

Εισαγωγή στη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων

Δήμος Σαμψωνίδης
(17-1-2017)

Νόμοι Διατήρησης κβαντικών αριθμών

Αρχές Αναλλοίωτου

Συμμετρία ή αναλλοίωτο των εξισώσεων που περιγράφουν σύστημα σωματιδίων κάτω από μετασχηματισμούς =>
υπάρχουν μετασχηματισμοί που αφήνουν το σύστημα **αναλλοίωτο**

Παράδειγμα:

η μετατόπιση και η στροφή στο χώρο => αντιστοιχούν οι νόμοι διατήρησης της ορμής και της στροφορμής

Οι μετασχηματισμοί μπορεί να είναι συνεχείς ή διακριτοί

Αν ένας τελεστής αντιμετωπίζεται με την χαμιλτονιανή του συστήματος η αναμενόμενη τιμή του είναι διατηρήσιμος κβαντικός αριθμός

Ιδιότητες των τελεστών:

- Μοναδιαίος τελεστής:
- Συζυγής:
- Αυτοσυζυγής ή Ερμιτιανός:
- Αντίστροφος:

$$U^{-1} \times U = 1 = U \times U^{-1}$$

$$\tilde{A}^* = A^+$$

$$A = A^+$$

$$A \times A^+ = 1 = A^+ \times A$$

$$\Rightarrow A^{-1} = A^+ = A \Rightarrow \text{unitary}$$

$$A \times A^{-1} = 1 = A^{-1} \times A$$

Στην Αναπαράσταση Schroedinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_s(t) = H \Psi_s(t) \rightarrow \Psi_s(t) = T(t, t_0) \Psi_s(t_0) \rightarrow T(t, t_0) = e^{-i(t-t_0)H/\hbar}$$
$$T \cdot T^{-1} = 1 \rightarrow T^{-1} = T^* = e^{i(t-t_0)H/\hbar} \Rightarrow \Psi_s^*(t) = (T \cdot \Psi_s(t_0))^* = \Psi_s(t_0)^* \cdot T(t, t_0)^*$$

Στην αναπαράσταση Heisenberg η χρονική εξάρτηση δίνεται στον τελεστή και όχι στην κυματοσυνάρτηση:
κάθε τελεστής Q είναι χρονοεξαρτώμενος

$$\langle Q_0 \rangle = \int \Psi_s^*(t) \cdot Q_0 \cdot \Psi_s(t) dV = \int \Psi_s^*(t_0) \cdot Q \cdot \Psi_s(t_0) dV = \langle Q \rangle$$

Αν ο τελεστής Q δεν εξαρτάται απευθείας από το χρόνο:

$$\begin{aligned}\langle Q_0 \rangle &= \int \Psi_s^*(t) \cdot Q_0 \cdot \Psi_s(t) dV = \int \Psi_s^*(t_0) \cdot Q \cdot \Psi_s(t_0) dV = \langle Q \rangle \\ \Rightarrow T^{-1} \cdot Q_0 \cdot T &= Q \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial T^{-1}}{\partial t} \cdot Q_0 \cdot T + T^{-1} \cdot Q_0 \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{dQ}{dt} &= \frac{i}{\hbar} H \cdot T^{-1} \cdot Q_0 \cdot T - \frac{i}{\hbar} T^{-1} \cdot Q_0 \cdot T \cdot H = \frac{i}{\hbar} (H \cdot Q - Q \cdot H) \\ \Rightarrow \frac{dQ}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [Q, H]\end{aligned}$$

Αν $dQ/dt=0 \Rightarrow Q$ αναλλοίωτο μέγεθος $\Rightarrow$ **ΔΙΑΤΗΡΕΙΤΑΙ** $\Rightarrow$
 $[Q, H]=0 \Rightarrow$ **ΑΝΤΙΜΕΤΑΤΙΘΕΝΤΑΙ** με την Χαμιλτονιανή

Ο τελεστής της μετατόπισης

- Η μετατόπιση είναι ένας συνεχής μετασχηματισμός

$$\Psi' = \Psi(r + \delta r) = \Psi(r) + \delta r \cdot \frac{\partial \Psi(r)}{\partial r} + \dots = \left(1 + \delta r \frac{\partial}{\partial r}\right) \Psi(r) = D \Psi(r)$$

$$D = \left(1 + \delta r \frac{\partial}{\partial r}\right)$$

- D είναι ο τελεστής της απειροστής χωρικής μετατόπισης
- Ο τελεστής της ορμής είναι:

$$p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial r}$$

- Μία πεπερασμένη μετατόπιση Δr είναι μία ακολουθία απειροστών μετατοπίσεων ($\Delta r = n \delta r$)
- Επομένως : $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{\hbar} p \delta r\right)^n = \exp\left(1 + \frac{i}{\hbar} p \Delta r\right)$ άρα D μοναδιαίος:
 $D^\dagger D = D^{-1} D = 1 \Rightarrow$ ο τελεστής της ορμής είναι ο **‘γεννήτορας’** του μετασχηματισμού των μετατοπίσεων και **ΑΝ αντιμετατίθεται** με την Χαμιλτονιανή $[D, H] = 0 \Rightarrow [p, H] = 0 \Rightarrow$ ο τελεστής της ορμής αντιμετατίθεται με H $\Rightarrow$ είναι **ΔΙΑΤΗΡΗΣΙΜΟ** μέγεθος

Ο τελεστής της στροφορμής

- Η στροφή είναι επίσης ένας συνεχής μετασχηματισμός:

$$\Psi' = \Psi(\phi + \delta\phi) = \Psi(\phi) + \delta\phi \cdot \frac{\partial \Psi(\phi)}{\partial \phi} + \dots = \left(1 + \delta\phi \frac{\partial}{\partial \phi}\right) \Psi(\phi) = R \Psi(\phi)$$

- Ο τελεστής της στροφής περί τον άξονα z: $R_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z$
 $R_z = 1 + \frac{i}{\hbar} J_z \delta\phi$
 $\Delta\phi = n\delta\phi$
 $J_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$

$$R_z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{\hbar} J_z \delta\phi \right)^n = \exp \left(1 + \frac{i}{\hbar} J_z \Delta\phi \right)$$

- Διατήρηση της στροφορμής** περί ένα άξονα z
 προκύπτει με την σχέση αντιμετάθεσης του τελεστή J_z
 με την H : $[J_z, H] = 0$

Συνεχείς μετασχηματισμοί

Μετατοπίσεις & Στροφές

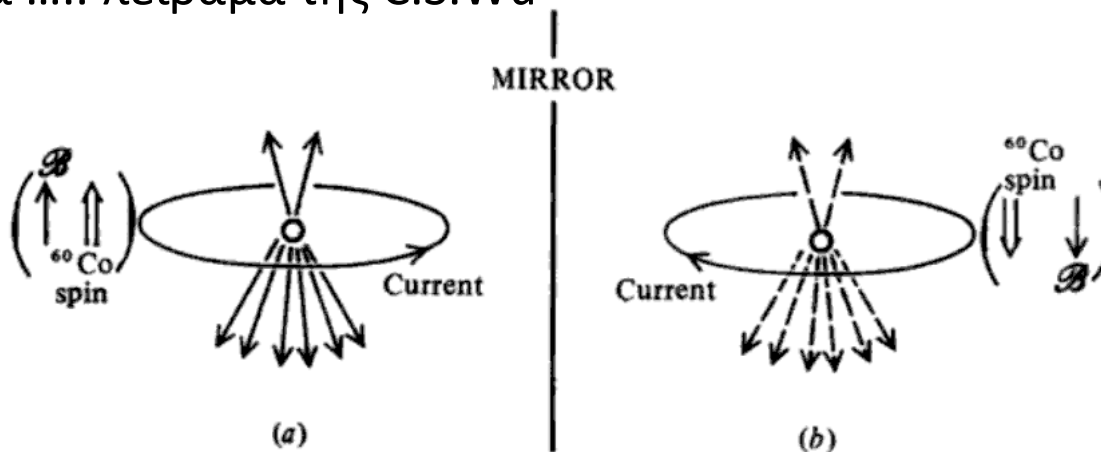
- Όταν οι μετασχηματισμοί είναι συνεχείς οι κβαντικοί αριθμοί που διατηρούνται προστίθενται:

οι νόμοι διατήρησης είναι προσθετικοί

Διακριτοί μετασχηματισμοί

Πριν από το 1956 θεωρούνταν δεδομένο ότι οι νόμοι της φυσικής είναι αμφιδέξιοι (ισχύει η κατοπτρική συμμετρία):

- δηλαδή **οποιασδήποτε κατοπτρική εικόνα φυσικής διαδικασίας αντιπροσωπεύει επίσης τέλεια μια πιθανή φυσική διαδικασία.**
- Αλλά πείραμα της C.S.Wu



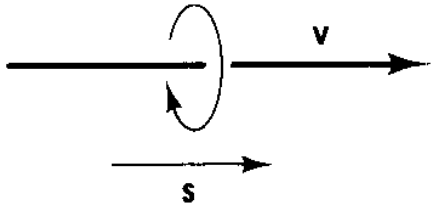
*Μια φυσική διαδικασία
η οποία ΔΕΝ
παρατηρείται στη φύση*

Fig. 5.5. **Wu experiment.** (a) Observed electron distribution relative to the sense of the (positive) current in the polarising solenoid. (b) Mirror image **experiment** not realised. The directions of the magnetic field $\mathcal{B}$ and the nuclear spin orientation are shown.

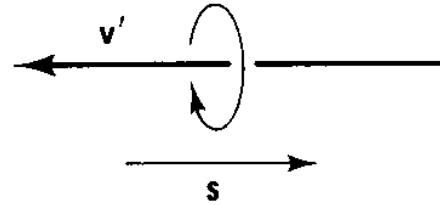
Αν διατηρούνταν η χωρική ανάκλαση (parity) στη β-διάσπαση τα ηλεκτρόνια θα έπρεπε να εκπέμπονταν με ίσες κατανομές από τις δύο κατευθύνσεις.

Διακριτοί μετασχηματισμοί

Ελικότητα



(a) Right-handed



(b) Left-handed

Helicity. In (a) the spin and velocity are parallel (helicity $+1$); in (b) they are antiparallel (helicity -1).

- Ένα ηλεκτρόνιο με spin κατά τη φορά κίνησης (a, δεξιόστροφο)
- Το ίδιο ηλεκτρόνιο φαίνεται από κινούμενο παρατηρητή με μεγαλύτερη ταχύτητα κατά την ίδια φορά, ως αριστερόστροφο (b).
- Για τα νετρίνα με μηδενική μάζα, δεν μπορεί να υπάρχει ταχύτερος παρατηρητής $\rightarrow$ δεν μπορούμε να αντιστρέψουμε την ελικότητα με αυτό τον τρόπο (Lorentz invariant).
- Η ελικότητα του νετρίνο είναι θεμελιώδης ιδιότητα

Βρέθηκε πειραματικά

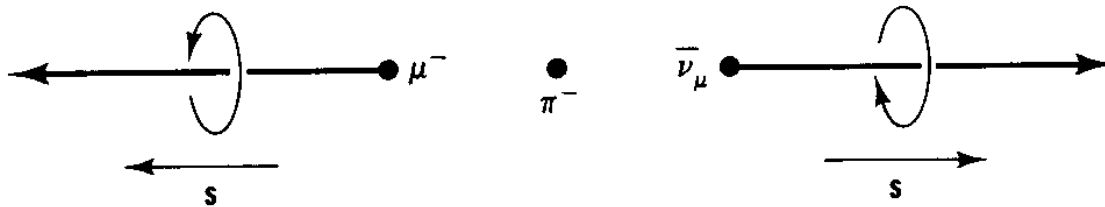
- | | |
|----------------|------------------|
| – Νετρίνα | → αριστερόστροφα |
| – Αντι-νετρίνα | → δεξιόστροφα |

Διακριτοί μετασχηματισμοί

Το πιόνιο σε ηρεμία $\rightarrow$ τα μ & ν αντιδιαμετρικά

Το πιόνιο έχει $\text{spin}=0$

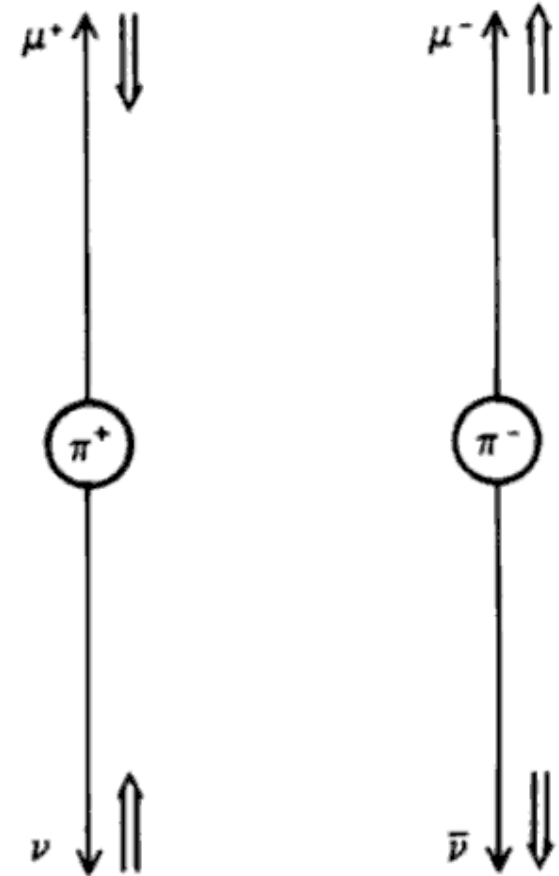
Αν το αντνετρίνο είναι δεξιόστροφο το ίδιο
πρέπει να είναι και το μ^-



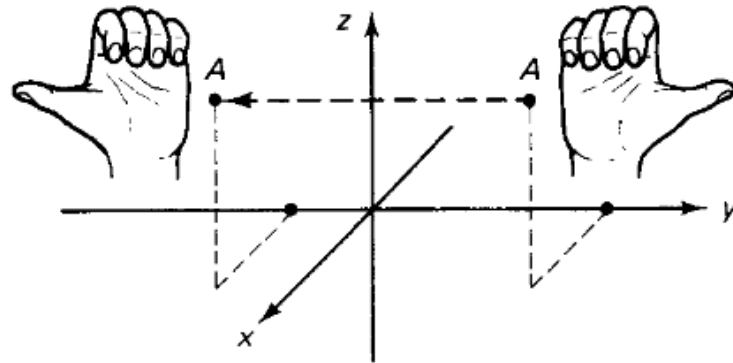
Αν το νετρίνο είναι αριστερόστροφο το ίδιο
πρέπει να είναι και το μ^+

Για τη διάσπαση $\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$,

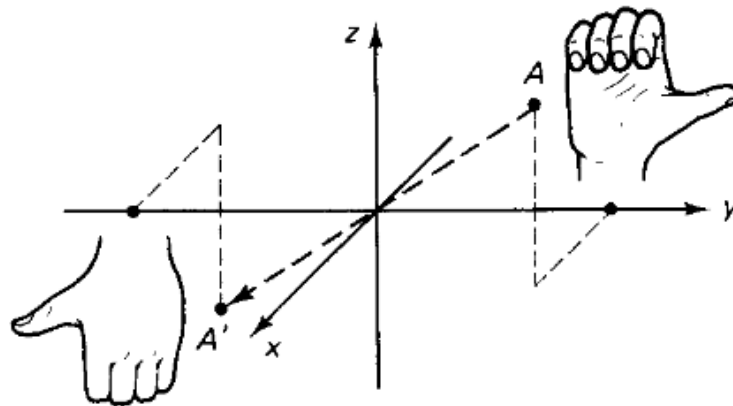
- τα φωτόνια πρέπει να έχουν την ίδια ελικότητα
- έχουν μετρηθεί ίδιος αριθμός δεξιόστροφων & αριστερόστροφων
- αλλά είναι EM αλληλεπίδραση (διατηρεί την parity!)



Διακριτοί μετασχηματισμοί



(a) Reflection (in the x - z plane)
 $(x, y, z) \rightarrow (x, -y, z)$



(b) Inversion $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$

Διακριτοί μετασχηματισμοί

Πραγματοποιούνται με διακριτά βήματα

π.χ. Χωρική ανάκλαση ως προς την αρχή των αξόνων:

Ομοτιμία (parity)

Είναι ο τελεστής P που προκαλεί την χωρική αναστροφή των συντεταγμένων
($x, y, z \rightarrow -x, -y, -z$):

$$P\Psi(r) = \Psi(-r)$$

Εφαρμόζοντας ξανά τον τελεστή $\Rightarrow P\Psi(-r) = P^2\Psi(r) \Rightarrow P^2 = 1 \Rightarrow$

οι ιδιοτιμές του τελεστή P είναι $+1, -1$.

Στον μικρόκοσμο, η συμπεριφορά της κυματοσυνάρτησης σε ανακλάσεις, η μετάβαση από δεξιόστροφο σε αριστερόστροφο σύστημα συντεταγμένων, έχει καθοριστική σημασία και συνιστά πρωταρχική ιδιότητα του συστήματος.

Η ιδιότητα αυτή αποκαλείται **ομοτιμία (parity)**.

Parity

Μία κυματοσυνάρτηση μπορεί να μην έχει συγκεκριμένη τιμή ομοτιμίας

→ άρτια ($P=+1$) ή περιττή ($P=-1$)

$\psi = \cos x$, $P\psi \rightarrow \cos(-x) = +\psi$ (άρτια)

$\psi = \sin x$, $P\psi \rightarrow \sin(-x) = -\psi$ (περιττή)

ενώ $\psi = \cos x + \sin x$, $P\psi \rightarrow \cos x - \sin x \neq \pm\psi$

Η χωρική αναστροφή $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ είναι ισοδύναμη
(σε σφαιρικές) με

$$\theta \rightarrow \pi - \theta$$

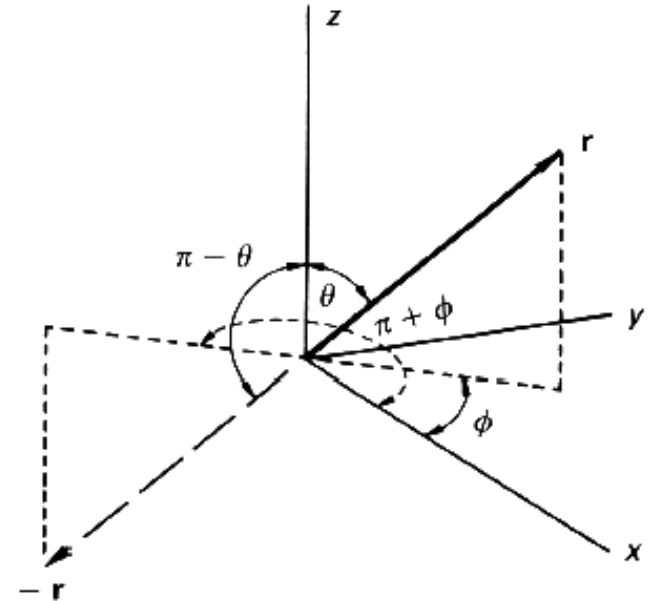
$$\phi \rightarrow \pi + \phi$$

Κυματοσυναρτήσεις του H

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \chi(|\mathbf{r}|) Y_m^l(\theta, \phi)$$

$$\Psi(-\mathbf{r}) = \chi(|\mathbf{r}|) Y_m^l(\pi - \theta, \pi + \phi) = \chi(|\mathbf{r}|) (-1)^l Y_m^l(\pi - \theta, \pi + \phi) \Rightarrow P \Psi(\mathbf{r}) = (-1)^l \Psi(\mathbf{r})$$

Οι καταστάσεις $s, d, g, \dots$ έχουν άρτια ομοτιμία ενώ οι p, f, h περιττή



Διακριτοί μετασχηματισμοί

Οι νόμοι διατήρησης είναι πολλαπλασιαστικοί στους **διακριτούς** μετασχηματισμούς

Η ομοτιμία είναι πολλαπλασιαστικός κβαντικός αριθμός $\Rightarrow$ η ομοτιμία ενός σύνθετου συστήματος είναι το γινόμενο των ομοτιμιών των επιμέρους στοιχείων του : Αν $\psi = \phi_\alpha \phi_\beta \phi_\gamma \dots \Rightarrow P_\psi = P_{\phi_\alpha} P_{\phi_\beta} P_{\phi_\gamma} \dots$

Η “εσωτερική” ομοτιμία του πιονίου (spin=0):

Από την αλληλεπίδραση του πιονίου με το δευτέριο : $\pi^- + d \rightarrow n + n$
μπορούμε να αποδείξουμε ότι το πiónιο έχει περιττή “εσωτερική” ομοτιμία

$$\pi^- : s_\pi = 0, d : s_d = 1 \Rightarrow S_{\pi+d} = 1; L_{\pi+d} = 0 \Rightarrow J_{\pi+d} = 1 \\ \Rightarrow J_{n+n} = 1, \text{ (J ΔΙΑΤΗΡΕΙΤΑΙ)}$$

*Εναλλαγή ταυτόσημων $n \rightarrow (-1)^{L+S+1}$
Πρέπει $L+S$ άρτιος*

$\Rightarrow$ 1. $L_{n+n} = 1, S_{n+n} = 0$ αλλά τότε Ψ_{n+n} **συμμετρική** ($\Psi_s = 0$ είναι αντισυμμετρική)

$\Rightarrow$ 2. $L_{n+n} = 0, S_{n+n} = 1$ Ψ_{n+n} **επίσης συμμετρική** ($\Psi_s = 0$ είναι συμμετρική)

$\Rightarrow$ 3. $L_{n+n} = 1, S_{n+n} = 1$ Ψ_{n+n} **αντι-συμμετρική** (ταυτόσημα φερμιόνια)

$\Rightarrow$ 4. $L_{n+n} = 2, S_{n+n} = 1$ Ψ_{n+n} **συμμετρική**

$\Rightarrow$ **Αποδεκτή είναι μόνο η περίπτωση 3.**

$$\Rightarrow P(\pi, d) = (-1)^{l(\pi+d)} P(\pi) P(d) = (-1)^{l(n+n)} P(n) P(n), P(d) = P(n) P(p) = +1 \Rightarrow P(\pi) = -1$$

- Το πιόνιο έχει $\text{spin}=0$, $P=-1$ ψευδοβαθμωτή Ψ .

Scalar	: $P(s) = s$
Pseudoscalar	: $P(p) = -p$
Vector (or polar vector)	: $P(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$
Pseudovector (or axial vector)	: $P(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$

Η ομοτιμία διατηρείται ΜΟΝΟ στις ισχυρές και τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις. ΟΧΙ στις ασθενείς: $[P,H] \neq 0$

Ομοτιμία σωματίων & αντισωματίων

Η θεωρία Dirac προβλέπει **αντίθετες ομοτιμίες για φερμιόνια και αντιφερμιόνια**

Η εσωτερική ομοτιμία ζεύγους φερμιονίου αντιφερμιονίου επιβεβαιώθηκε και πειραματικά

π.χ. Στην αντίδραση: $p + p \rightarrow p + p + (p(\text{bar}) + p)$

Αντίθετα η εσωτερική ομοτιμία μποζονίου ταυτίζεται με την εσωτερική ομοτιμία του αντιμποζονίου του.

Αναλλοίωτο συζυγίας φορτίου

- Ο τελεστής συζυγίας φορτίου αλλάζει το **πρόσημο του φορτίου** και της **μαγνητικής ροπής** του σωματιδίου => ανταλλαγή του σωματίου με το αντισωματίό του.
- Συμβολίζεται με τον τελεστή C
- Πειραματικά έχει επιβεβαιωθεί το αναλλοίωτο των ισχυρών και ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων σε μετασχηματισμούς συζυγίας φορτίου και η παραβίασή του στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις.

p πρωτόνιο: $Q=+e, B=+1, s=1/2, \mu=+2.79 (e\hbar/2Mc)$

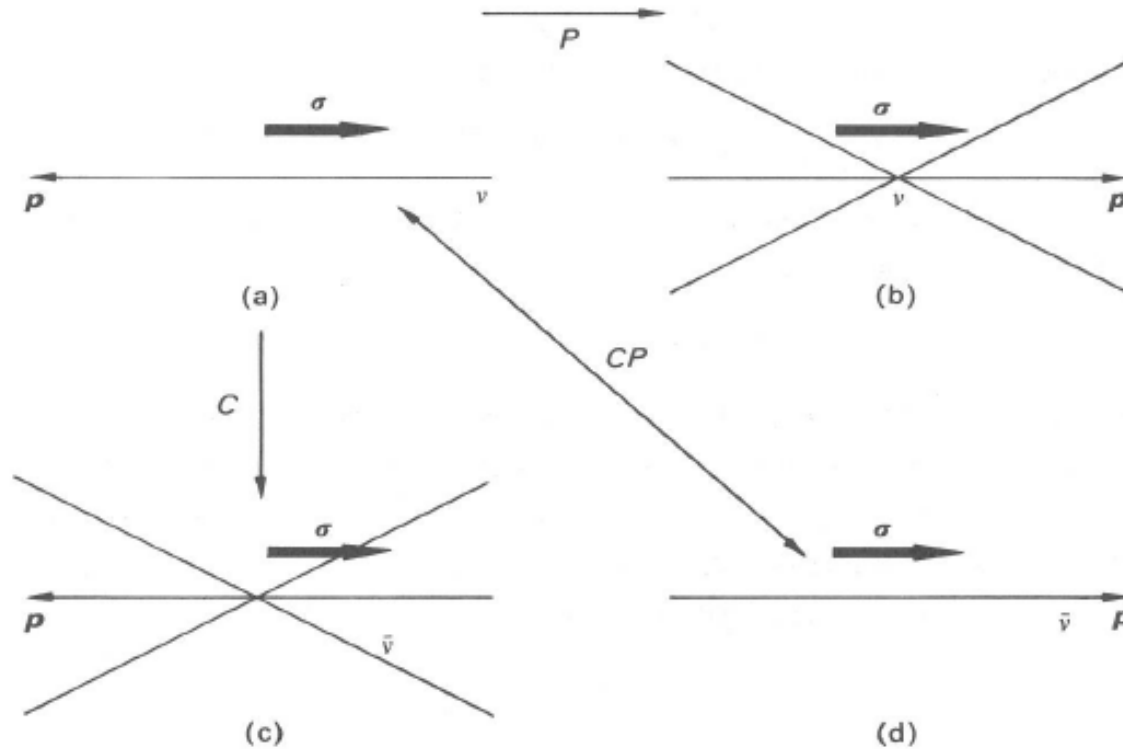
αντιπρωτόνιο: $Q=-e, B=-1, s=1/2, \mu=-2.79 (e\hbar/2Mc)$

ηλεκτρόνιο: $Q=-e, L_e=+1, s=1/2, \mu=-(e\hbar/2mc)$

ποζιτρόνιο : $Q=+e, L_e=-1, s=1/2, \mu=+(e\hbar/2mc)$

Μετασχηματισμοί σε C, P και CP

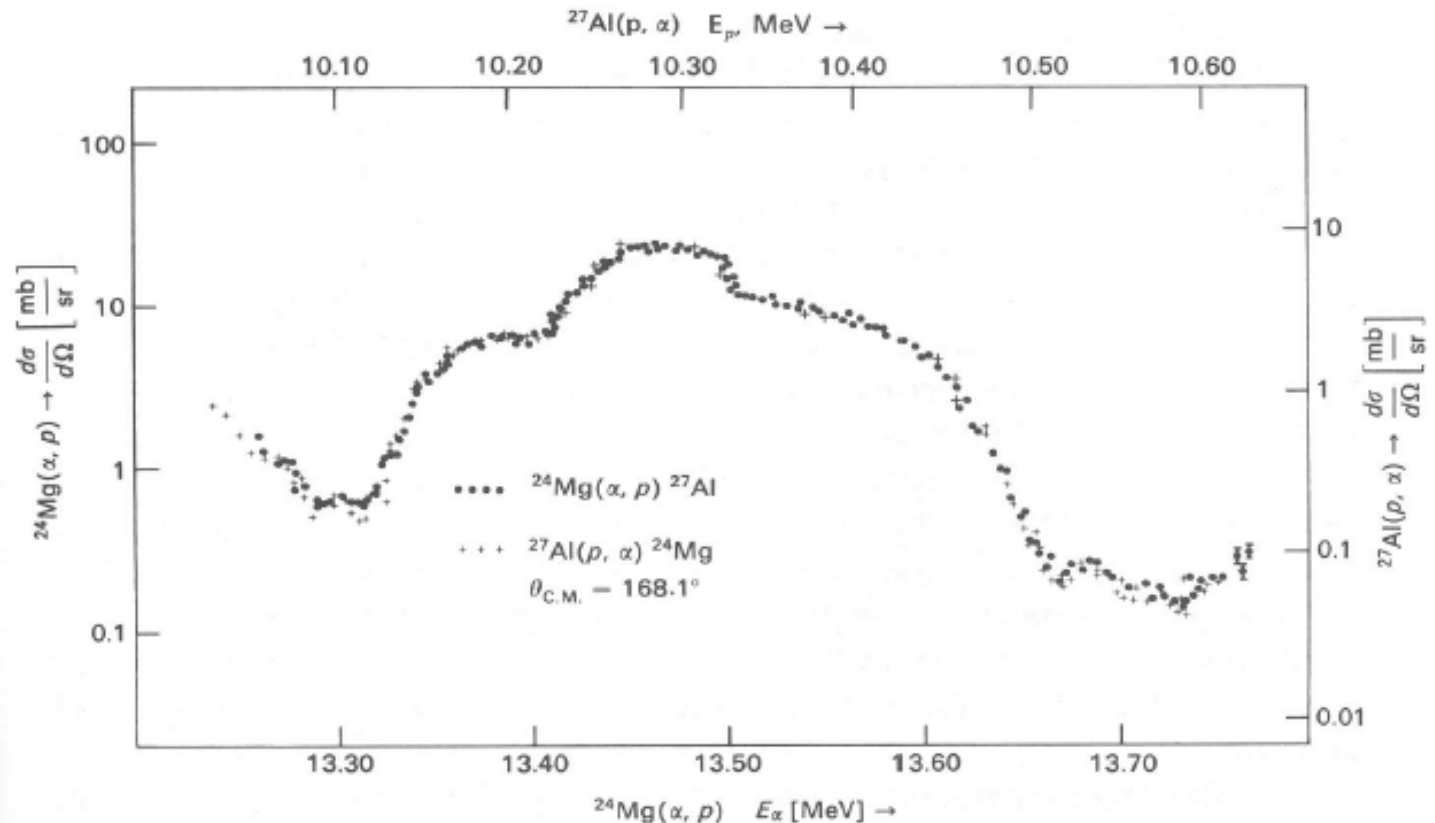
Η διαμήκης πόλωση των νετρίνο & αντινετρίνο



Η παραβίαση του αναλλοίωτου της **CP** είναι εξαιρετικά πιο ενδιαφέρον από την παραβίαση αυτού των **C** ή **P**.

Αναλλοίωτο χρονικής αναστροφής

Πειραματική Επιβεβαίωση



Η ισότητα των ενεργών διατομών των πυρηνικών αντιδράσεων $^{24}\text{Mg}(\alpha, p)^{27}\text{Al}$ και $^{27}\text{Al}(p, \alpha)^{24}\text{Mg}$ επιβεβαιώνει το αναλλοίωτο της χρονικής αναστροφής που είναι ισοδύναμο με την αρχή του λεπτομερούς ισοζυγίου (detailed Balance).

Ποιες από τις αντιδράσεις παραβιάζουν ένα νόμο διατήρησης και ποιόν

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \gamma$$

$$e^- \rightarrow \nu_e + \gamma$$

$$p + p \rightarrow p + \Sigma^+ + K^-$$

$$p \rightarrow e^+ + \nu_e$$

$$p \rightarrow e^+ + n + \nu_e$$

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

1. Διατήρηση λεπτονικού αριθμού
2. Διατήρηση φορτίου
3. Διατήρηση φορτίου
4. Διατήρηση βαρυονικού αριθμού
5. Διατήρηση ενέργειας
6. Επιτρέπεται
7. Επιτρέπεται

Για κάθε διάσπαση από τις παρακάτω δώστε ένα νόμο διατήρησης που παραβιάζεται και την απαγορεύει:

$$n \rightarrow p + e^{-}$$

1. Διατήρηση στροφορμής και λεπτονικού αριθμού

$$n \rightarrow \pi^{+} + e^{-}$$

2. Διατήρηση βαρυονικού και λεπτονικού αριθμού

$$n \rightarrow p + \pi^{-}$$

3. Διατήρηση ενέργειας

$$n \rightarrow p + \gamma$$

4. Διατήρηση φορτίου

Explain why each of the following particles cannot exist according to the quark model.

- (a) A baryon of spin 1.
- (b) An antibaryon of electric charge +2.
- (c) A meson with charge +1 and strangeness -1 .
- (d) A meson with opposite signs of charm and strangeness.

Quarks spin = 1/2		
Flavor	Approx. Mass GeV/c ²	Electric charge
u up	0.002	2/3
d down	0.005	-1/3
c charm	1.3	2/3
s strange	0.1	-1/3
t top	173	2/3
b bottom	4.2	-1/3

	S	C	B	T
d	0	0	0	0
u	0	0	0	0
s	-1	0	0	0
c	0	1	0	0
b	0	0	-1	0
t	0	0	0	1

Έχοντας 4.5 GeV διαθέσιμη ενέργεια, ποιο είναι το βαρύτερο ισότοπο που μπορεί να κανείς να παράγει θεωρητικά;

1. ^2D
2. ^3He
3. ^3T

Λύση

Με 4.5 GeV διαθέσιμη ενέργεια μπορεί κανείς να παράγει βαρυόνια με ενέργεια μέχρι 2.25 GeV. Για να διατηρείτε ο βαρυονικός αριθμός θα πρέπει να παράγονται ο ίδιος αριθμός βαρυονίων και αντιβαρυονίων ταυτόχρονα. Άρα τελικά μόνο η μισή ενέργεια είναι διαθέσιμη για την παραγωγή βαρυονίων. Από τα τρία ισότοπα μόνο το ^2D έχει μάζα ηρεμίας μικρότερη των 2.5 GeV. Η σωστή απάντηση είναι (1)

Σε μια σύγκρουση μεταξύ ενός ακίνητου πρωτονίου και κινούμενου πρωτονίου παράγεται σωματίδιο με μάζα ηρεμίας M επιπλέον των δύο πρωτονίων. Να βρεθεί η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να έχει το κινούμενο πρωτόνιο ώστε να είναι δυνατή αυτή η αντίδραση.

Λύση:

Στο ενεργειακό κατώφλι της αντίδρασης

$$p + p \rightarrow M + p + p,$$

τα σωματίδια στο δεξί σκέλος παράγονται σε ηρεμία. Η ενέργεια και η ορμή του κινούμενου σωματιδίου είναι E_p p_p αντίστοιχα. Η αναλλοίωτη μάζα του συστήματος στο κατώφλι είναι :

$$S = (E_p + m_p)^2 - p_p^2 = (2m_p + M)^2.$$

$$E_p^2 = m_p^2 + p_p^2,$$

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{(2m_p + M)^2 - 2m_p^2}{2m_p} \\ &= m_p + 2M + \frac{M^2}{2m_p}. \end{aligned}$$

Ένα σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m και κινητική ενέργεια διπλάσια της μάζας ηρεμίας του συγκρούεται με ένα ακίνητο σωματίδιο ίσης μάζας. Τα δύο σωματίδια συνδυάζονται και παράγουν ένα νέο σωματίδιο. Να υπολογιστεί η μάζα ηρεμίας του νέου σωματιδίου.

Λύση

Έστω M η μάζα του νέου σωματιδίου. Το κινούμενο σωματίδιο έχει συνολική ενέργεια $E = m + T = 3m$.

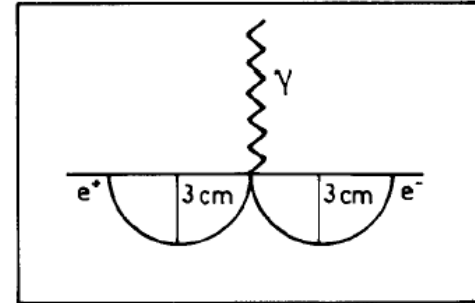
Στο όριο όπου το σωματίο παράγεται σε ηρεμία και το τετράγωνο της αναλλοίωτης μάζας είναι

$$S = (E + m)^2 - p^2 = M^2$$

$$\text{Με } E^2 - p^2 = m^2, \text{ έχουμε } M^2 = E^2 + 2Em + m^2 - p^2 = 2Em + 2m^2 = 8m^2,$$

$$M = 2\sqrt{2}m$$

A certain electron-positron pair produced cloud chamber tracks of radius of curvature 3 cm lying in a plane perpendicular to the applied magnetic field of magnitude 0.11 Tesla (Fig. 4.3). What was the energy of the γ -ray which produced the pair?



$$\begin{aligned}
 pc &= ecB\rho \\
 evB &= \frac{m\gamma v^2}{\rho} = \frac{pv}{\rho}, & & = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^8}{1.6 \times 10^{-13}} B\rho \\
 & & & = 300B\rho
 \end{aligned}$$

with B in Tesla, ρ in meter and p in MeV/ c . Hence, on putting $c = 1$, the momentum of the e^+ or e^- is

$$p = 300B\rho = 300 \times 0.11 \times 0.03 = 0.99 \text{ MeV}/c,$$

and its energy is

$$E = \sqrt{p^2 + m_e^2} = \sqrt{0.99^2 + 0.51^2} = 1.1 \text{ MeV}.$$

Therefore the energy of the γ -ray that produced the e^+e^- pair is approximately

$$E_\gamma = 2E = 2.2 \text{ MeV}.$$