

Στοιχεία Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων (5ου εξαμήνου, χειμερινό 2016-17)

Τμήμα G3: Κ. Κορδάς & Χ. Πετρίδου

Μάθημα 12, 13, 14

Πυρηνικό μοντέλο των φλοιών

Κώστας Κορδάς

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Πυρηνική & Στοιχειώδη Ι, Αριστοτέλειο Παν. Θ/νίκης, 11,18,24 Νοεμβρίου 2016

Σήμερα

- **Πυρηνικό μοντέλο των φλοιών - εκτίμηση βάθους δυναμικού, ενεργειακών σταθμών και μαγικών αριθμών**
 - Βιβλίο C&G, Παράρτημα Β, Κεφ. 5, 5.1-5.7
 - Βιβλίο Χ. Ελευθεριάδη: κεφ. 6, παρ 6.3, 6.4
 - Σημειώσεις Πυρηνικής, Κεφ. 8
- **Χαρακτηριστικά πυρήνων πέρα από το μέγεθος και τη μάζα: σπιν (spin), ομοτιμία (parity), μαγνητική ροπή, ηλεκτρική τετραπολική ροπή**
 - Βιβλίο C&G, Παράρτημα Γ , παρ. 1.3, Κεφ. 5, παρ. 5.5-5.7
 - Σημειώσεις Πυρηνικής, Κεφ. 1, σελ. 4-5 (μαγνητική ροπή)
- **Ιστοσελίδα:** <http://www.physics.auth.gr/course/show/125>

Πυρήνες με δέσμια νουκλεόνια - τα πρωτόνια και τα νετρόνια σε διαφορετικά πηγάδια δυναμικού

Ενέργεια Fermi και βάθος πηγαδιών

Δέσμιο σύστημα **φερμιονίων** σε πηγάδι δυναμικού → **υπάρχουν ενεργειακές στάθμες** που συμπληρώνονται από το βάθος του πηγαδιού και προς τα πάνω, μέχρι μια ενέργεια που τη λέμε **Ενέργεια Fermi (E_F)**

Διαφορετικά πηγάρια ρ, η

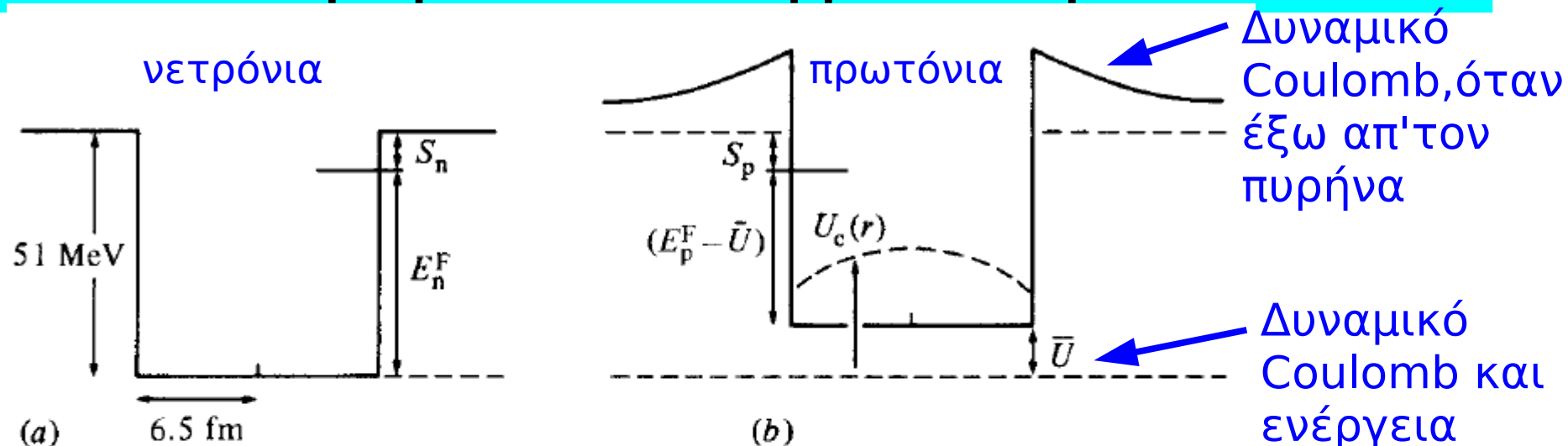


Fig. 5.1 A schematic representation of (a) the neutron potential well and (b) the proton potential well for the nucleus $^{208}_{82}\text{Pb}$. E_n^F and $(E_p^F - \bar{U})$ have been estimated using equation (5.5). The observed neutron separation energy S_n of 7.4 MeV implies a neutron well-depth of 51 MeV. The observed proton separation energy S_p of 8.9 MeV implies that $\bar{U} = 11$ MeV. $\bar{U}$ represents the sum of the mean electrostatic potential and the asymmetry energy.

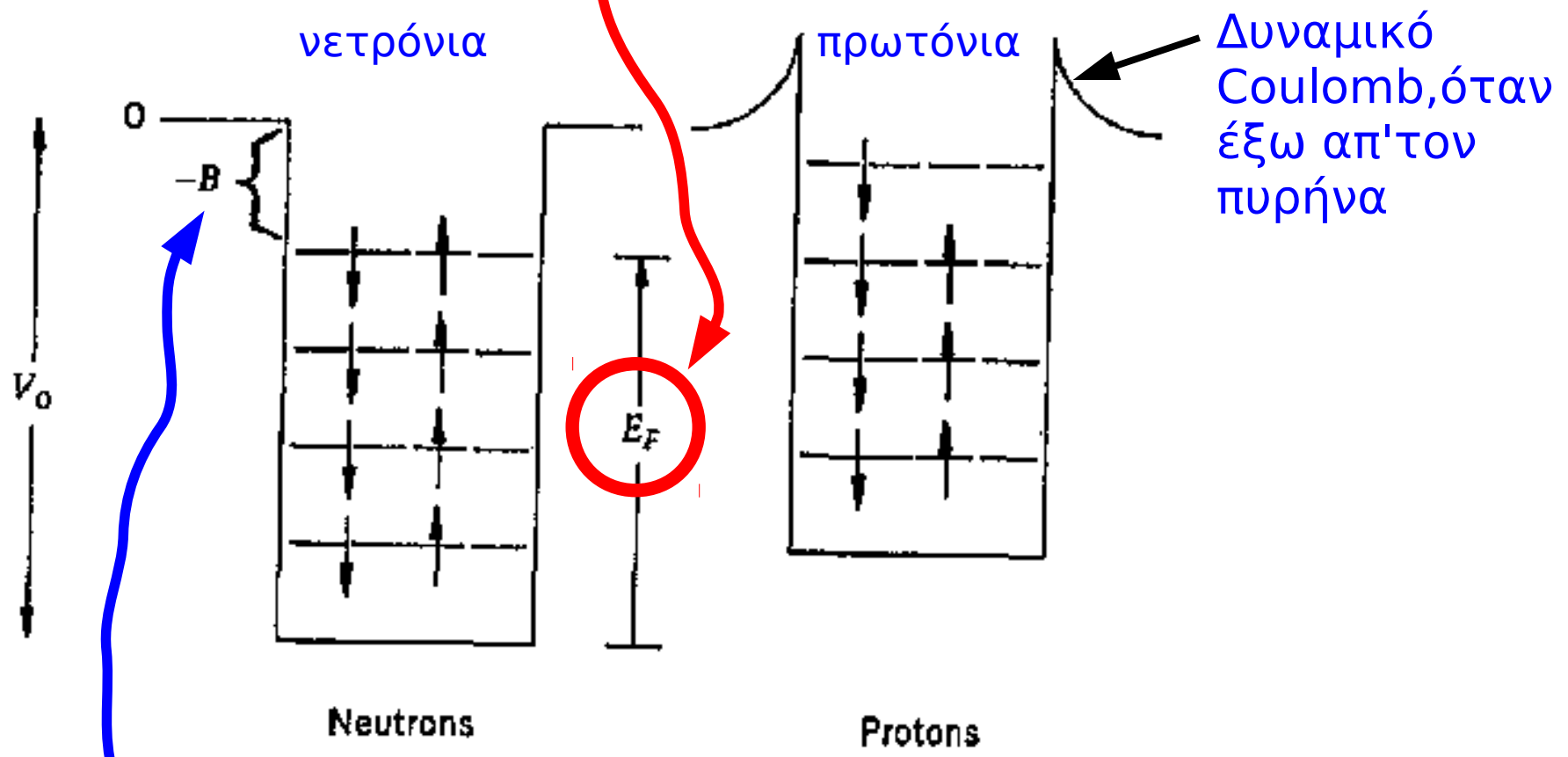
$$U_c(r) = \begin{cases} \frac{(Z-1)e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left[\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right], & r < R, \\ \frac{(Z-1)e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > R, \end{cases} \quad (5.1)$$

where R is the nuclear radius.

Σχήμα 5.1 και εξίσωση 5.1 του βιβλίου σας

Διαφορετικά πηγάρια ρ, n

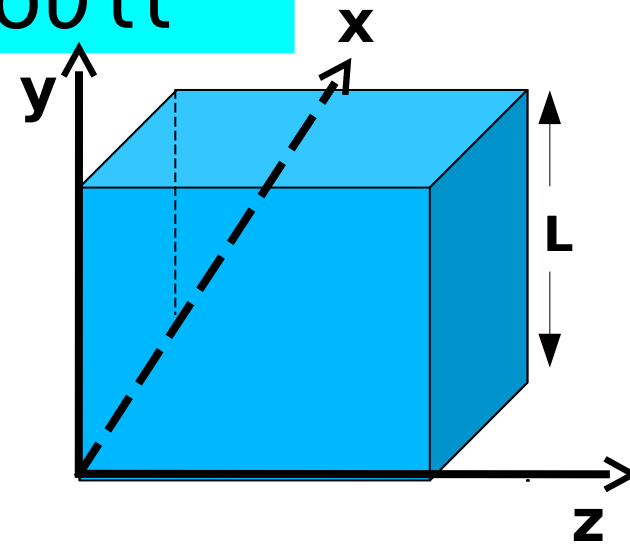
Δέσμιο σύστημα **φερμιονίων** σε πηγάρδι δυναμικού → ενεργειακές στάθμες, συμπληρωμένες από το βάθος του πηγαδιού και πρός τα πάνω, **μέχρι μια ενέργεια που τη λέμε Ενέργεια Fermi (E_F)**



Ενέργεια σύνδεσης του τελευταίου νουκλεονίου =
= Ενέργεια διαχωρισμού του = $S_n(N, Z)$

Πυκνότητα καταστάσεων σε κουτί

- Παράρτημα Β βιβλίου σας C&G, πυκνότητα καταστάσεων, σε κυβικό κιβώτιο (και σε σκεδαζόμενο σύστημα).



Στάσιμο κύμα σε κουτί:
ημίτονα και συνημίτονα

$$\psi(x, y, z) = \text{const.} \cdot \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \cdot \sin(k_z z)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(x, y, z) \psi &= E \psi \\ V(x, y, z) &= \begin{cases} 0 & \text{εντός} \\ \infty & \text{εκτός} \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L}, \quad k_y = \frac{n_y \pi}{L}, \quad k_z = \frac{n_z \pi}{L}, \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3 \dots$$

$$k^2 = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$$

Σημείωση: τα n_x, n_y, n_z είναι θετικά, και τα k_x, k_y, k_z επίσης

Για κάθε E αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα k

Για κάθε k αντιστοιχούν πολλά n_x, n_y, n_z (δηλαδή πολλές καταστάσεις)

Πόσες καταστάσεις υπάρχουν για $E \leq E_0$ ή αντίστοιχα για $k \leq k_0$;;;

Αριθμός & Πυκνότητα καταστάσεων σε κουτί

- Χώρος φάσεων:** οι άξονες είναι οι ορμές P_x , P_y , P_z ή (ισοδύναμα) οι κυματάριθμοι k_x , k_y , k_z

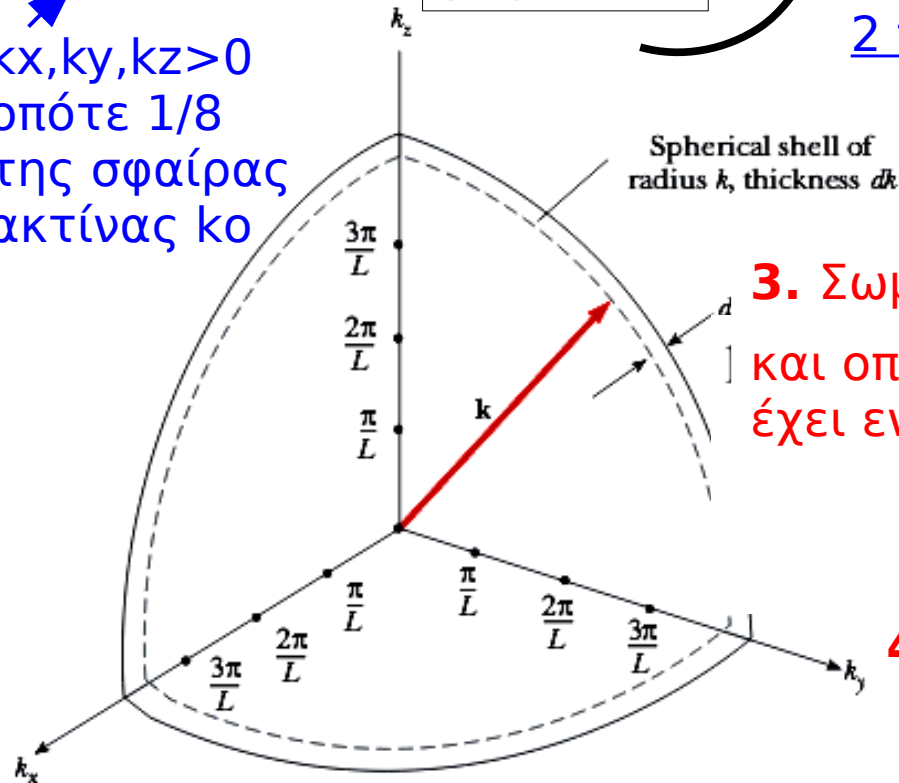
Αριθμός διακριτών σημείων (k_x, k_y, k_z) με $k < k_0 =$

(όγκος στο χώρο των φάσεων) $\times$

(πυκνότητα σημείων στο πλέγμα των καταστάσεων)

$$= \frac{1}{8} \frac{4\pi k_0^3}{3} \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k_0^3}{3}$$

$k_x, k_y, k_z > 0$
οπότε 1/8
της σφαίρας
ακτίνας k_0



- Αριθμός καταστάσεων N_0 με $k < k_0$

Οι καταστάσεις επί 2 επειδή μπορούμε να έχουμε 2 προσανατολισμούς spin σε κάθε (k_x, k_y, k_z)

$$N_0 = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k_0^3}{3}, \quad \text{or} \quad k_0^3 = 3\pi^2 \frac{N_0}{V}$$

- Σωματίδιο σε καθορισμένη κατάσταση (n_x, n_y, n_z) και οποιονδήποτε προσανατολισμό spin, έχει ενέργεια:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$$

- Οπότε, αριθμός καταστάσεων με $k < k_0$:

$$N(E) = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2mE}{\hbar^2} \right)^{3/2}$$

Ενέργεια Fermi για το πηγάδι νετρονίων και πρωτονίων στον πυρήνα

Όγκος πυρήνα
που έχει ακτίνα R

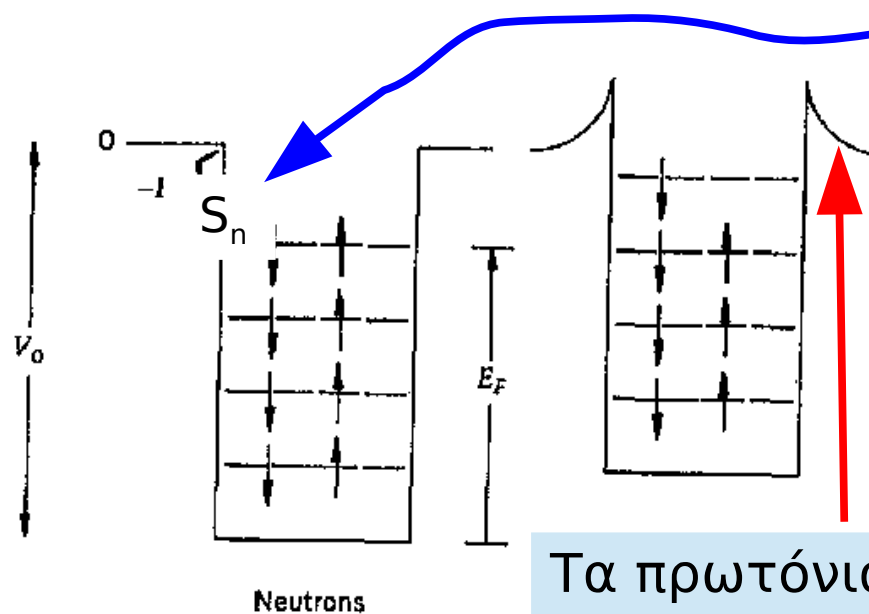
$$V = 4\pi R^3 / 3$$

Οπότε, αριθμός N των καταστάσεων
που μπορούν να καταλάβουν τα νετρόνια
και τα πρωτόνια:

$$N \approx \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m_n E_n^F}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad Z \approx \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m_p (E_p^F - \bar{U})}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

E_n^F, E_p^F είναι οι ενέργειες Fermi για το πηγάδι των νετρονίων και των πρωτονίων
Και η κινητικές ενέργειές τους είναι E_n^F και $E_p^F - \bar{U}$ αντίστοιχα

• Για $N=Z$ θα πρέπει N/V να είναι το μισό της πυκνότητας πυρηνικής
ύλης ($\sim 0.085 \text{ fm}^{-3}$) $\rightarrow$ Οπότε: $E_n^F \sim 38 \text{ MeV}$



• Από την ενέργεια Fermi μέχρι $E=0$, μένει η
ενέργεια διαχωρισμού $S_n(N,Z)$ ενός
νετρονίου από έναν πυρήνα:

$$S_n(N,Z) = B(N,Z) - B(N-1,Z)$$

που είναι της τάξης της ενέργειας
σύνδεσης ανά νουκλεόνιο: $\sim 8 \text{ MeV}$

• Οπότε, το βάθος δυναμικού νετρονίων
είναι: $\sim 38 + 8 \text{ MeV} \sim 46 \text{ MeV}$

Τα πρωτόνια έχουν επιπλέον και το φράγμα Coulomb

Πυρηνικό Πρότυπο Φλοιών - εξίσωση Schroedinger (ανάλογα με τα άτομα) με πηγάδι δυναμικού

Εξίσωση Schroedinger μέσα στον πυρήνα ($V=0$)

$$-\frac{\hbar^2}{2m_n} \nabla^2 \psi_n = E_n \psi_n,$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_p} \nabla^2 \psi_p = (E_p - \bar{U}) \psi_p,$$

Αναζητούμε πεπερασμένες λύσεις για $r=0$ και μηδέν για μεγαλύτερο ή ίσο της πυρηνικής ακτίνας R

$$\psi(r, \theta, \phi) = u_l(r) Y_{lm}(\theta, \phi),$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m_n} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (ru_l) + \frac{\hbar^2}{2m_n} \frac{l(l+1)}{r^2} u_l = E u_l,$$

Για $l=0$, συμβατές με $r=0$ είναι οι λύσεις: $u_s(r) = \frac{\sin(kr)}{kr}$ with $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n}$. Τι τιμές παίρνει το k ;

• Για $r=R$: $u(R)=0 \rightarrow \sin(x)/x = 0$

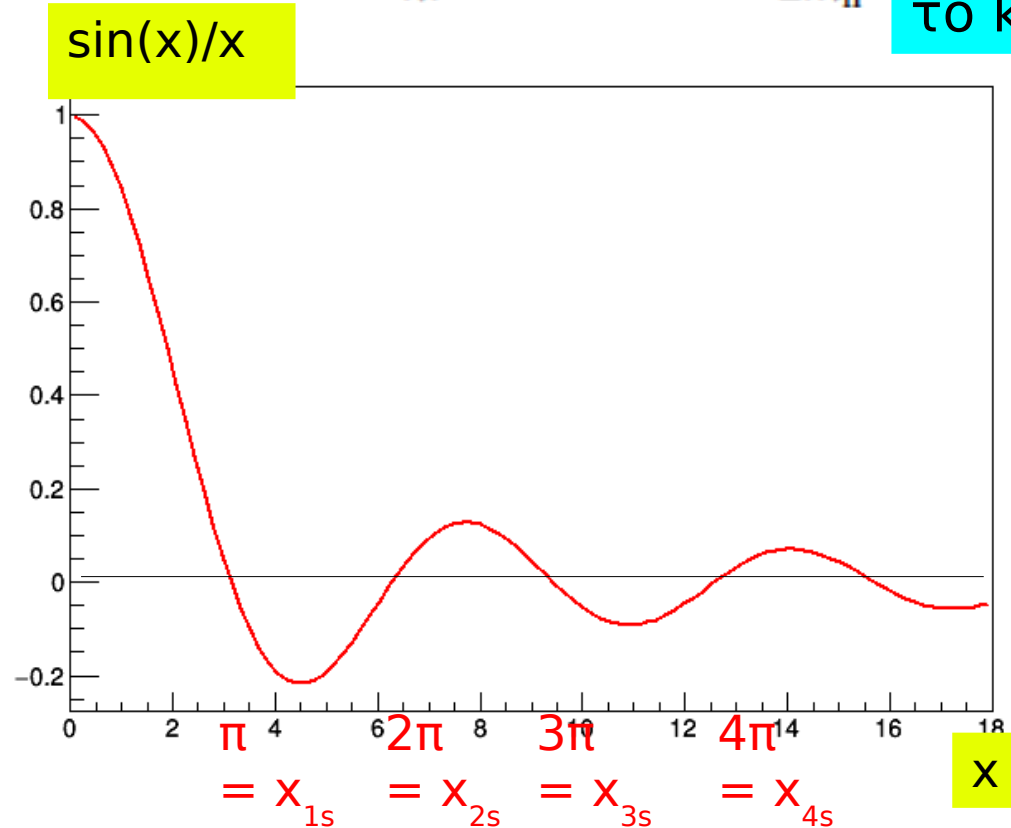
$$x=kR$$

$$k = k_n = n\pi/R,$$

Με $k = x/R$,
βρίσκουμε τις
**επιτρεπτές τιμές
ενέργειας**

$$E(n, s) = \frac{\hbar^2}{2m_n} \left(\frac{n\pi}{R} \right)^2.$$

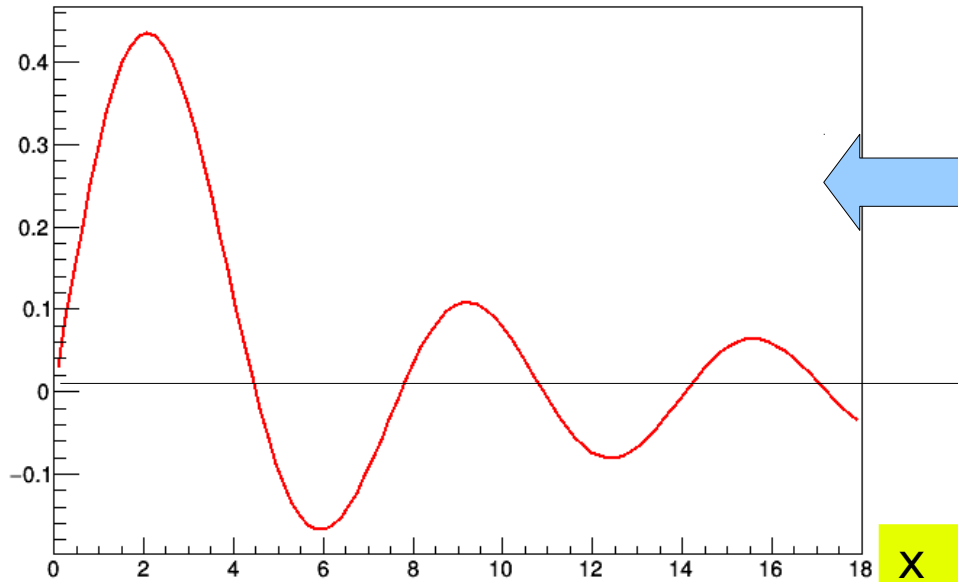
Οι ενέργειες
είναι
κβαντισμένες!



Για $l=1$, συμβατές με $r=0$ είναι οι λύσεις (μπορείτε να το επιβεβαιώσετε):

$$-\frac{\hbar^2}{2m_n} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(ru_p) + \frac{\hbar^2}{m_n r^2} u_p = E u_p, \quad u_p(r) = \frac{\sin(kr)}{(kr)^2} - \frac{\cos(kr)}{(kr)}, \quad E = \frac{\hbar^2}{2m_n} k^2$$

$(\sin(x)/(x^2)) - \cos(x)/x$



4.49 7.73 10.90 14.07
 $= x_{1p}$ $= x_{2p}$ $= x_{3p}$ $= x_{4p}$

• Για $r=R$: $u(R)=0$

συμμε ως $x_{np} = k_n R$

$$u_p(R) = \frac{\sin(x_{np})}{(x_{np})^2} - \frac{\cos(x_{np})}{(x_{np})} = 0$$

$$E(n, p) = (\hbar^2 / 2m_n)(x_{np} / R)^2$$

Ίδια
σχέση
με πρίν.
Τι τιμές
παίρνει
το k ;

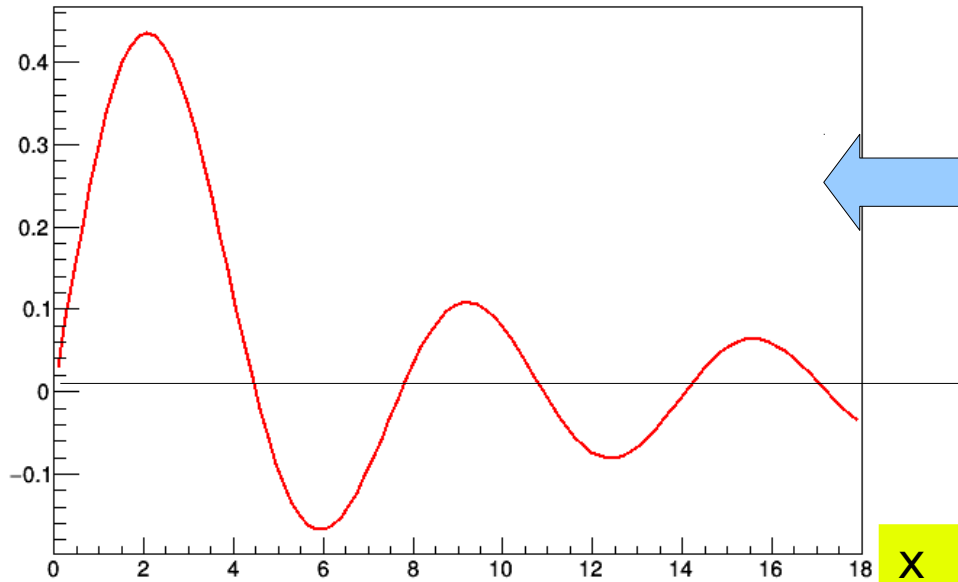
Με $k = x/R$,
βρίσκουμε τις
**επιτρεπτές
τιμές
ενέργειας**

Οι ενέργειες
είναι
κβαντισμένες!

Για $l=1$, συμβατές με $r=0$ είναι οι λύσεις (μπορείτε να το επιβεβαιώσετε):

$$-\frac{\hbar^2}{2m_n} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(ru_p) + \frac{\hbar^2}{m_n r^2} u_p = E u_p, \quad u_p(r) = \frac{\sin(kr)}{(kr)^2} - \frac{\cos(kr)}{(kr)}, \quad E = \frac{\hbar^2}{2m_n} k^2$$

$(\sin(x)/(x^2)) - \cos(x)/x$



4.49 7.73 10.90 14.07
 $= x_{1p}$ $= x_{2p}$ $= x_{3p}$ $= x_{4p}$

Γενικά, για κάθε τιμή " l " της στροφορμής, υπάρχει μια άλλη συνάρτηση (= "σφαιρική συνάρτηση Bessel $j_l(kr)$ ") που ικανοποιεί την εξίσωση Schroedinger, και που έχει μηδενικά σε διάφορες τιμές $x = kR$

• Για $r=R$: $u(R)=0$

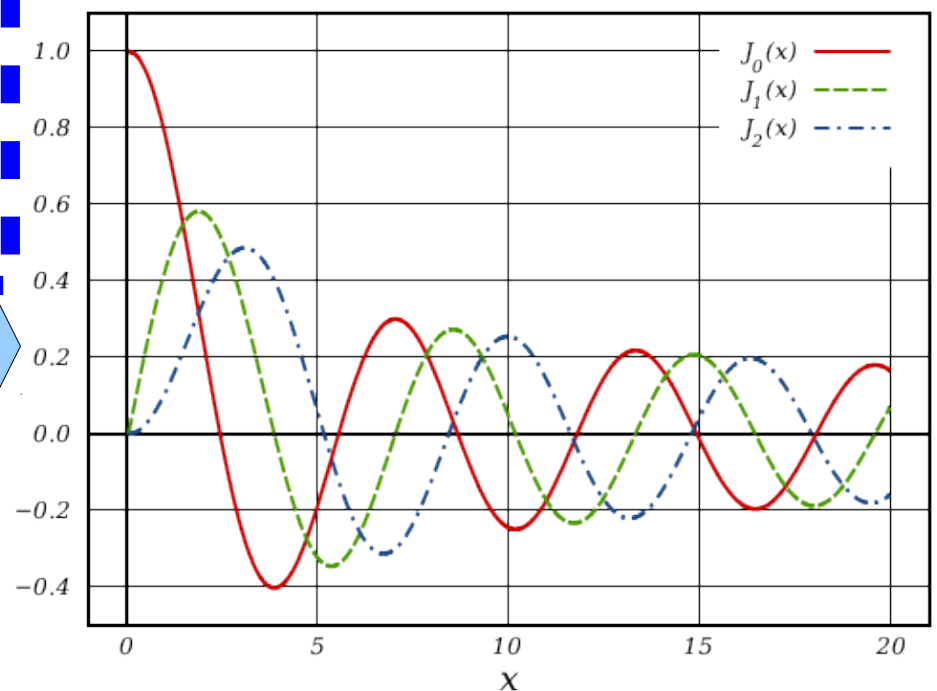
συμμε ως $x_{np} = k_n R$

$$u_p(R) = \frac{\sin(x_{np})}{(x_{np})^2} - \frac{\cos(x_{np})}{(x_{np})} = 0$$

$$E(n, p) = (\hbar^2 / 2m_n)(x_{np} / R)^2$$

Ίδια σχέση με πριν. Τι τιμές παίρνει το k ;

Με $k = x/R$, βρίσκουμε τις **επιτρεπτές τιμές ενέργειας**



Ακολουθία ενεργειακών σταθμών σε σφαιρικό πηγάδι με άπειρου ύψους τοιχώματα

Οπότε, για κάθε τιμή της στροφορμής “l” έχουμε ένα πλήθος λύσεων που τις ονομάζουμε $n=1, n=2, n=3, \dots$ και άρα έχουμε μια ακολουθία επιτρεπτών ενεργειών:

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2m_n} \left(\frac{x_{nl}}{R} \right)^2$$

Όσο μεγαλύτερο το x_{nl} τόσο μεγαλύτερη η ενέργεια της στάθμης

$l=0$

	x_{nl}	Neutron		Proton	
1s	3.14	$1s_{\frac{1}{2}}$	2	$1s_{\frac{1}{2}}$	1s
1p	4.49	$1p_{\frac{3}{2}}$	6	$1p_{\frac{3}{2}}$	1p
		$1p_{\frac{1}{2}}$	8	$1p_{\frac{1}{2}}$	
1d	5.76	$1d_{\frac{5}{2}}$	14	$1d_{\frac{5}{2}}$	1d
		$2s_{\frac{1}{2}}$	16	$2s_{\frac{1}{2}}$	
2s	6.28	$1d_{\frac{3}{2}}$	20	$1d_{\frac{3}{2}}$	2s
				20	
1f	6.99	$1f_{\frac{7}{2}}$	28		
		$2p_{\frac{3}{2}}$	32	28	$1f_{\frac{7}{2}}$
2p	7.73	$1f_{\frac{5}{2}}$	38		1f
		$2p_{\frac{1}{2}}$	40	32	$2p_{\frac{3}{2}}$
1g	8.18	$1g_{\frac{9}{2}}$	50	38	$1f_{\frac{5}{2}}$
		$2d_{\frac{5}{2}}$	56	40	$2p_{\frac{1}{2}}$
2d	9.10	$1g_{\frac{7}{2}}$	64		
		$1h_{\frac{11}{2}}$	76	50	$1g_{\frac{9}{2}}$
1h	9.36	$3s_{\frac{1}{2}}$	78		
		$2d_{\frac{3}{2}}$	82	58	$1g_{\frac{7}{2}}$
3s	9.42	$2f_{\frac{7}{2}}$	90	64	$2d_{\frac{5}{2}}$
		$1h_{\frac{9}{2}}$	100		

Ακολουθία ενεργειακών σταθμών σε σφαιρικό πηγάδι με τοιχώματα απείρου ύψους

Οπότε, για κάθε τιμή της στροφορμής “l” έχουμε ένα πλήθος λύσεων που τις ονομάζουμε $n=1, n=2, n=3, \dots$ και άρα έχουμε μια ακολουθία επιτρεπτών ενεργειών:

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2m_n} \left(\frac{x_{nl}}{R} \right)^2$$

Όσο μεγαλύτερο το x_{nl} τόσο μεγαλύτερη η ενέργεια της στάθμης

	x_{nl}	Neutron		Proton	
1s	3.14	$1s_{\frac{1}{2}}$	2	2	$1s_{\frac{1}{2}}$
1p	4.49	$1p_{\frac{3}{2}}$	6	6	$1p_{\frac{3}{2}}$
		$1p_{\frac{1}{2}}$	8	8	$1p_{\frac{1}{2}}$
1d	5.76	$1d_{\frac{5}{2}}$	14	14	$1d_{\frac{5}{2}}$
		$2s_{\frac{1}{2}}$	16	16	$2s_{\frac{1}{2}}$
2s	6.28	$1d_{\frac{3}{2}}$	20	20	$1d_{\frac{3}{2}}$
1f	6.99	$1f_{\frac{7}{2}}$	28		
		$2p_{\frac{3}{2}}$	32	28	$1f_{\frac{7}{2}}$
2p	7.73	$1f_{\frac{5}{2}}$	38		
		$2p_{\frac{1}{2}}$	40	32	$2p_{\frac{3}{2}}$
1g	8.18	$1g_{\frac{9}{2}}$	50	38	$1f_{\frac{5}{2}}$
		$2d_{\frac{5}{2}}$	56	40	$2p_{\frac{1}{2}}$
2d	9.10	$1g_{\frac{7}{2}}$	64		
		$1h_{\frac{11}{2}}$	76	50	$1g_{\frac{9}{2}}$
1h	9.36	$3s_{\frac{1}{2}}$	78		
		$2d_{\frac{3}{2}}$	82	58	$1g_{\frac{7}{2}}$
3s	9.42	$2f_{\frac{7}{2}}$	90	64	$2d_{\frac{5}{2}}$
		$1h_{\frac{9}{2}}$	100		

Ακολουθία ενεργειακών σταθμών σε σφαιρικό πηγάδι με τοιχώματα απείρου ύψους

Οπότε, για κάθε τιμή της στροφορμής “ l ” έχουμε ένα πλήθος λύσεων που τις ονομάζουμε $n=1, n=2, n=3, \dots$ και άρα έχουμε μια ακολουθία επιτρεπτών ενεργειών:

$l=0$

$l=1$

- Για κάθε ζεύγος (n,l) έχουμε $2*(2*l+1)$ εκφυλισμένες καταστάσεις (προσέξτε τον έξτρα παράγοντα 2 λόγω σπιν 1/2)

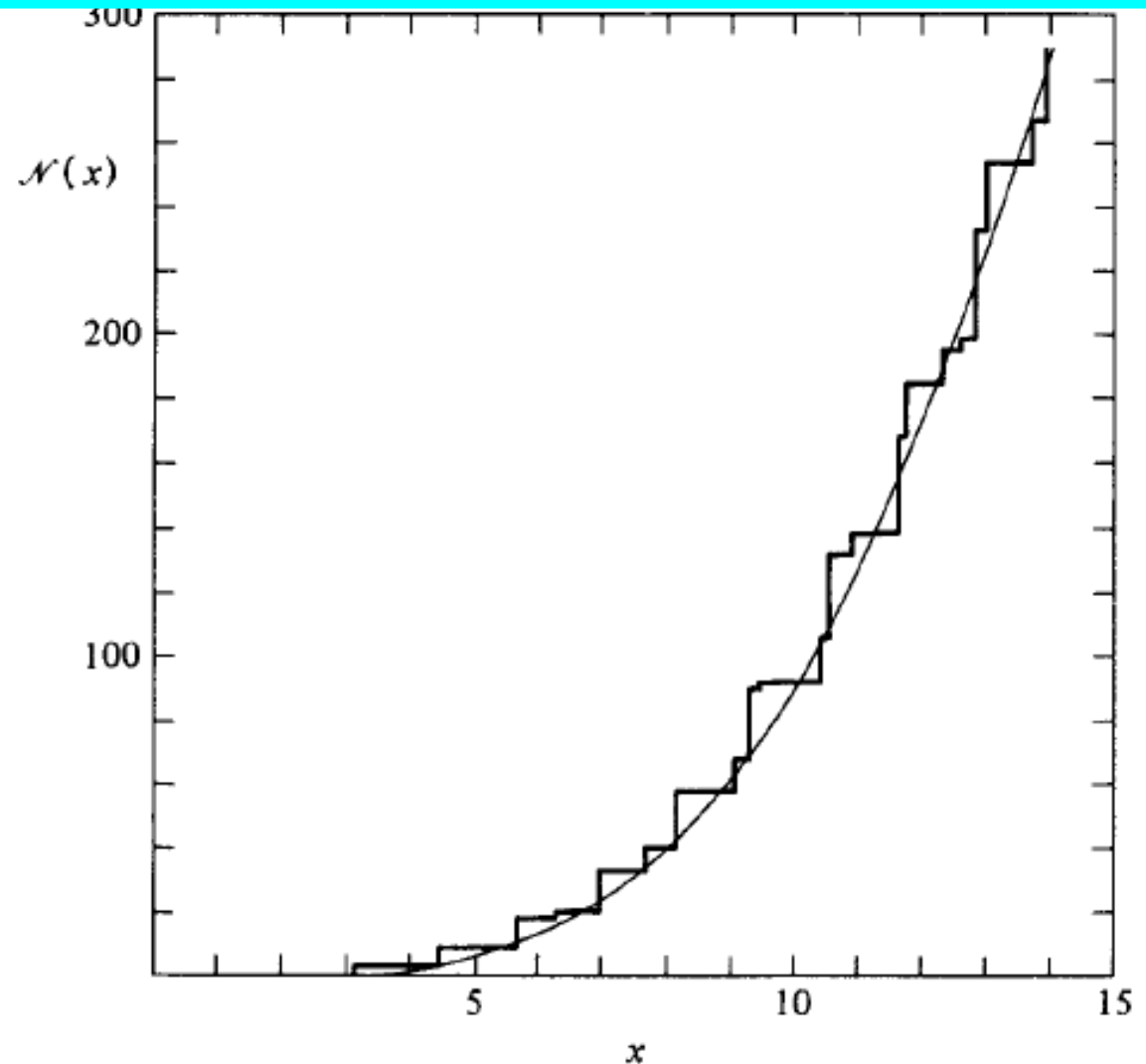
	x_{nl}	Neutron		Proton	
1s	3.14	$1s_{\frac{1}{2}}$	2	2	$1s_{\frac{1}{2}}$
1p	4.49	$1p_{\frac{3}{2}}$	6	6	$1p_{\frac{3}{2}}$
		$1p_{\frac{1}{2}}$	8	8	$1p_{\frac{1}{2}}$
1d	5.76	$1d_{\frac{5}{2}}$	14	14	$1d_{\frac{5}{2}}$
		$2s_{\frac{1}{2}}$	16	16	$2s_{\frac{1}{2}}$
2s	6.28	$1d_{\frac{3}{2}}$	20	20	$1d_{\frac{3}{2}}$
1f	6.99	$1f_{\frac{7}{2}}$	28		$1f_{\frac{7}{2}}$
		$2p_{\frac{3}{2}}$	32	28	$1f_{\frac{7}{2}}$
2p	7.73	$1f_{\frac{5}{2}}$	38		$1f$
		$2p_{\frac{1}{2}}$	40	32	$2p_{\frac{3}{2}}$
1g	8.18	$1g_{\frac{9}{2}}$	50	38	$1f_{\frac{5}{2}}$
		$2d_{\frac{5}{2}}$	56	40	$2p_{\frac{1}{2}}$
2d	9.10	$1g_{\frac{7}{2}}$	64		
		$1h_{\frac{11}{2}}$	76	50	$1g_{\frac{9}{2}}$
1h	9.36	$3s_{\frac{1}{2}}$	78		$1g$
		$2d_{\frac{3}{2}}$	82	58	$1g_{\frac{7}{2}}$
3s	9.42	$2f_{\frac{7}{2}}$	90	64	$2d_{\frac{5}{2}}$
		$1h_{\frac{9}{2}}$	100		

Αριθμός καταστάσεων μέχρι κάποια ενέργεια, δηλ, μέχρι κάποια τιμή του x_{nl}

1

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2m_n} \left(\frac{x_{nl}}{R} \right)^2$$

- Για κάθε ζεύγος (n,l) έχουμε $2 \cdot (2 \cdot l + 1)$ εκφυλισμένες καταστάσεις (προσέξτε τον έξτρα παράγοντα 2 λόγω σπιν 1/2)



2

$$\mathcal{N}(x) = \frac{4x^3}{9\pi} \left(1 - \frac{9\pi}{8x} \right) = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m_n E}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left[1 - \frac{3\pi}{8} \frac{S}{V} \left(\frac{\hbar^2}{2m_n E} \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Πυρηνικό Πρότυπο Φλοιών -
εξίσωση Schroedinger
(ανάλογα με τα άτομα)
με πηγάδι δυναμικού και
με όρο για σύζευξη spin-orbit ($L \cdot S$)

Υπάρχει όμως και όρος $L \cdot S$ στη δυναμική ενέργεια

Από το απλό πηγάδι δυναμικού περιμέναμε: $E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2m_n} \left(\frac{x_{nl}}{R} \right)^2$

Όμως, στον πίνακα πρίν είδαμε τις περισσότερες ενεργειακές στάθμες (n,l) να έχουν υποστάθμες: Υπάρχει κι άλλος σημαντικός κβαντικός αριθμός. Ποιός είναι;

Εκτός από το κεντρικό δυναμικό (συνάρτηση της απόστασης r μόνο) υπάρχει και **όρος με σύζευξη $L \cdot S$ στη Χαμιλτονιανή:**

Συνεισφορά στην ενέργεια (με $U_{so} < 0$) :

$$U_{so}(r) \mathbf{L} \cdot \mathbf{s}$$

(L = τροχιακή στροφορμή,
 S = spin)

→ Καλοί κβαντικοί αριθμοί: l, s, j, m_j

όπου “ j ” ο κβαντικός αριθμός της ολικής στροφορμής $\mathbf{J}$,
και m_j ο κβαντικός αριθμός για την προβολή της $\mathbf{J}$ στον άξονα z .

Η ολική στροφορμή είναι άθροισμα των l και s .

Αφού τα νουκλεόνια είναι φερμιόνια ($s=1/2$), έχουμε:

$$j = l + 1/2 \text{ ή } j = l - 1/2.$$

Για κάθε j , το m_j μπορεί να είναι $\{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$: $2j+1$ πιθανές τιμές

Οπότε:

$$\text{για } j=l+1/2 : 2(l+1/2)+1 = 2l+2 \text{ τιμές, για } j=l-1/2 : 2(l-1/2)+1 = 2l \text{ τιμές}$$

Αλληλεπίδραση $L \cdot S$: διαχωρισμός καταστάσεων με το ίδιο (n, l) , αλλά διαφορετική ολική στροφορμή j

- Ο όρος σύζευξης $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ ξεχωρίζει τις καταστάσεις με ίδιο $\{n, l\}$, αλλά διαφορετικούς προσανατολισμούς του σπιν ως προς L

Συνεισφορά στην ενέργεια (με $U_{so} < 0$) : $U_{so}(r) \mathbf{L} \cdot \mathbf{s}$

Η αναμενόμενη τιμή του $L \cdot S$ μπορεί να βρεθεί από την ταυτότητα:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{s} = \frac{1}{2}[(\mathbf{L} + \mathbf{s})^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{s}^2] = \frac{1}{2}[\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{s}^2], \quad (5.17)$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \langle l, s, j, j_z | \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} | l, s, j, j_z \rangle &= \frac{1}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \hbar^2 \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} l \hbar^2 & \text{if } j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}(l+1) \hbar^2 & \text{if } j = l - \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Επειδή βλέπουμε (π.χ., στον πίνακα πριν) οι $j = l + \frac{1}{2}$ να έχουν μικρότερη ενέργεια από τις $j = l - \frac{1}{2}$, δηλαδή:

$$[U_{so} \frac{1}{2} l \hbar^2] < [-U_{so} \frac{1}{2} (l+1) \hbar^2]$$

Συμπεραίνουμε ότι: $U_{so} < 0$.

Σημειώστε επίσης ότι: $\Delta E(j = l - \frac{1}{2}, j = l + \frac{1}{2}) = |U_{so}| * \frac{1}{2} * \hbar * (2l+1)$, αρκετή για να αλλάζει τη σειρά στις στάθμες, ειδικά στα μεγάλα l , όπως είδαμε στον πίνακα 5.1.

Αλληλεπίδραση $L \cdot S$: διαχωρισμός καταστάσεων με το ίδιο (n,l) , αλλά διαφορετική ολική στροφορμή j

- Ο όρος σύζευξης $L \cdot S$ ξεχωρίζει τις καταστάσεις με το ίδιο (n,l) , αλλά διαφορετική ολική στροφορμή j

- Π.χ. $1p \rightarrow l=1 \rightarrow$
 $\rightarrow [2 \cdot (2 \cdot 1 + 1)] = 6$ κατ.

- $1p$ με $j=1+1/2 = 3/2$ και $1p$ με $j=1-1/2 = 1/2$

- $1p_{3/2}$: 4 καταστάσεις ($m_j = -3/2, -1/2, 1/2, 3/2$)

- $1p_{1/2}$: 2 καταστάσεις ($m_j = -1/2, 1/2$)

- Στάθμες με ίδιο n,l : Αυτός με τη μικρότερη ολική στροφορμή ($j=l-1/2$) έχει μεγαλύτερη ενέργεια

	x_{nl}	Neutron		Proton	
1s	3.14	$1s_{1/2}$	2	2	$1s_{1/2}$
1p	4.49	$1p_{3/2}$	6	6	$1p_{3/2}$
		$1p_{1/2}$	8	8	$1p_{1/2}$
1d	5.76	$1d_{5/2}$	14	14	$1d_{5/2}$
		$2s_{1/2}$	16	16	$2s_{1/2}$
2s	6.28	$1d_{3/2}$	20	20	$1d_{3/2}$
1f	6.99	$1f_{7/2}$	28		
		$2p_{3/2}$	32	28	$1f_{7/2}$
2p	7.73	$1f_{5/2}$	38		
		$2p_{1/2}$	40	32	$2p_{3/2}$
1g	8.18	$1g_{9/2}$	50	38	$1f_{5/2}$
		$2d_{5/2}$	56	40	$2p_{1/2}$
2d	9.10	$1g_{7/2}$	64		
		$1h_{11/2}$	76	50	$1g_{9/2}$
1h	9.36	$3s_{1/2}$	78		
		$2d_{3/2}$	82	58	$1g_{7/2}$
3s	9.42	$2f_{7/2}$	90	64	$2d_{5/2}$
1u		$1h_{9/2}$	100		

Συμπληρωμένοι φλοιοί και μαγικοί αριθμοί

→ Καλοί κβαντικοί αριθμοί:
l, s, j, m_j

- Στάθμες με ίδιο n, l:

Αυτός με τη μικρότερη ολική στροφορμή ($j = l - 1/2$) έχει μεγαλύτερη ενέργεια

Συμπληρωμένοι φλοιοί

και

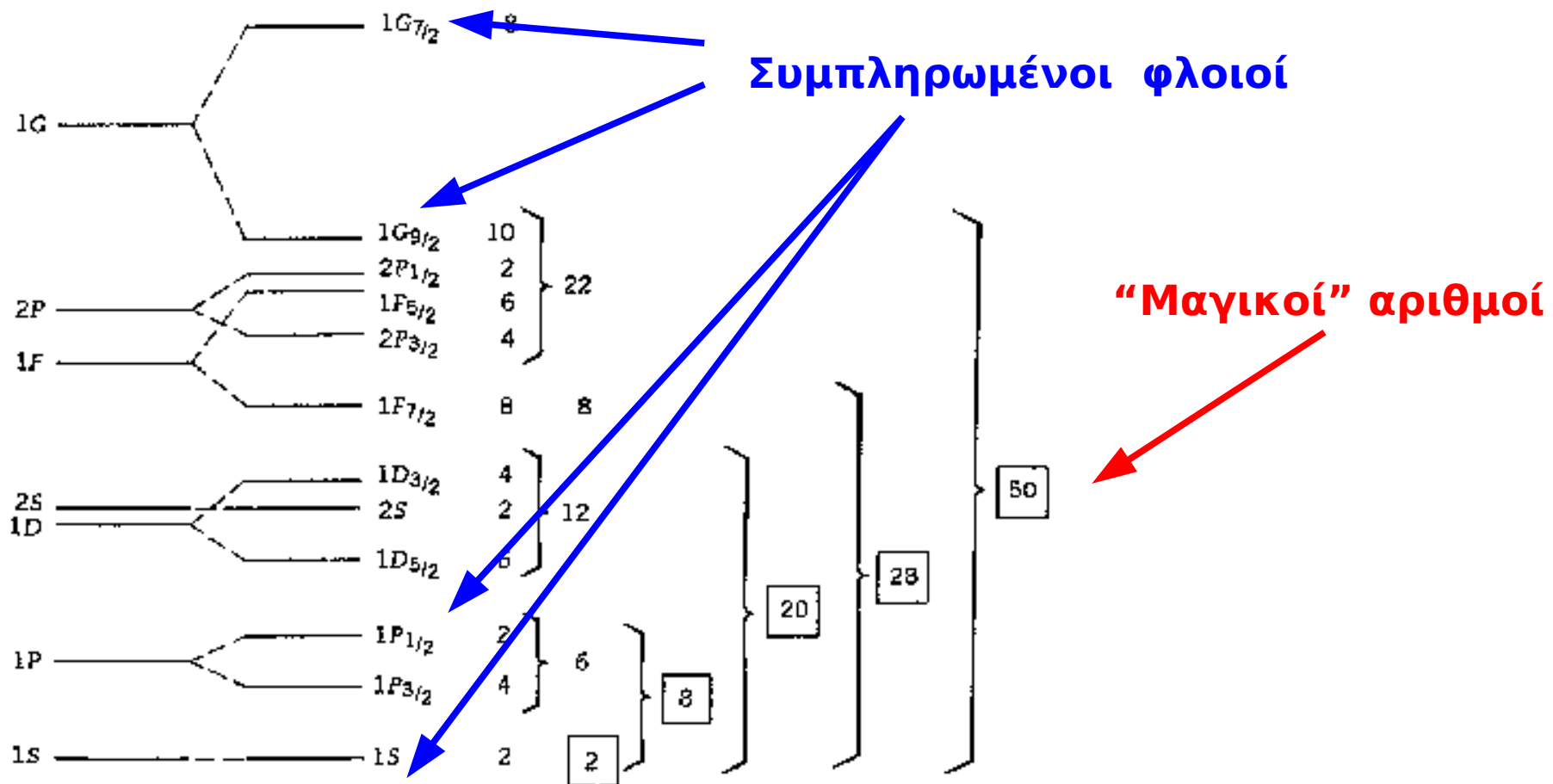
“Μαγικοί” αριθμοί

	x_{nl}	Neutron		Proton	
1s	3.14	$1s_{\frac{1}{2}}$	2	$1s_{\frac{1}{2}}$	1s
1p	4.49	$1p_{\frac{3}{2}}$	6	$1p_{\frac{3}{2}}$	1p
		$1p_{\frac{1}{2}}$	8	$1p_{\frac{1}{2}}$	
1d	5.76	$1d_{\frac{5}{2}}$	14	$1d_{\frac{5}{2}}$	1d
		$2s_{\frac{1}{2}}$	16	$2s_{\frac{1}{2}}$	
2s	6.28	$1d_{\frac{3}{2}}$	20	$1d_{\frac{3}{2}}$	2s
1f	6.99	$1f_{\frac{7}{2}}$	28		
		$2p_{\frac{3}{2}}$	32	$1f_{\frac{7}{2}}$	
2p	7.73	$1f_{\frac{5}{2}}$	38		1f
		$2p_{\frac{1}{2}}$	40	$2p_{\frac{3}{2}}$	
1g	8.18	$1g_{\frac{9}{2}}$	50	$1f_{\frac{5}{2}}$	2p
		$2d_{\frac{5}{2}}$	56	$2p_{\frac{1}{2}}$	
2d	9.10	$1g_{\frac{7}{2}}$	64		
		$1h_{\frac{11}{2}}$	76	$1g_{\frac{9}{2}}$	
1h	9.36	$3s_{\frac{1}{2}}$	78		1g
		$2d_{\frac{3}{2}}$	82	$1g_{\frac{7}{2}}$	
3s	9.42	$2f_{\frac{7}{2}}$	90	$2d_{\frac{5}{2}}$	
		$1h_{\frac{9}{2}}$	100		

Ανακάτεμα των ενεργειακών σταθμών και “χάσμα” σε μερικές περιοχές : μαγικοί αριθμοί

- Ο όρος σύζευξης $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ ξεχωρίζει τις καταστάσεις με το ίδιο (n, l) , αλλά διαφορετική ολική στροφορμή j

Συνεισφορά στην ενέργεια (με $U_{so} < 0$) : $U_{so}(r)\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}$



Πυρήνες με “μαγικούς” αριθμούς - οι σταθερότεροι

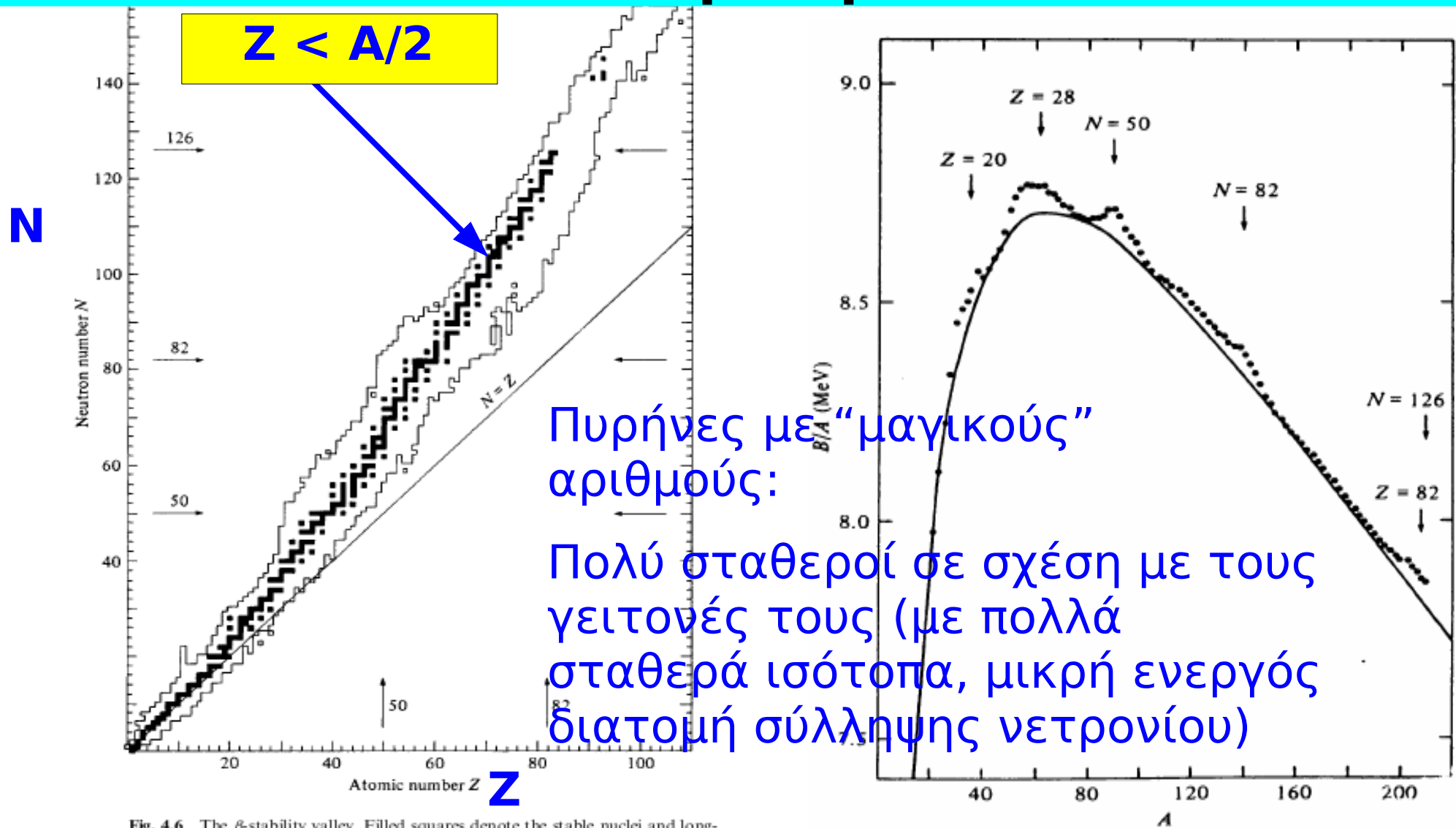


Fig. 4.6 The β -stability valley. Filled squares denote the stable nuclei and long-lived nuclei occurring in nature. Neighbouring nuclei are unstable. Those for which data on masses and mean lives are known fill the area bounded by the lines. For the most part these unstable nuclei have been made artificially. (Data taken from *Chart of the Nuclides* (1977), Schenectady: General Electric Company.)

Πυρηνικό Πρότυπο Φλοιών :

Εξήγηση της ολικής στροφορμής J
του πυρήνα (= του σπίν του)
και της ομοτιμίας του (παριτυ)
με απλούς κανόνες

Spin πυρήνα (J) και ομοτιμία (πάριτυ)

- Σπιν πυρήνα, J = ολικό τροχιακό σπίν των νουκλεονίων + το άθροισμα των σπιν τους.

$$\vec{J}_{\text{πυρήνα}} \equiv \sum_{\text{νουκλεόνια}} \vec{L} + \sum_{\text{νουκλεόνια}} \vec{S} = \sum_{\text{νουκλεόνια}} (\vec{L} + \vec{S})$$

- Το ολικό σπίν (J) **άρτιων-άρτιων** πυρήνων έχει βρεθεί ότι είναι 0 και η πάριτυ + : $J^{\pi} = 0^{+}$

→ άρα, υπάρχει ισχυρό ζευγάρωμα των σπιν που δίνει άθροισμα 0

- Για **περιττό αριθμό νουκλεονίων**, το ασύζευκτο νουκλεόνιο καθορίζει σπίν και parity του πυρήνα

π.χ., $^{17}_8\text{O}$: $J^{\pi} = 5/2^{+}$, σελ. 87 βιβλίου σας. Parity = $(-1)^{\ell}$

- Για **περιττούς-περιττούς** πυρήνες, το κάθε αζευγάρωτο πρωτόνιο και νετρόνιο συνεισφέρουν το δικό τους J^{π} . Το ολικό σπίν είναι το άθροισμα των επιμέρους σπιν σύμφωνα με τους κανόνες άθροισης σπιν, αλλά αν έχουμε πολλές επιλογές δεν έχουμε κάποιον γενικό κανόνα για το ποιό αποτέλεσμα προτιμάται. Η ολική πάριτυ είναι το γινόμενο των επιμέρους πάριτυ.

ΚΑΝΟΝΑΣ που δουλεύει στα περισσότερα!

Παράδειγμα - Εξηγήστε τα J^π του πίνακα 4.2. με τον πίνακα 5.1 του βιβλίου σας

Table 4.2. *Energies of some light nuclei*

Nucleus	Binding energy (MeV)	Binding energy of last nucleon (MeV)	Binding energy per nucleon (MeV)	Spin and parity
^2_1H	2.22	2.2	1.1	1^+
^3_1H	8.48	6.3	2.8	$\frac{1}{2}^+$
^4_2He	28.30	19.8	7.1	0^+
^5_2He	27.34	-1.0	5.5	$\frac{3}{2}^-$
^6_3Li	31.99	4.7	5.3	1^+
^7_3Li	39.25	7.3	5.6	$\frac{3}{2}^-$
^8_4Be	56.50	17.3	7.1	0^+
^9_4Be	58.16	1.7	6.5	$\frac{3}{2}^-$
$^{10}_5\text{B}$	64.75	6.6	6.5	3^+
$^{11}_5\text{B}$	76.21	11.5	6.9	$\frac{3}{2}^-$
$^{12}_6\text{C}$	92.16	16.0	7.7	0^+
$^{13}_6\text{C}$	97.11	5.0	7.5	$\frac{1}{2}^-$
$^{14}_7\text{N}$	104.66	7.6	7.5	1^+
$^{15}_7\text{N}$	115.49	10.8	7.7	$\frac{1}{2}^-$
$^{16}_8\text{O}$	127.62	12.1	8.0	0^+
$^{17}_8\text{O}$	131.76	4.1	7.8	$\frac{5}{2}^+$

Table 5.1

	N_n	Neutron		Proton	
1s	3.14	$1s_{\frac{1}{2}}$	2	2	$1s_{\frac{1}{2}}$
1p	4.49	$1p_{\frac{1}{2}}$	6	6	$1p_{\frac{1}{2}}$
		$1p_{\frac{3}{2}}$	8	8	$1p_{\frac{3}{2}}$
1d	5.76	$1d_{\frac{3}{2}}$	14	14	$1d_{\frac{3}{2}}$
		$2s_{\frac{1}{2}}$	16	16	$2s_{\frac{1}{2}}$
2s	6.28	$1d_{\frac{5}{2}}$	20	20	$1d_{\frac{5}{2}}$
1f	6.99	$1f_{\frac{7}{2}}$	28		
		$2p_{\frac{1}{2}}$	32	28	$1f_{\frac{7}{2}}$
2p	7.73	$1f_{\frac{5}{2}}$	38		1f
		$2p_{\frac{3}{2}}$	40	32	$2p_{\frac{3}{2}}$
1g	8.18	$1g_{\frac{7}{2}}$	50	38	$1f_{\frac{5}{2}}$
		$2d_{\frac{3}{2}}$	56	40	$2p_{\frac{1}{2}}$
2d	9.10	$1g_{\frac{9}{2}}$	64		
		$1h_{\frac{11}{2}}$	76	50	$1g_{\frac{7}{2}}$
1h	9.36	$3s_{\frac{1}{2}}$	78		1g
		$2d_{\frac{5}{2}}$	82	58	$1g_{\frac{9}{2}}$
3s	9.42	$2f_{\frac{5}{2}}$	90	64	$2d_{\frac{3}{2}}$

- π.χ., $^{17}_8\text{O}$: α) τα 8 πρωτόνια συνεισφέρουν $J^\pi = 0^+$ β) από τα 9 νετρόνια, τα 8 συνεισφέρουν $J^\pi = 0^+$, κι έτσι το ένατο (το αζευγάρωτο) καθορίζει το J^π . Όμως, το ένατο νετρόνιο είναι στον φλοιό $1d_{5/2}$: το d μας λέει ότι $l=2 \rightarrow \text{παριτυ} = (-1)^l = (-1)^2 = +1$ και το 5/2 μας λέει ότι $j=5/2$, οπότε αυτό το ασύζευκτο νετρόνιο δίνει: $J^\pi = 5/2^+$ για το $^{17}_8\text{O}$

Spin πυρήνα (J) και μαγνητική ροπή (μ)

- Σπιν πυρήνα, J = ολικό τροχιακό σπίν των νουκλεονίων + το άθροισμα των σπιν τους.

$$\vec{J}_{\text{πυρήνα}} \equiv \sum_{\text{νουκλεόνια}} \vec{L} + \sum_{\text{νουκλεόνια}} \vec{S} = \sum_{\text{νουκλεόνια}} (\vec{L} + \vec{S})$$

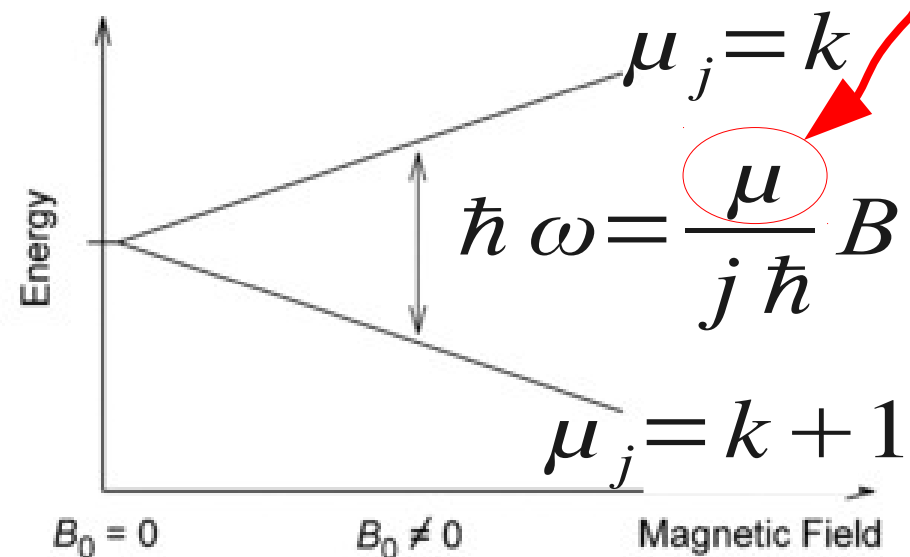
- Κι έτσι καθορίζει τη μαγνητική ροπή του, μ**

- Ενεργειακές διαφορές που αντανακλούν τα m_j .
- Μετράμε τις ενεργειακές διαφορές, δηλ το μ , με πυρηνικό μαγνητικό συντονισμό: παλλόμενο H/M πεδίο κυκλικής συχνότητας ω

$$\vec{\mu} \equiv \frac{\mu}{j \hbar} \vec{J} \quad \mu_z = \frac{\mu}{j \hbar} m_j$$

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_z B$$

$$\text{οπότε } U = -\frac{\mu}{j \hbar} m_j B = -\left(\frac{\mu}{j \hbar} B\right) m_j$$



Spin πυρήνα (J) και μαγνητική ροπή (μ)

- Οι πυρήνες έχουν μαγνητικές ροπές $\mu \sim -3 \mu_N$ έως $10 \mu_N$
 - Μικρή σε σχέση με τον αριθμό νουκλεονίων (που το καθένα συνεισφέρει $\sim -2 \mu_N$ έως $+3 \mu_N$)
 - Ταιριάζει με την υπόθεση ότι ουσιαστικά μόνο τα “ασύζευκτα” νουκελόνια συνεισφέρουν
 - Μικρή σε σχέση με μαγνητόνη Bohr
 - Μάλλον δεν έχουμε ηλεκτρόνια στους πυρήνες
- Γιατί:

Μαγνητόνη του Bohr, μ_B : $\mu_B \equiv \frac{e \hbar}{2 m_e c}$

Πυρηνική Μαγνητόνη, μ_N : $\mu_N \equiv \frac{e \hbar}{2 m_p c}$

$\mu_B \simeq 2000 \mu_N$

Spin νουκελονίων και μαγνητική ροπή

- Κάθε νουκλεόνιο, εδώ πρωτόνιο, έχει μαγνητική διπολική ροπή:

$$\vec{\mu}_p = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_s = g_L \frac{q}{2 m_p c} \vec{L} + g_s \frac{q}{2 m_p c} \vec{S} = g_L \frac{\mu_N}{\hbar} \vec{L} + g_s \frac{\mu_N}{\hbar} \vec{S}$$

- Πρωτόνιο έχει σπιν $\{+1/2, -1/2\}$, όπως και τα νετρόνια. Κι έτσι έχει μαγνητική ροπή λόγω σπιν, ίση με :

$$\vec{\mu}_p = g_s \frac{q}{2 m_p c} \vec{S} = g_s \frac{e}{2 m_p c} \vec{S} = g_s \mu_N \frac{\vec{S}}{\hbar}$$

$$\mu_p = g_s \mu_N \sqrt{s(s+1)}$$

$$\mu_{p,z} = g_s \mu_N m_s$$

$$U_p = -g_s \mu_N m_s B$$

όπου: $\mu_N \equiv \frac{e \hbar}{2 m_p c}$

Πυρηνική μαγνητόνη ~ 2000 μικρότερη της μαγνητόνης του Bohr μ_B (που ορίζεται για τη μάζα ηλεκτρονίου)

$$\mu_p \simeq 5.59 \mu_N$$

$$\mu_n \simeq -3.83 \mu_N$$

$g_s \neq 2 \rightarrow$ όχι στοιχειώδες

$m_s = \frac{1}{2} \text{ ή } -\frac{1}{2} = 2$ επι μέρους ενεργειακές στάθμες

Μαγνητική ροπή πυρήνα = μαγνητική ροπή ασύζευκτου νουκλεονίου

- Κάθε νουκλεόνιο έχει μαγνητική διπολική ροπή:

$$\vec{\mu}_N = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_s = g_L \frac{q}{2m_p c} \vec{L} + g_s \frac{q}{2m_p c} \vec{S} = g_L \frac{\mu_N}{\hbar} \vec{L} + g_s \frac{\mu_N}{\hbar} \vec{S} = \mu_N [g_L \vec{L} + g_s \vec{S}]$$

- Για να πάρουμε υπόψιν μας το ότι το νετρόνιο δεν έχει φορτίο, γράφουμε για τη μαγνητική ροπή λόγω L:

Πρωτόνιο: $g_L = 1$, νετρόνιο: $g_L = 0$

- ...
$$\begin{aligned} \mu &= \mu_N [jg_L - \frac{1}{2}(g_L - g_s)] & \text{for } j = l + \frac{1}{2}, \\ \mu &= \mu_N \left[jg_L + \frac{j}{2(j+1)}(g_L - g_s) \right] & \text{for } j = l - \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

Αυτές εδώ ονομάζονται “τιμές Schmidt” .

Οι μετρούμενες τιμές είναι κοντά σ' αυτές τις τιμές που βρήκαμε παίρνοντας συνεισφορά μόνο από το ασύζευκτο νουκλεόνιο

Ηλεκτρική τετραπολική ροπή πυρήνα, Q

- Κατανομή ηλεκτρικού φορτίου στον πυρήνα $\rightarrow$ χαρακτηρίζεται από το Q

Οχι προς εξέταση

- Όταν πυρήνας σφαιρικός $\rightarrow Q = 0$
- Αλλιώς
 - $Q > 0$ όταν επιμήκυνση κατά άξονα z
 - $Q < 0$ όταν συμπίεση κατά άξονα z
- Όταν $j=0$ ή $j = \frac{1}{2} \rightarrow Q = 0$

Ηλεκτρική τετραπολική ροπή πυρήνα, Q

Οχι προς εξέταση

- Η κατανομή του φορτίου στον όγκο του πυρήνα είναι η αιτία ύπαρξης ηλεκτρικών ροπών

- ▶ μπορεί να αποδειχτεί ότι η ηλεκτρική διπολική ροπή μηδενίζεται για καλά καθορισμένη κβαντομηχανική κατάσταση (όπως η βασική κατάσταση του πυρήνα)
- ▶ η τετραπολική ηλεκτρική ροπή: eQ υπάρχει, αν ο πυρήνας δεν είναι σφαιρικός
- ▶ η τετραπολική ροπή ορίζεται ως:

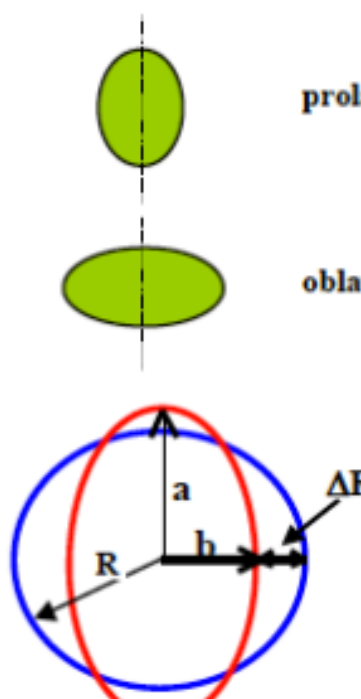
$$Q = 1/e \int \rho (3z^2 - r^2) dV$$

- ▶ ρ : πυκνότητα φορτίου, dV : στοιχείο όγκου
- eQ έχει μονάδες επιφάνειας
- ▶ Σχετίζεται με το σχήμα του πυρήνα; για σφαιρικό πυρήνα $eQ=0$

Το ηλεκτρικό δυναμικό μη σημειακού φορτίου

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} \int \rho dV + \frac{1}{R^2} \int \rho z dV + \frac{1}{R^3} \int \rho (3z^2 - r^2) dV \right]$$

monopole dipole quadrupole



prolate $Q +ve$

oblate $Q -ve$

$$Q = \frac{2}{5} Z (a^2 - b^2) \approx 6.5 Z R^2 (\Delta R/R)$$

Η ηλεκτρική τετραπολική ορμή είναι ένα ευαίσθητο εργαλείο για τη μελέτη του πυρηνικού περιβάλλοντος. Θα την ξανασυναντήσουμε στη γάμμα-διάσπαση