

Πυρηνική Φυσική και Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων (5ου εξαμήνου, χειμερινό 2016-17)

Τμήμα Τ3: Κ. Κορδάς & Χ. Πετρίδου

Μάθημα 5

Μάζα πυρήνα, ενέργεια σύνδεσης, έλλειμα μάζας

Κώστας Κορδάς

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Πυρηνική & Στοιχειώδη Ι, Αριστοτέλειο Παν. Θ/νίκης, 13 Οκτωβρίου 2016

Σήμερα

- **Μάζα των πυρήνων, ενέργεια σύνδεσης και έλλειμα μάζας.**
 - Βιβλίο C&G : Κεφ. 4, παρ. 4.4 και 4.5
 - Βιβλίο Ελευθεριάδη: Κεφ. 4
 - Σημειώσεις Πυρηνικής: Κεφ. 3, έως παρ.3.2

Μάζα πυρήνα

- Η μάζα ενός πυρήνα είναι σχεδόν πολλαπλάσιο του μαζικού αριθμού, A και μετριέται σε
 - $\text{amu} = 1/12$ της μάζας του ουδέτερου ατόμου $^{12}\text{C} = 931.494 \text{ MeV}/c^2$
 - MeV/c^2 : η μάζα είναι μια μορφή ενέργειας.
Θυμηθείτε: $E = m c^2 \rightarrow m = E/c^2$
 - **Να συγκριθεί το amu με : μάζα νετρονίου $939.5 \text{ MeV}/c^2$, μάζα πρωτονίου $938.3 \text{ MeV}/c^2$**
- Η μάζα ενός πυρήνα μετριέται με:
 - Φασματογράφους Μάζας, όπου μετρούμε την **απόλυτη τιμή της μάζας** του πυρήνα
 - Χρησιμοποιώντας ενεργειακό ισοζύγιο σε πυρηνικές αντιδράσεις παίρνουμε τη μάζα σχετικά με μια άλλη, γνωστή μάζα

Μέτρηση μάζας με φασματογράφο (1)

Πηγή ιόντων του στοιχείου που θέλουμε να μετρήσουμε

- Διαχωριστή/επιλογέα ταχυτήτων $\Rightarrow$ ίσες και αντίθετες ηλεκτρικές και μαγνητικές δυνάμεις:

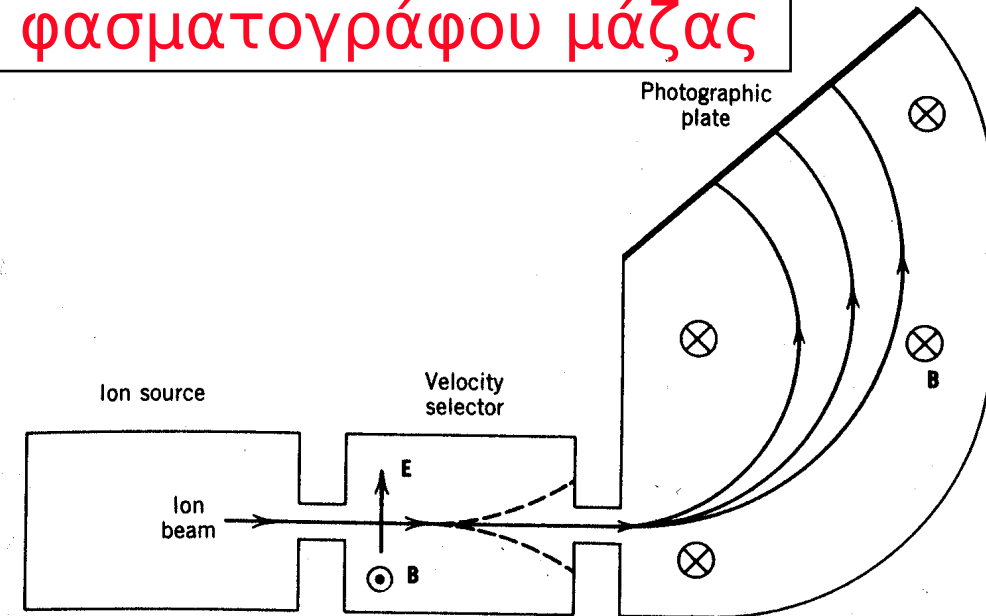
- $-qE = qvB \rightarrow v = E/B$ (E , B ηλεκτρικό & μαγνητικό πεδία)

- Διαχωριστή/επιλογέα ορμών; η κυκλική τροχιά πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

- $Mv = qBr$ ($Mv^2/r = qBv$: δύναμη Lorentz = κεντρομόλος δύναμη)

- Μέτρηση της ακτίνας r δίνει τη μάζα M (θυμηθείτε τη μέτρηση του λόγου e/m στο εργαστήριο Ατομικής)

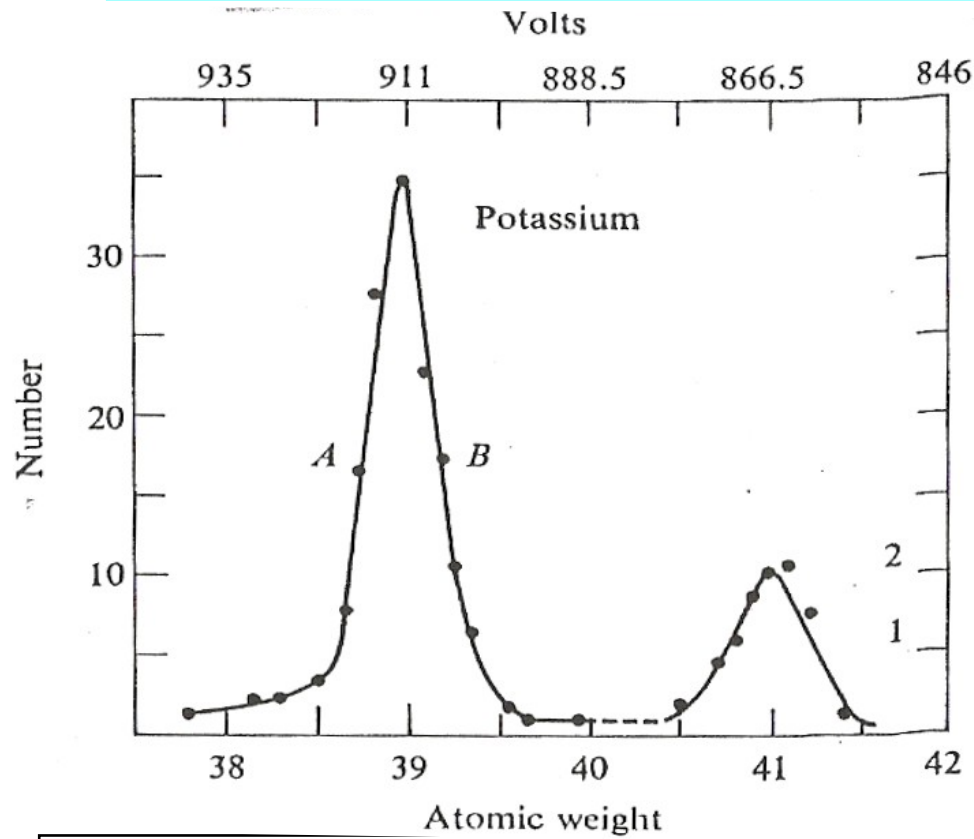
Αρχή λειτουργίας του φασματογράφου μάζας



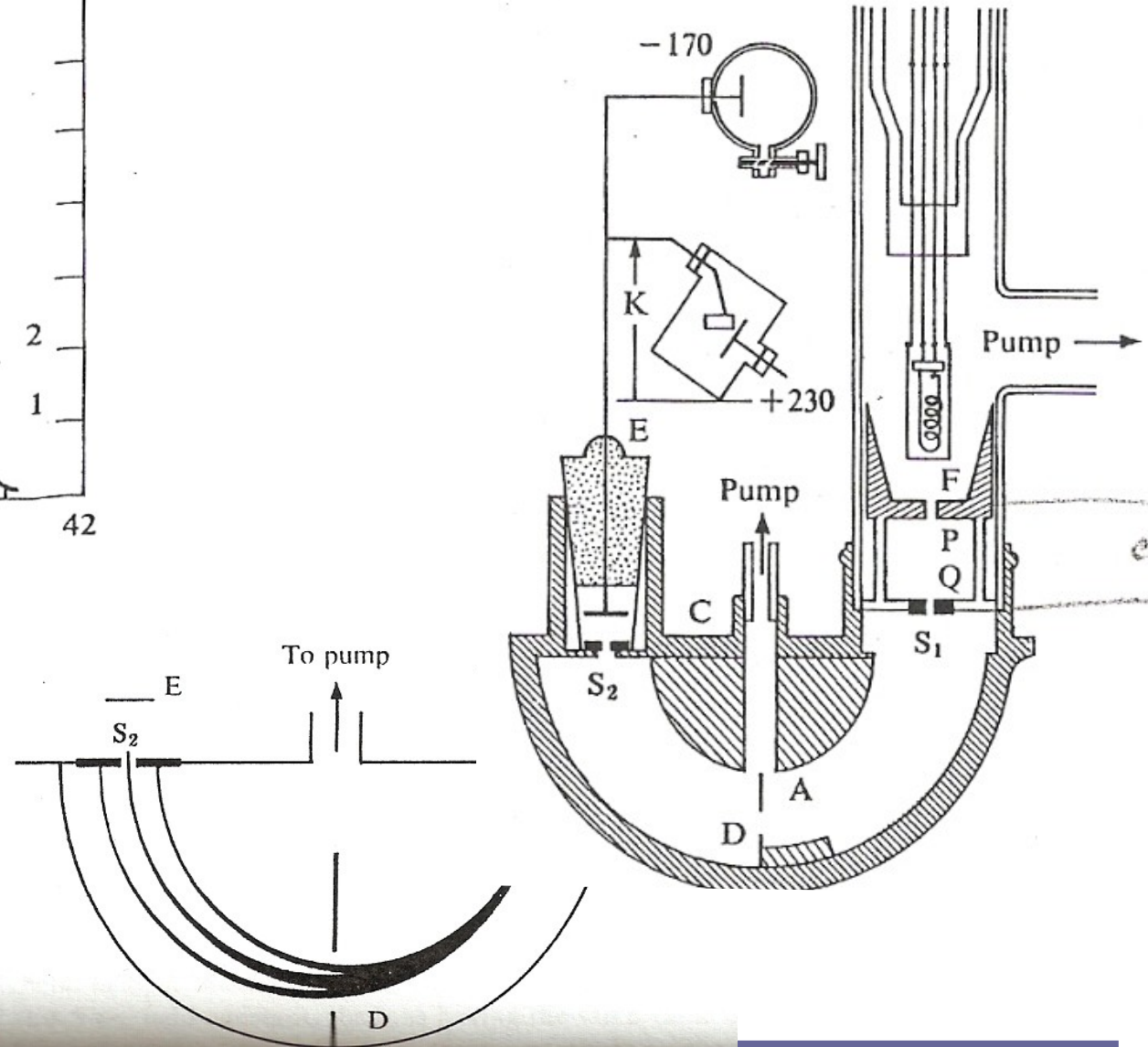
Διαφορετικά ισότοπα με ίδιο φορτίο για μία τιμή B του μαγνητικού πεδίου θα μετρηθούν σε διαφορετική θέση πάνω στη φωτογραφική πλάκα

Μέτρηση Μάζας με φασματογράφο (2)

Φασματογράφος Μάζας
Dempster (1922)



Παράδειγμα
διαχωρισμού ισοτόπων
του Καλίου (^{39}K , ^{41}K)



Μάζα πυρήνα και ενέργεια σύνδεσης

- Η ενέργεια (=μάζα) που έχουν οι πυρήνες, όπου τα νουκλεόνια είναι “δέσμια, είναι **μικρότερη** απ' το να έχουμε τα συστατικά νουκλεόνια μόνα τους, ελεύθερα. Έχουμε “**έλλειμμα μάζας**”
- Σίγουρα έχουν λιγότερη ενέργεια έτσι, αλλιώς δεν υπήρχε λόγος για τα νουκλεόνια να παραμείνουν στη σταθερότητα της παρέας

– Πόσο μικρότερη είναι η μάζα? Όσο η ενέργεια σύνδεσης

$$\mathbf{M}_{\text{πυρήνα}} = \Sigma m (\text{ελεύθερα νουκλεόνια}) - \mathbf{B}(Z,N)$$

$$\rightarrow \mathbf{M}_{\text{πυρήνα}} = Z * m_p + N * m_n - \mathbf{B}(Z,N)$$

– $\mathbf{M}_{\text{ατόμου}} = \mathbf{M}_{\text{πυρήνα}} + \mathbf{M}_{\text{ηλεκτρονίων}} - \mathbf{b}_{\text{ηλεκτρονίων}}$

αμελητέα

- Ενέργεια σύνδεσης = $B(Z,N) =$

όση ενέργεια πρέπει να δώσω για να διαλύσω τον πυρήνα στα συστατικά του νουκλεόνια (εις τα εξ ων συνετέθη)

$$\mathbf{M}_{\text{πυρήνα}} + \text{Ενέργεια Σύνδεσης} = \Sigma m (\text{ελεύθερα νουκλεόνια})$$

Ενέργεια σύνδεσης, μάζες πυρήνων και πυρηνικές αντιδράσεις

- **Αρχικοί πυρήνες $\rightarrow$ Τελικοί πυρήνες + Q**
- **Να θυμάστε: η μάζα είναι μια μορφή ενέργειας**
- **Ενέργεια πριν = Ενέργεια μετά**
Η ενέργεια πριν είναι όση η μάζα των αρχικών πυρήνων. Αυτή η ενέργεια χρησιμοποιείται για να φτιαχτούν τα προϊόντα, και η υπόλοιπη ελευθερώνεται ως κινητική ενέργεια (Q) που τη μοιράζονται τα προϊόντα
- **$\Sigma M(\text{αρχικά}) = \Sigma M(\text{τελικά}) + Q$**
 - αν $Q > 0$ (εξωθερμική), η διάσπαση γίνεται μόνη της και δίνει και ενέργεια
 - Αν $Q < 0$ (ενδοθερμική), η διάσπαση ΔΕΝ γίνεται μόνη της, αλλά χρειάζεται να της προσφέρουμε ενέργεια για να γίνει
- **$M_{\text{πυρήνα}} = \Sigma m (\text{ελεύθερα νουκλεόνια}) - B(N, Z)$**

Ενέργεια σύνδεσης πυρήνων

- Ενέργεια σύνδεσης = $B(N,Z)$

$$\text{Μπυρήνα} = \sum m (\text{ελεύθερα νουκλεόνια}) - B(N,Z)$$

Πίνακας 4.2 →

στο βιβλίο σας

Table 4.2. *Energies of some light nuclei*

Nucleus	Binding energy (MeV)	Binding energy of last nucleon (MeV)	Binding energy per nucleon (MeV)	Spin and parity
^2_1H	2.22	2.2	1.1	1^+
^3_2H	8.48	6.3	2.8	$\frac{1}{2}^+$
^4_2He	28.30	19.8	7.1	0^+
^5_2He	27.34	-1.0	5.5	$\frac{3}{2}^-$
^6_3Li	31.99	4.7	5.3	1^+
^7_3Li	39.25	7.3	5.6	$\frac{3}{2}^-$
^8_4Be	56.50	17.3	7.1	0^+
^9_4Be	58.16	1.7	6.5	$\frac{3}{2}^-$
$^{10}_5\text{B}$	64.75	6.6	6.5	3^+
$^{11}_5\text{B}$	76.21	11.5	6.9	$\frac{3}{2}^-$
$^{12}_6\text{C}$	92.16	16.0	7.7	0^+
$^{13}_6\text{C}$	97.11	5.0	7.5	$\frac{1}{2}^-$
$^{14}_7\text{N}$	104.66	7.6	7.5	1^+
$^{15}_7\text{N}$	115.49	10.8	7.7	$\frac{1}{2}^-$
$^{16}_8\text{O}$	127.62	12.1	8.0	0^+
$^{17}_8\text{O}$	131.76	4.1	7.8	$\frac{5}{2}^+$

Πειραματικές τιμές

Ενέργεια σύνδεσης πυρήνων

- Ξεκινώντας από το πρωτόνιο (υδρογόνο) προσθέτουμε νουκλεόνια και φτιάχνουμε πιο μεγάλους πυρήνες (σύντηξη όπως στην καρδιά του Ήλιου)
- Είναι ο καινούργιος πυρήνας σταθερός?
- Άσκηση1:
 - α) Πόση είναι η μάζα του σωματιδίου α? (${}^4\text{He}$)
 - β) Όταν φτιάχνω το ${}^3\text{He}$ από το ${}^2\text{He}$ είναι OK?
 - γ) Το ${}^4\text{He}$ από το ${}^3\text{He}$?
 - δ) Το ${}^5\text{He}$ από το ${}^4\text{He}$?
 - ε) Τι παρατηρείτε με τους πυρήνες ${}^4_2\text{He}$, ${}^8_4\text{Be}$, ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{16}_8\text{O}$ σχετικά με την ενέργεια σύνδεσης του “τελευταίου” νουκλεονίου που προσθέτουμε για να φτιάξουμε αυτούς τους πυρήνες από τους αμέσως ελαφρύτερους?

Άσκηση1: μάζα του α και ενέργεια σύνδεσης πυρήνα

- $m_{\alpha} = 2 m_p + 2 m_n - \text{ενέργεια σύνδεσης (binding energy) του πυρήνα } \alpha$

$$m = 2 \cdot 938.27 + 2 \cdot 939.57 - 28.30 = 3727.38 \text{ MeV}/c^2$$

(βλέπε βιβλίο, παρ. 4.4, πίνακας 4.2, σελ. 61 και σταθερές σελ. 15)

Table 4.2. *Energies of some light nuclei*

Nucleus	Binding energy (MeV)	Binding energy of last nucleon (MeV)	Binding energy per nucleon (MeV)	Spin and parity
${}^2_1\text{H}$	2.22	2.2	1.1	1^+
${}^3_2\text{H}$	8.48	6.3	2.8	$\frac{1}{2}^+$
${}^4_2\text{He}$	28.30	19.8	7.1	0^+
${}^5_2\text{He}$	27.34	-1.0	5.5	$\frac{3}{2}^-$
${}^6_3\text{Li}$	31.99	4.7	5.3	1^+
${}^7_3\text{Li}$	39.25	7.3	5.6	$\frac{3}{2}^-$
${}^8_4\text{Be}$	56.50	17.3	7.1	0^+
${}^9_4\text{Be}$	58.16	1.7	6.5	$\frac{3}{2}^-$
${}^{10}_5\text{B}$	64.75	6.6	6.5	3^+
${}^{11}_5\text{B}$	76.21	11.5	6.9	$\frac{3}{2}^-$
${}^{12}_6\text{C}$	92.16	16.0	7.7	0^+
${}^{13}_6\text{C}$	97.11	5.0	7.5	$\frac{1}{2}^-$
${}^{14}_7\text{N}$	104.66	7.6	7.5	1^+
${}^{15}_7\text{N}$	115.49	10.8	7.7	$\frac{1}{2}^-$
${}^{16}_8\text{O}$	127.62	12.1	8.0	0^+
${}^{17}_8\text{O}$	131.76	4.1	7.8	$\frac{5}{2}^+$

Άσκηση 2 : ενέργεια σύνδεσης και πυρηνικές αντιδράσεις

Πρόβλημα 4.5 του βιβλίου σας

- α) Δείξτε ότι το ${}^8\text{Be}$ μπορεί να διασπαστεί σε δύο α -σωμάτια.
β) Δείξτε ότι το ${}^{12}\text{C}$ δεν μπορεί να διασπαστεί σε τρία α -σωμάτια.
γ) Γίνεται (χωρίς βοήθεια) η αντίδραση ${}^2\text{H} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^6\text{Li} + \gamma$?

Δίνονται: το βιβλίο σας

- Πίνακας 4.2

- $m(n) = 939.57 \text{ MeV}$, $m(p) = 938.27 \text{ MeV}$

Άσκηση3: Σύντηξη υδρογόνου για παραγωγή ηλίου στον Ήλιο

Άσκηση 3:

Πόση ενέργεια θα ελευθερόνουνταν αν το δευτέριο (^2H) μπορούσε να παράγει ήλιο (^4He) με την ακόλουθη αντίδραση σύντηξης?



Δίνονται:

$$1 \text{ amu} = 931.49 \text{ MeV}/c^2 \quad \text{και} \quad 1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$\text{- } M(n) = 939.57 \text{ MeV}, M(p) = 938.27 \text{ MeV}, M(e) = 0.511 \text{ MeV}, M(\nu)=0$$

- Ενέργειες Σύνδεσης (B):

$$B(^4\text{He}) = 28.30 \text{ MeV}, B(^2\text{H}) = 2.2 \text{ MeV}, B(^3\text{H}) = 8.48 \text{ MeV}$$

Άσκηση 3: Σύντηξη υδρογόνου - Λύση

- Αρχή διατήρησης της ενέργειας
 - Ενέργεια πριν = Ενέργεια μετά , Η μάζα είναι μιά μορφή ενέργειας
 - $\Sigma M(\text{αρχικά}) = \Sigma M(\text{τελικά}) + Q$, για αυθόρμητη σχάση πρέπει $Q \geq 0$
- Η μάζα κάθε πυρήνα υπολογίζεται από τις μάζες των συστατικών του (πρωτόνια και νετρόνια) και την ενέργεια σύνδεσής τους
 - $M(^2\text{H}) = M(p) + M(n) - B(^2\text{H}) = (938.27 + 939.57 - 2.2) \text{ MeV} = 1875.64 \text{ MeV}$
 - $M(^4\text{He}) = 2*M(p) + 2*M(n) - B(^4\text{He}) = \dots = 3727.38 \text{ MeV}$
 - $2*M(^2\text{H}) = M(^4\text{He}) + Q$
 $\rightarrow Q = 2*M(^2\text{H}) - M(^4\text{He}) = \mathbf{23.9 \text{ MeV}}$ (δηλ. $Q > 0$, και άρα γίνεται)
- Οπότε κατά την αντίδραση αυτή (δηλ., όταν 2 πυρήνες δευτερίου συντήκονται και γίνονται 1 πυρήνας ^4He), εκλύεται ενέργεια **23.9 MeV**.

Άσκηση 4: Σχάση ουρανίου-235 (^{235}U)

Άσκηση 4:

α) Πόση ενέργεια εκλύεται κατά την παρακάτω αντίδραση σχάσης ουρανίου ^{235}U ?



β) Πόση ενέργεια εκλύεται κατά την παραπάνω αντίδραση σχάσης από **1 kg** ουρανίου ^{235}U ?

Δίνονται:

$$1 \text{ amu} = 931.49 \text{ MeV}/c^2 \quad \text{και} \quad 1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$M(n) = 1.0087 \text{ amu}, \quad M({}^{235}\text{U}) = 235.0439 \text{ amu},$$

$$M(\text{Ba}) = 140.9139 \text{ amu}, \quad M(\text{Kr}) = 91.8973 \text{ amu}$$

Άσκηση 4: Σχάση ουρανίου-235 (^{235}U) - Λύση

- Αρχή διατήρησης της ενέργειας
 - Ενέργεια πριν = Ενέργεια μετά , Η μάζα είναι μιά μορφή ενέργειας
 - $\Sigma M(\text{αρχικά}) = \Sigma M(\text{τελικά}) + Q$, για αυθόρμητη σχάση πρέπει $Q \geq 0$
- Η μάζα κάθε πυρήνα δίνεται σε amu. Μπορώ να τις κάνω MeV αμέσως, ή να τις αφήσω σε amu, να βρω το Q σε amu και να το κάνω σε MeV στο τέλος.
- $M(^{235}\text{U}) + M(n) = M(^{141}\text{Ba}) + M(^{92}\text{Kr}) + 3 \cdot M(n) + Q$
 $\rightarrow Q = M(^{235}\text{U}) - M(^{141}\text{Ba}) - M(^{92}\text{Kr}) - 2 \cdot M(n) = 0.2153 \text{ amu} \rightarrow$
 $Q = 0.2153 \cdot 931.49 \text{ MeV} = \mathbf{234.1 \text{ MeV}}$ (δηλ. $Q > 0$: άρα γίνεται αυθόρμητα)
- Οπότε κατά την αντίδραση αυτή (δηλ., για ENAN μόνο πυρήνα ^{235}U), εκλύεται ενέργεια **234.1 MeV**.
- Για να βρούμε πόση ενέργεια εκλύεται κατά τη σχάση 1 kg ^{235}U , πρέπει να ξέρουμε πόσοι πυρήνες υπάρχουν σε 1kg ^{235}U .
- Ξέρουμε ότι σε 1 mol ^{235}U έχουμε $6.02 \cdot 10^{23}$ πυρήνες και το 1 mol ζυγίζει όσο ο μαζικός αριθμός σε γραμμάρια, δηλαδή 235 gr.
 $\rightarrow 1 \text{ kg } ^{235}\text{U} = 4.255 \text{ mol} = 25.6 \cdot 10^{23} \text{ πυρήνες } ^{235}\text{U}.$
- Ενέργεια από 1 kg $^{235}\text{U} = 25.6 \cdot 10^{23} \cdot 234.1 \text{ MeV} = 6 \cdot 10^{26} \text{ MeV} = 6 \cdot 10^{26} \cdot 10^6 \text{ eV} =$
 $6 \cdot 10^{26} \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Cb*V} = 9.6 \cdot 10^7 \text{ MJ}$ (θυμάστε ότι $1 \text{ Cb*V} = 1 \text{ Joyle} = 1 \text{ J}$)

Σχετικιστική κινηματική

Σχετικιστική κινηματική:

$E = mc^2$ = η ενέργεια που έχω επειδή απλά και μόνο έχω μάζα m
 c = ταχύτητα του φωτός

ενέργεια E
μάζα m



Η μάζα είναι μια μορφή ενέργειας

γενικά, με κινητική ενέργεια K , έχουμε: $E = K + mc^2$

$$E = m \gamma c^2, \text{ όπου } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ και } \beta = v/c, \text{ με } v = \text{ταχύτητα σωματιδίου}$$

$$p = m \gamma v = m \gamma \beta c, \text{ όπου } p = \text{ορμή}$$

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \quad \rightarrow \quad E [\text{MeV}], p [\text{MeV}/c], m [\text{MeV}/c^2]$$

Σημείωση: με $c = 1$, γράφουμε: $E^2 = p^2 + m^2$, κλπ.

Μονάδες

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \equiv \text{μονάδα ταχύτητας} \equiv 1$$

μονάδα ενέργειας $\equiv eV = 1.6 \times 10^{-19} \text{ Cb} * V = 1.6 \times 10^{-19} \text{ Joule}$
Συνήθως χρησιμοποιούμε το MeV ($= 10^9 \text{ eV}$)

Σταθερά του Planck = $\mathbf{h} = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}$

$$\hbar c = 197 \text{ MeV fm}, \text{ όπου } \hbar = \frac{h}{2\pi} \equiv \text{μονάδα δράσης (ενέργειας} \times \text{χρόνου)} \equiv 1$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 \hbar c} [mks] = \frac{e^2}{\hbar c} [cgs] = \frac{1}{137}$$

α = η σταθερά λεπής υφής = $1/137$

Θα χρησιμοποιούμε παντού:
eV για ενέργεια (ή MeV στην πυρηνική),
 $1/4\pi\epsilon_0 = 1$ σε όλους τους τύπους,

και θα βάζουμε $e^2 = \alpha \hbar c$, όπου $\alpha = 1/137$

$$\hbar c = 197 \text{ MeV fm}$$

Μετράμε:

Μάζα: MeV/c^2 (αφού $E = mc^2$)

Ορμή: MeV/c (αφού $p = m\gamma\beta c$)

Χρόνος σε: $1/\text{MeV}$ (αφού η μονάδα δράσης = Ενέργεια * Χρόνος = 1)

Μήκος σε: μονάδες χρόνου = $1/\text{MeV}$ (αφού η μονάδα ταχύτητας=1)

1 amu = 1/12 μάζας ουδέτρου ατόμου $^{12}\text{C} = 931.5 \text{ MeV}/c^2$

Μάζα ηλεκτρονίου = $0.511 \text{ MeV}/c^2$

Μάζα πρωτονίου = $938.3 \text{ MeV}/c^2$, Μάζα νετρονίου = $939.6 \text{ MeV}/c^2$