη μέση ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο και ακολουθούν ο Fe-58 και ο Fe-56. Οι όροι ενέργειας στη δόμηση των πυρήνων είναι: όγκου, επιφάνειας, Coulomb, ασυμμετρίας, ζευγών. Επιπλέον αυτών, υπάρχουν όροι που έχουν να κάνουν με τις ενεργειακές στάθμες των πρωτονίων και νετρονίων στους πυρήνες, οι οποίες καθορίζονται και από τα σπιν και τις στροφορμές των νουκλεονίων και την επίδραση ύπαρξης συμπληρωμένων ή μη φλοιών (shell model).

Ο Fe-56 έχει μεγάλη μέση ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο αλλά όχι τη μέγιστη. Εν τούτοις, μέγιστη είναι η αφθονία του στη φύση, επηρεασμένη βεβαίως από την πολύ μεγάλη BE/A που έχει, αλλά επίσης από το ότι παράγεται σαν τελικό προϊόν από τις κυριότερες διεργασίες πυρηνοσύνθεσης στους αστέρες. Έτσι, αν και ο σχηματισμός του Ni-56 είναι ο πιο ευνοημένος θερμοδυναμικά στο εσωτερικό των αστέρων (λόγω του Silicon burning process), άλλες διαδικασίες οδηγούν στον άφθονο σχηματισμό σιδήρου, όπως η φωτο-αποσύνθεση του Ni-62 προς Fe-56 που είναι ενεργειακά δυνατή στο εσωτερικό των πολύ θερμών αστέρων λόγω μετατροπής νετρονίων σε πρωτόνια με β -διάσπαση.



Μαγικοί αριθμοί: 2-8-20-28-50-82-126

Ξεχωριστές ιδιότητες των πυρήνων με μαγικούς αριθμούς

4) Προϊόντα διάσπασης ραδιενεργών σειρών

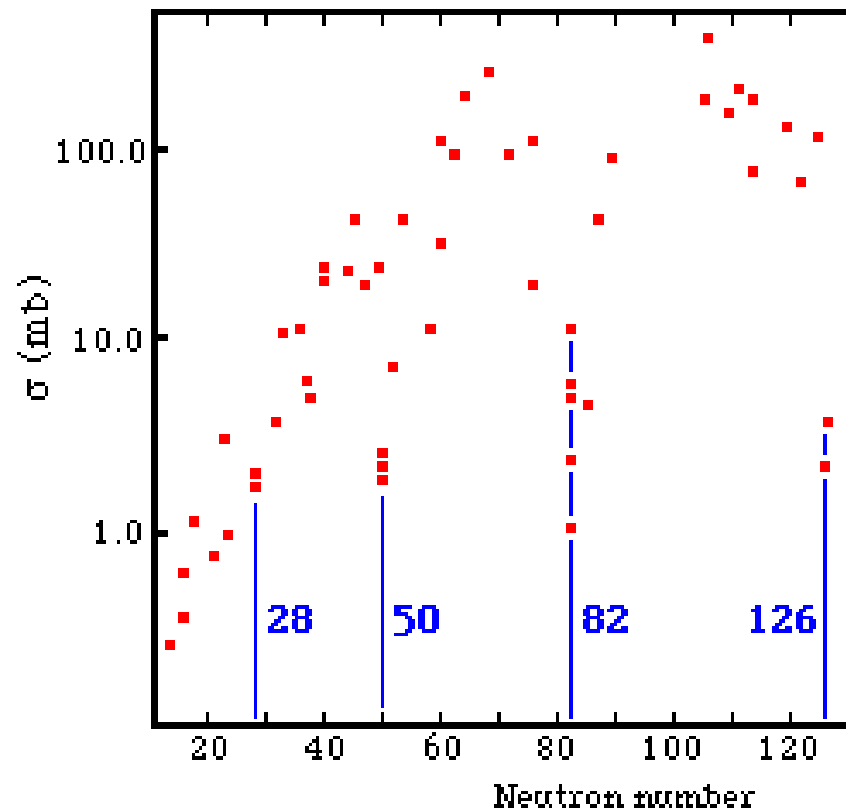
Όλες οι φυσικές ραδιενεργές σειρές καταλήγουν είτε σε ισότοπο του Pb με μαγικό $Z=82$ (είτε στο ^{209}Bi με $Z=83$ και μαγικό $N=126$)

5) Ενεργός διατομή σύλληψης νετρονίων

Η ενεργός διατομή σύλληψης νετρονίων είναι πολύ μικρότερη για πυρήνες με αριθμό νετρονίων μαγικό. Αντίθετα παίρνει πολύ μεγάλη τιμή αν το $N=\text{μαγικός}-1$

Π.χ. το Xe ($A=135$, $N=81$) έχει $\sigma=2.7 \cdot 10^6$ barns.

(Έτσι, το Xe δημιουργεί πρόβλημα στους αντιδραστήρες, διότι μειώνει δραστικά την ροή των νετρονίων).

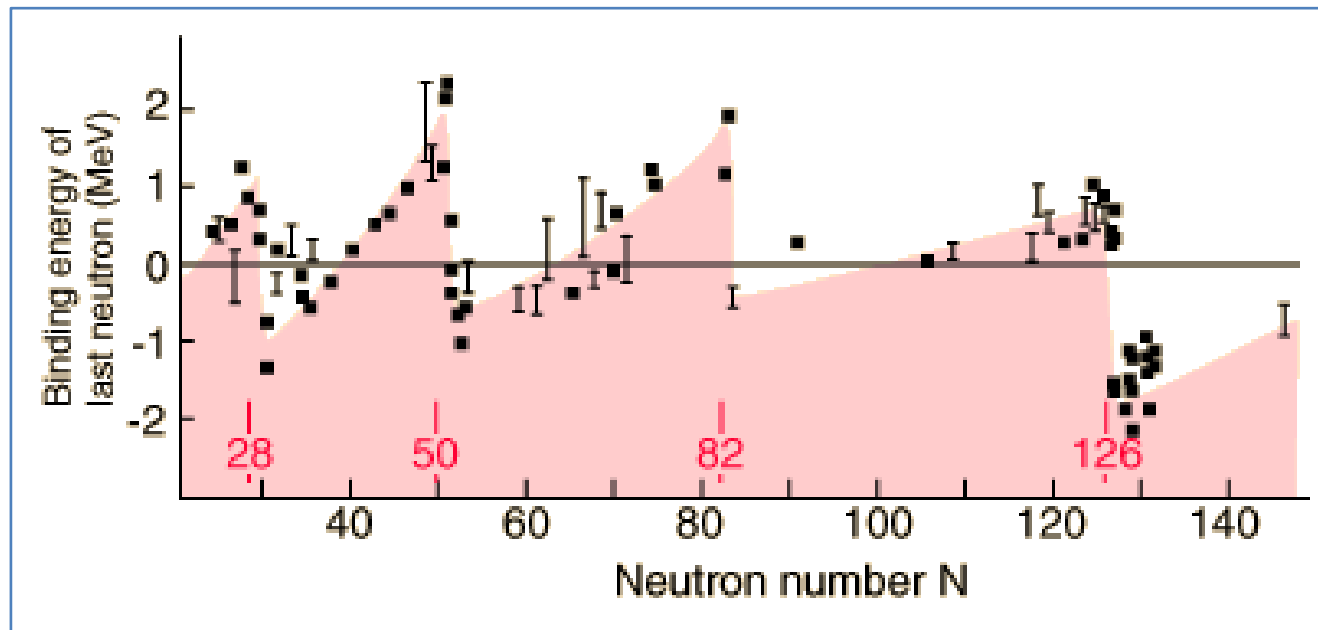


Μαγικοί αριθμοί: 2-8-20-28-50-82-126

Ξεχωριστές ιδιότητες των πυρήνων με μαγικούς αριθμούς

6) Ενέργεια σύνδεσης του τελευταίου νουκλεονίου

Η ενέργεια σύνδεσης του τελευταίου νουκλεονίου είναι μεγάλη στους πυρήνες που ο αριθμός τους είναι μαγικός.



Μαγικοί αριθμοί: 2-8-20-28-50-82-126

Ξεχωριστές ιδιότητες των πυρήνων με μαγικούς αριθμούς

7) Αυθόρμητη νετρονιακή διάσπαση

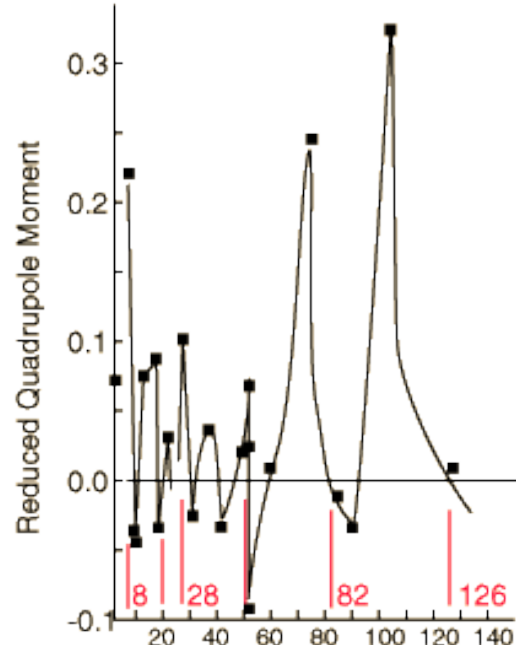
Όλα τα γνωστά ισότοπα που διασπώνται με εκπομπή νετρονίου έχουν αριθμό νετρονίων: $N=M+1$, όπου M μαγικός αριθμός.

Π.χ. ^{17}O ($N=9$), ^{87}Kr ($N=51$), ^{137}Xe ($N=83$), ^{89}Kr ($N=53$)

8) Ηλεκτρική τετραπολική

ροπή

Είναι μικρή (σχεδόν μηδενική) για πυρήνες με πλήρεις φλοιούς.

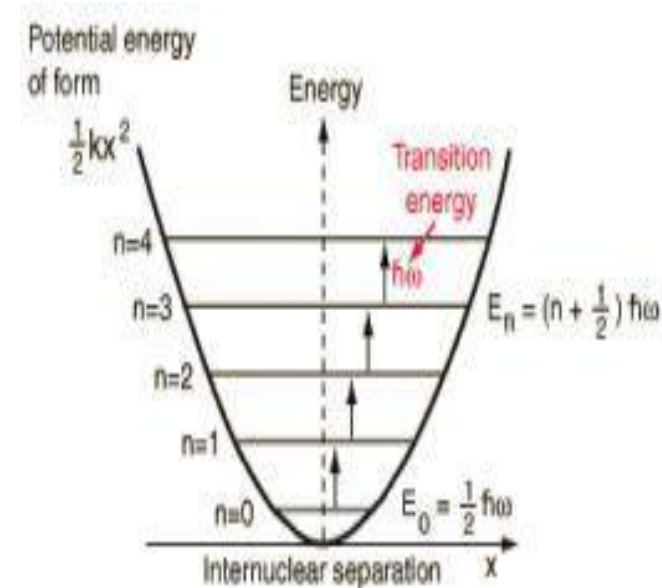
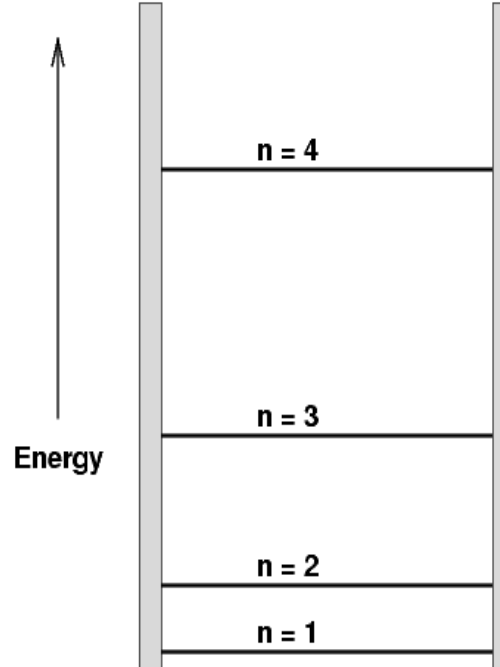


Quadrupole measurements for odd-A nuclei. The horizontal axis is either neutron number or proton number, whichever is odd.

For a shell model, those nuclei with closed shells should be spherically symmetric and have no quadrupole moment.

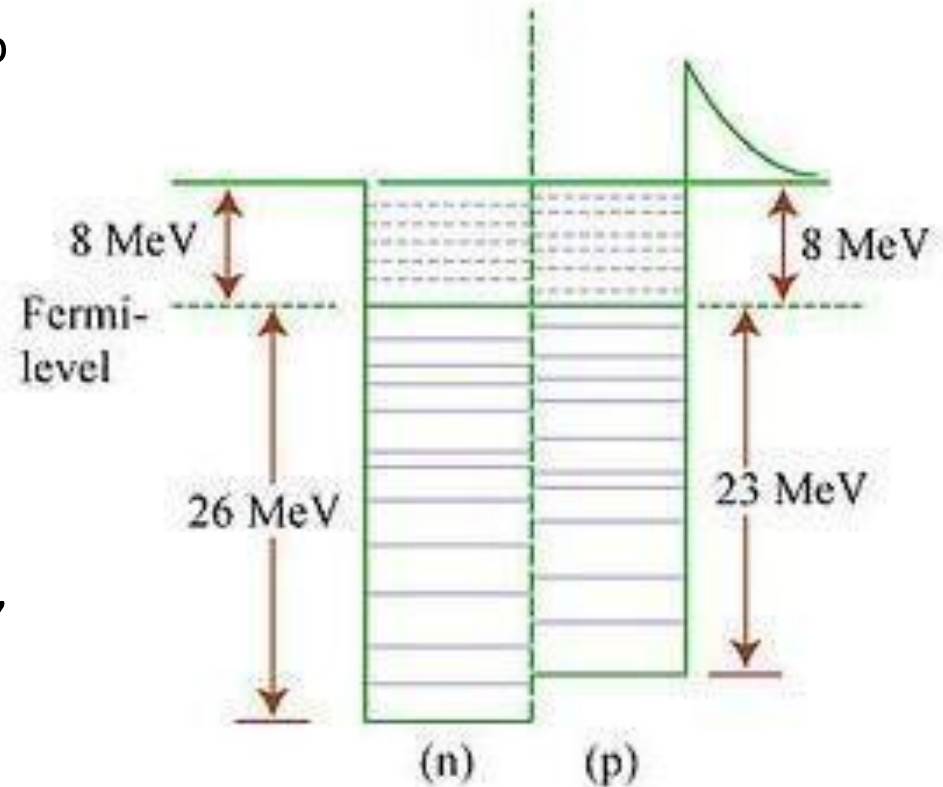
Πρότυπο Πυρήνα κατά φλοιούς

- Σύμφωνα με το πρότυπο, **τα νουκλεόνια κινούνται ανεξάρτητα** μεταξύ τους παρά την ισχυρή τους αλληλεπίδραση. Η εναλλαγή τους δεν θεωρείται ότι επηρεάζει την κίνηση. Η ανεξαρτησία της κίνησης εξασφαλίζεται από την απαγορευτική αρχή του Pauli.
- Κάθε νουκλεόνιο θεωρείται ότι κινείται ανεξάρτητα σε **ένα δυναμικό που συντίθεται από την παρουσία των υπόλοιπων νουκλεονίων**. Το δυναμικό αυτό εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το κέντρο (ακτινικό δυναμικό). Η μορφή του μπορεί να είναι ορθογωνίου φρέατος, ή αρμονικού ταλαντωτή, ή συνδυασμός αυτών.



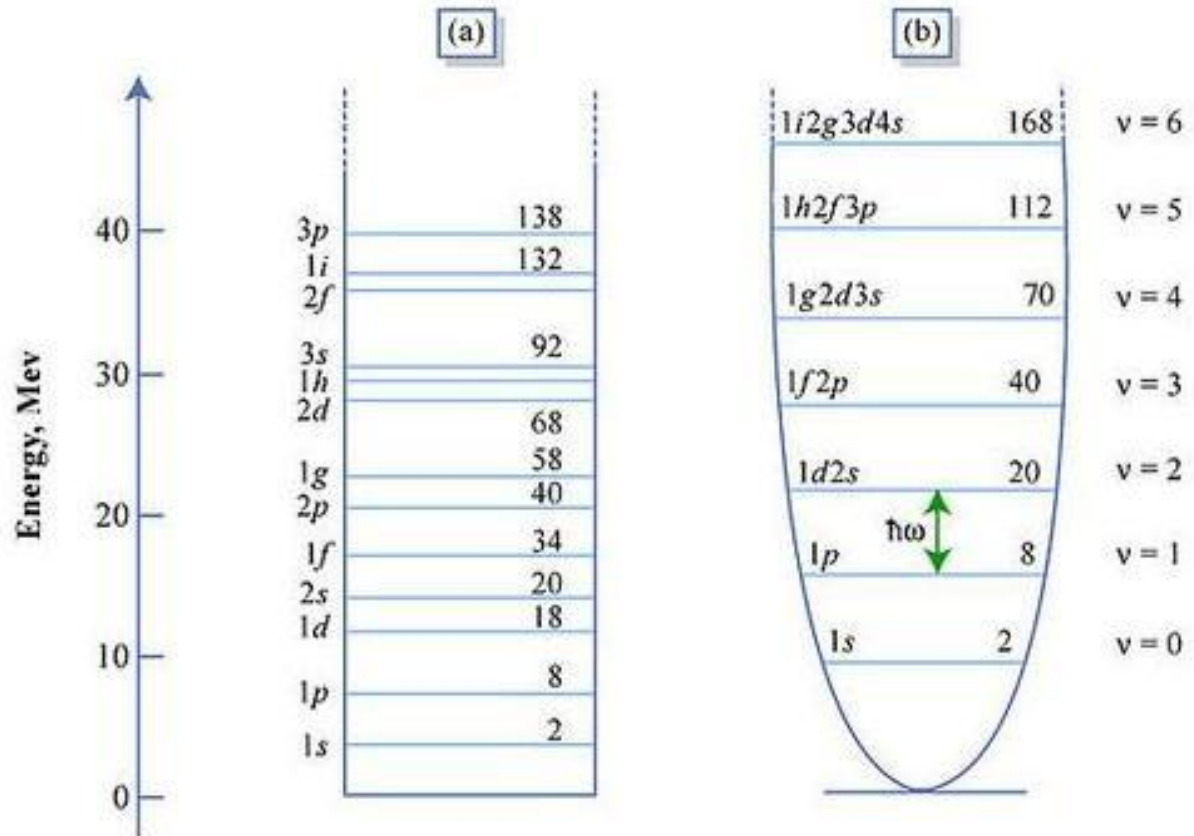
Πρότυπο Πυρήνα κατά φλοιούς

- Εφόσον τα νουκλεόνια είναι **φερμιόνια** (όπως τα ηλεκτρόνια), οι ενεργειακές τους στάθμες στον πυρήνα γεμίζουν από τη χαμηλότερη προς την υψηλότερη καθώς νέα νουκλεόνια προστίθενται στον πυρήνα.
- Υπάρχουν ξεχωριστά ενεργειακά επίπεδα για τα πρωτόνια και τα νετρόνια**, λαμβάνοντας υπόψη και το φορτίο των πρωτονίων.
- Στο shell model τα νουκλεόνια γεμίζουν την κάθε ενεργειακή κατάσταση σε τροχιακά με καθορισμένη στροφορμή.
- Όπως και στην περίπτωση των ατόμων, πολλές πυρηνικές ιδιότητες (στροφορμή, μαγνητική ροπή, σχήμα, κλπ) καθορίζονται από το **τελευταίο πλήρες ή μη-πλήρες επίπεδο σθένους**.



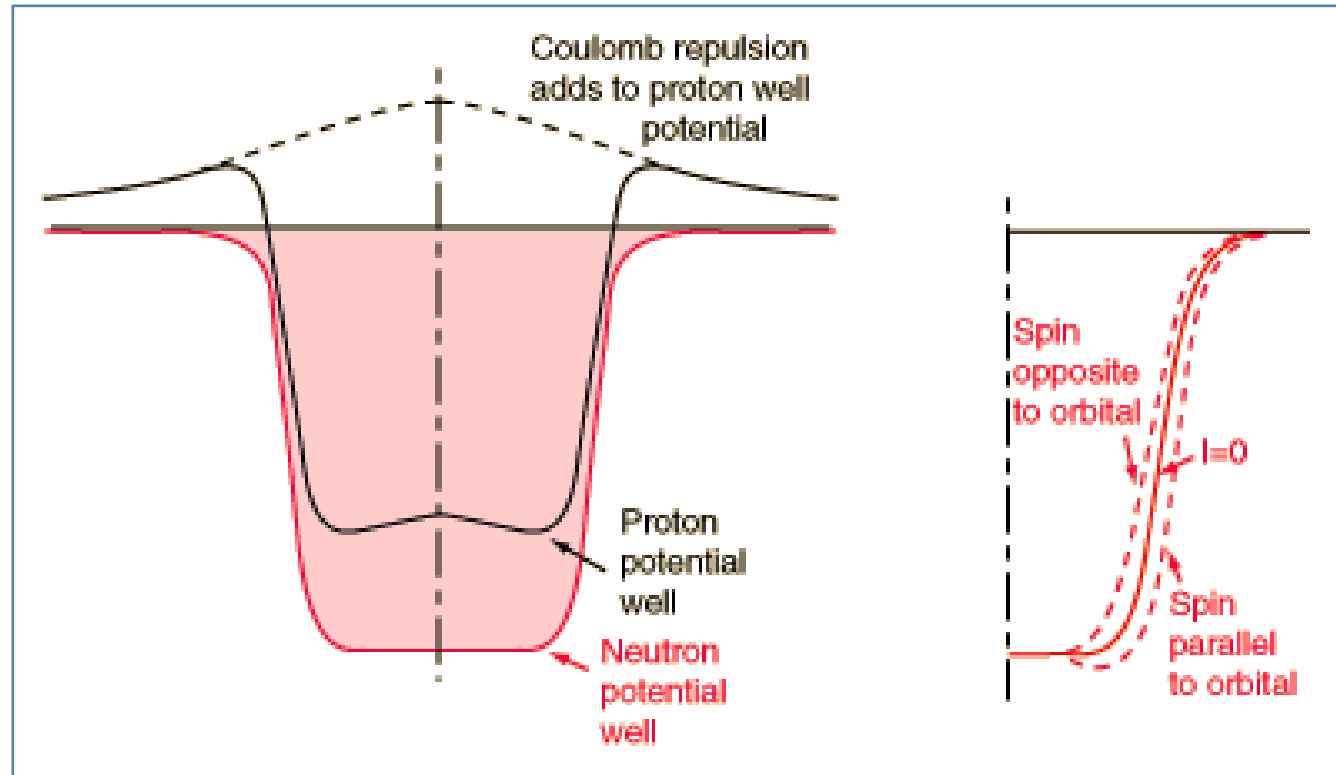
Πρότυπο Πυρήνα κατά φλοιούς

- Η λύση της εξίσωσης Schrödinger (που περιλαμβάνει μόνο την τροχιακή στροφορμή) οδηγεί σε πλήρωση φλοιών με αριθμούς πρωτονίων ή νετρονίων: 2,8,18,20,34,40,... (και όχι στους μαγικούς 2,8,20,28,50,82,126).
- Για να οδηγηθούμε σε πλήρωση φλοιών με μαγικούς αριθμούς πρέπει να συμπεριληφθεί στο δυναμικό και ένας επιπλέον όρος, αυτός για την **αλληλεπίδραση του σπιν με την τροχιακή στροφορμή**.



Πρότυπο Πυρήνα κατά φλοιούς

Η σύζευξη του σπιν με την τροχιακή στροφορμή μεταβάλλει την μορφή του δυναμικού και επομένως έχει σαν συνέπεια την μεταβολή της ενέργειας των πυρηνικών σταθμών και στον διαχωρισμό τους.



Έχουμε δύο τιμές της ολικής στροφορμής:

$$j = \ell + \frac{1}{2}$$

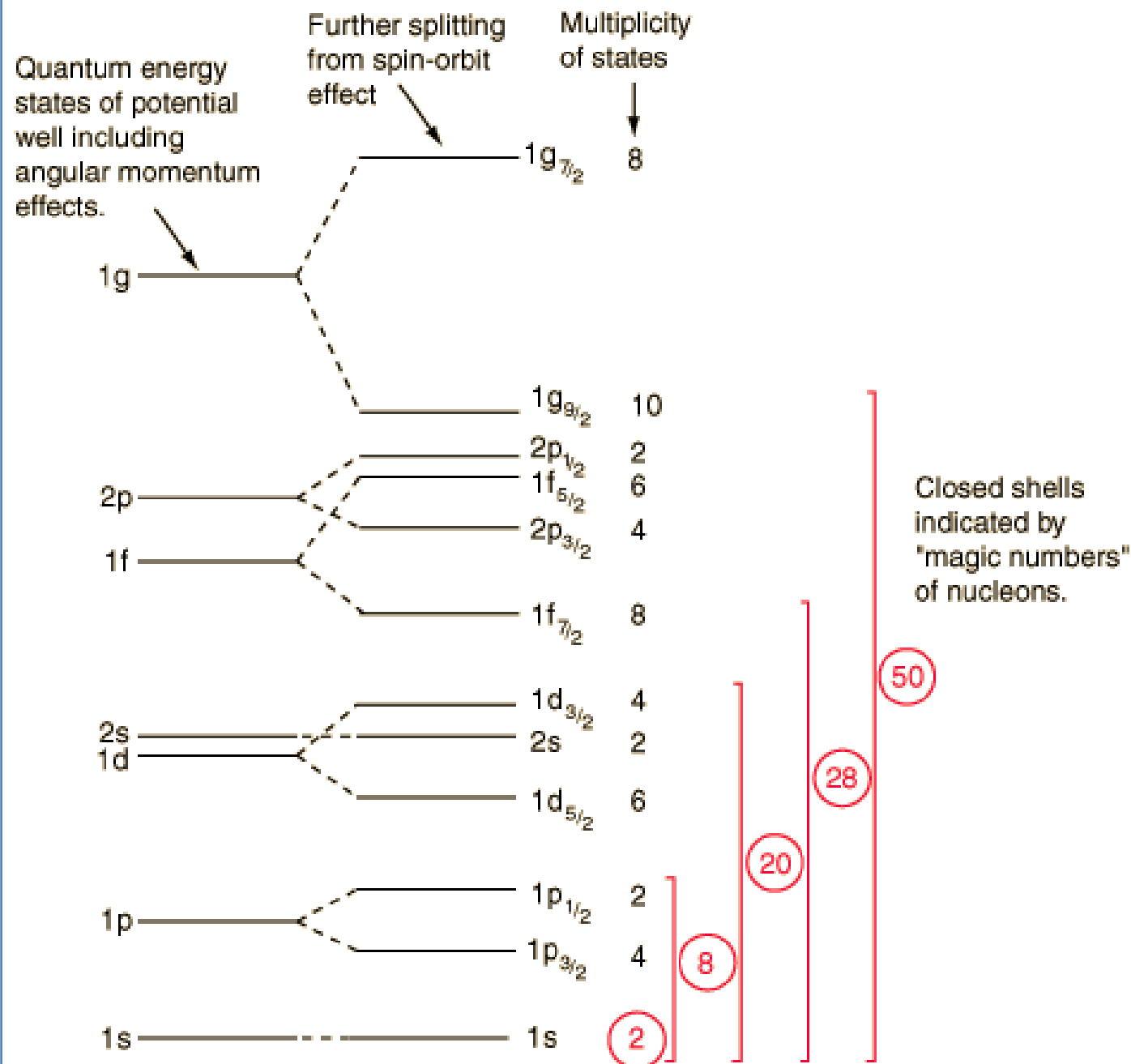
μείωση της ενέργειας νουκλεονίων

$$j = \ell - \frac{1}{2}$$

αύξηση της ενέργειας νουκλεονίων

Με αυτές τις διορθώσεις προκύπτουν οι μαγικοί αριθμοί: 2, 8, 20, 50, 82, 126.

Πρότυπο Πυρήνα κατά φλοιούς



Συνέπειες του μοντέλου

Προκύπτουν οι εξής συνέπειες:

- α) στους **συμπληρωμένους φλοιούς**, στροφορμή και σπιν προστίθενται έτσι ώστε η ολική στροφορμή να είναι μηδέν.
- β) στους **μη συμπληρωμένους φλοιούς** τα νουκλεόνια σχηματίζουν ζεύγη $p-p$ ή $n-n$ αλλά ποτέ $p-n$.

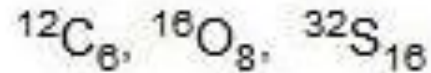
Κατά συνέπεια:

- Οι βασικές καταστάσεις **αρτίων-αρτίων πυρήνων** έχουν στροφορμή=0 και πάριτυ=0
- Στους πυρήνες με **περιττό αριθμό πρωτονίων** και άρτιο νετρονίων (ή ανάποδα) η τελική κατάσταση του πυρήνα καθορίζεται από το τελευταίο πρωτόνιο (και ανάποδα).
- Δεν μπορούμε να προβλέψουμε το σπιν των **περιττών-περιττών πυρήνων**.

Παραδείγματα ολικού σπιν πυρήνων

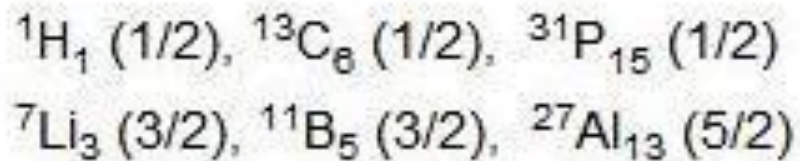
even
even **M**

$$I = 0$$



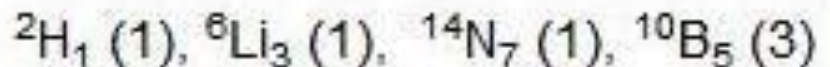
odd
any **M**

$$I = 1/2, 3/2, 5/2 \dots$$

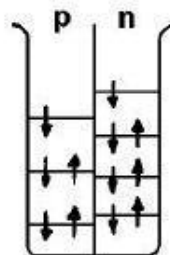


even
odd **M**

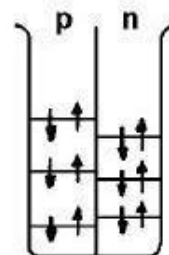
$$I = 1, 2, 3 \dots$$



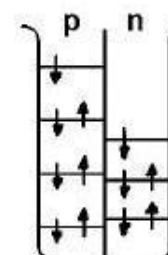
Παράδειγμα:



UNSTABLE



STABLE



UNSTABLE

