

γ -διάσπαση

Διάλεξη 18η
Πετρίδου Χαρά

Τμήμα G3: Κ. Κορδάς & Χ. Πετρίδου

- Τι είναι η γ -διάσπαση
 - ▶ γ -αποδιέγερση
 - ▶ ηλεκτρόνια εσωτερικών μετατροπών
 - ▶ εσωτερική δημιουργία ζεύγους (e^+e^-)
- Πως προκύπτει?
 - ▶ Ενεργειακές στάθμες του πυρήνα (πρότυπο των φλοιών)
 - ▶ Πειραματικός καθορισμός (πειράματα σκέδασης)
- Ποιοί κανόνες διέπουν την γ -διάσπαση
 - ▶ Επιτρεπτές μεταπτώσεις, κανόνες επιλογής
- Ρυθμοί διάσπασης/αποσύνθεσης, χρόνοι ζωής στη γ -διάσπαση
- Τι είναι ο πυρηνικός συντονισμός - Το Πείραμα Moessbauer

- Κεφάλαιο 7: Διεγερμένες καταστάσεις του Πυρήνα
 - ▶ 7.2: Μερικά γενικά χαρακτηριστικά των διεγερμένων καταστάσεων
 - ▶ 7.1: Πειραματικός καθορισμός
 - ▶ 7.3: Η αποσύνθεση των διεγερμένων καταστάσεων
 - ▶ 7.4: Επι μέρους ρυθμοί αποσύνθεσης και επι μέρους πλάτη
- Πυρηνικός συντονισμός (Κεφ. 5 στις σημειώσεις)

Τι είναι η γ - διάσπαση ?

4

- ♦ Μια **μορφή αποδιέγερσης** του πυρήνα
 - ♦ Η ηλεκτρομαγνητική αποδιέγερση ενός πυρήνα σε μια κατώτερη ενεργειακή στάθμη του **ίδιου πυρήνα**, όταν δεν είναι δυνατή η αποβολή ενέργειας με εκπομπή ενός σωματιδίου (α ή β)
- ♦ Κατά την γ -διάσπαση ο ασταθής πυρήνας αποβάλλει την περίσσεια ενέργειας με αυθόρμητη εκπομπή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.
- ♦ Η γ -διάσπαση περιλαμβάνει δύο ακόμη διαδικασίες,
 - ♦ δημιουργία ηλεκτρονίων: “ηλεκτρόνια εσωτερικών μετατροπών” και
 - ♦ εσωτερική δημιουργία ζεύγους (e^+e^-).
- ♦ Είναι μία **ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση**

Πως προκύπτει η γ - διάσπαση ?

5

Η γ -διάσπαση προκύπτει:

- Όταν ένας διεγερμένος πυρήνας δεν έχει διαθέσιμη ενέργεια αρκετή για να υποστεί σχάση, ή να εκπεμπει ένα σωματίο (νουκλεόνιο ή α -ακτινοβολία) με ισχυρή αλληλεπίδραση
 - ΗΜ αλληλεπίδραση $\ll$ Ισχυρή αλληλεπίδραση
 - Διεγερμένες καταστάσεις με $E <$ από ένα κατώφλι (μερικά MeV) δεν μπορούν να διασπαστούν με Ισχυρή Αλληλεπίδραση $\rightarrow$ ΗΜ
- Συνήθως μετά από άλλες διασπάσεις (α , β , σχάση)

Η γ -διάσπαση είναι:

- Ο πιο κοινός τρόπος αποδιέγερσης των διεγερμένων πυρηνικών καταστάσεων.
- Οι χρόνοι ζωής κυμαίνονται από $10^{-12}s$ μέχρι πάνω από 100 χρόνια.

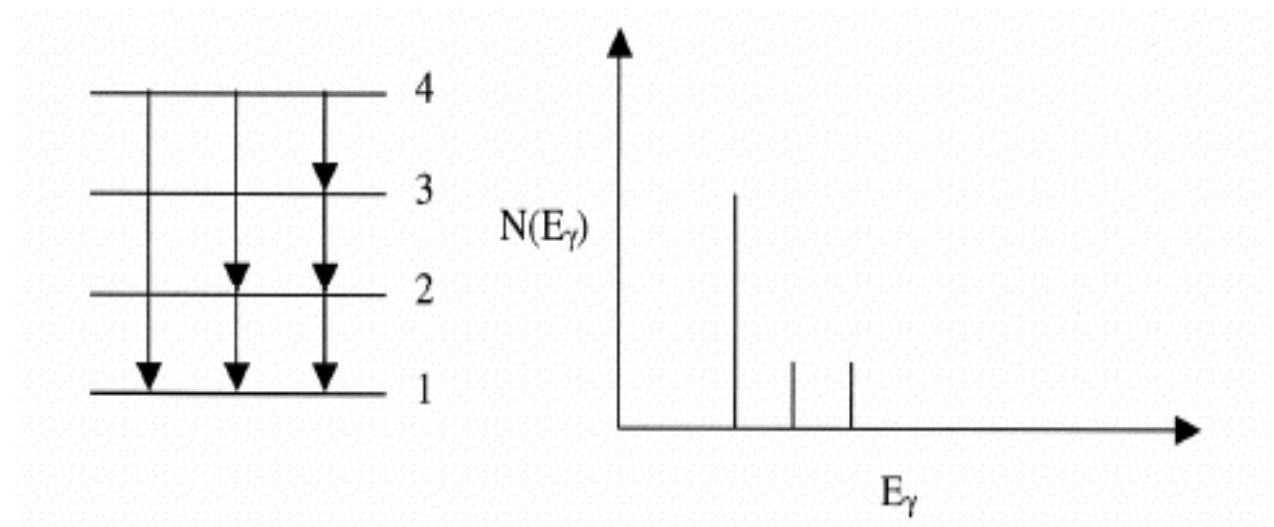
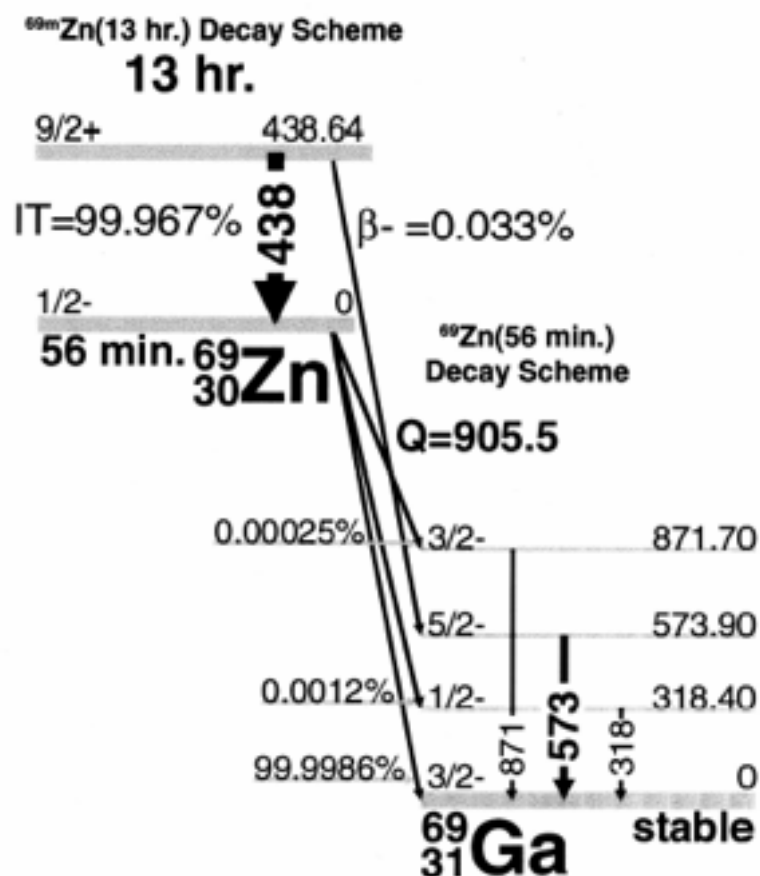
$$\tau \sim 10^{-12} \dots 10^9 s$$

Πως προκύπτει η γ - διάσπαση ?

6

- ♦ Ο πυρήνας ${}_{30}^{69}\text{Zn} \rightarrow {}_{31}^{69}\text{Ga} + e^- + \nu_{e(\text{anti})}$
- ♦ Ο νέος πυρήνας μπορεί να βρεθεί σε μία από τις 4 δυνατές καταστάσεις
- ♦ Από όλες τις δυνατές μεταπτώσεις κάποιες (3) είναι “επιτρεπτές”
- ♦ Ο νέος πυρήνας θα αποδιεγερθεί εκπέμποντας γ -ακτινοβολία που έχει ενέργεια που αντιστοιχεί στη διαφορά ενέργειας των δύο σταθμών

Ένα Παράδειγμα



Ποιοί κανόνες διέπουν την γ-διάσπαση?

Κανόνες Επιλογής

7

- Η γ-διάσπαση είναι ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση $\Rightarrow$

Διατήρηση της στροφορμής :

$$\vec{J}_{in} - \vec{J}_f = \vec{J}$$

προσοχή
διανύσματα

$$\left| |\vec{J}_{in}| - |\vec{J}_f| \right| \leq J \leq |\vec{J}_{in}| + |\vec{J}_f|$$

Αν $J_{in}=3$ και $J_f=2$, η j μπορεί να έχει τιμές 1,2,3,4,5.

Αν $J_{in}=7/2$ και $J_f=3/2$, η j μπορεί να έχει τιμές 2,3,4,5.

Η μετάπτωση $0 \rightarrow 0$ είναι απαγορευμένη αφού j φωτονίου $\neq 0$.
(Το φωτόνιο έχει σπιν $1\hbar$ + στροφορμή...)

Διατήρηση της πάριτυ απαιτεί

$$\pi_i = \pi_f \cdot \pi_\gamma$$

Αν $J_{in}=3^+$ και $J_f=0^+$, η j μπορεί να έχει τιμές: 3 και $\pi_\gamma=+1$

Αν $J_{in}=5/2^-$ και $J_f=1/2^+$, η j μπορεί να έχει τιμές 2,3 και $\pi_\gamma=-1$

Η ομοτιμία του φωτονίου πρέπει να είναι θετική αν η αρχική και τελική κατάσταση έχουν την ίδια ομοτιμία και αρνητική αν έχουν αντίθετες ομοτιμίες

Η εκπομπή ακτινοβολίας γ είναι ισοδύναμη με Ακτινοβολία Πολυπόλων

8

Η ακτινοβολία γ είναι μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας
 $\Rightarrow$ Μπορεί να θεωρηθεί σαν **παλλόμενο ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο** που διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα του φωτός

Στην ημικλασσική περιγραφή της ακτινοβολίας: Τα σωμάτια αλληλεπιδρούν στα πλαίσια της κβαντικής θεωρίας με το “κλασσικό” ηλεκτρομαγνητικό πεδίο (στην εξίσωση Schroedinger μπαίνει το δυναμικό V του πεδίου)

Ο πυρήνας μπορεί να θεωρηθεί σαν σύνολο από **παλλόμενα φορτία** και **παλλόμενα ρεύματα** (που δημιουργούνται από την κίνηση των πρωτονίων και νετρονίων του)

Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που εκπέμπεται από ένα ταλαντούμενο ηλεκτρικό ή μαγνητικό πολύπολο αποτελείται από φωτόνια συγκεκριμένης στροφορμής και ομοτιμίας (parity).

- Κατανομή φορτίου $\rightarrow$ ηλεκτρική ροπή (E)
- Κατανομή ρεύματος $\rightarrow$ μαγνητική ροπή (M)

} Ταλάντωση $\Rightarrow$ εκπομπή
φωτονίων

Η εκπομπή ακτινοβολίας γ είναι ισοδύναμη με Ακτινοβολία Πολυπόλων

9

- Οι δύο δυνατές καταστάσεις ακτινοβολίας E (ηλεκτρική μορφή) -όταν το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στη διάδοση του κύματος- & M (μαγνητική μορφή) -όταν το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στη διάδοση του κύματος
 - Η εκπομπή φωτονίου κατά τη γ -μετάπτωση μπορεί να χαρακτηριστεί ως ηλεκτρική (E) ή μαγνητική (M) και ανάλογα με την τιμή της στροφορμής l του φωτονίου ως 2^l - *πολική*
(ακτινοβολία τύπου (M) με $l=1$ είναι μαγνητική διπολική)
(ακτινοβολία τύπου (E) με $l=2$ είναι ηλεκτρική τετραπολική)
- Οι (E) και (M) ακτινοβολίες πολυπόλου έχουν διαφορετική ομοτιμία:**
Το φωτόνιο έχει ομοτιμία $(-1)^l$ όταν η αποδιέγερση είναι “ηλεκτρική”
Το φωτόνιο έχει ομοτιμία $(-1)^{l+1}$ όταν η αποδιέγερση είναι “μαγνητική”
- ⇒ Οι μεταπτώσεις γ χαρακτηρίζονται από την στροφορμή l που απάγεται από το φωτόνιο.
- Η πιθανότητα μετάπτωσης μειώνεται δραματικά με την αύξηση της μεταβολής της στροφορμής

- Κάθε πολύπολο τάξης L
 - 2^L -πολο (1 =δίπολο, 2 =τετράπολο, 3 =οκτάπολο...)
- φέρει στροφορμή
 - $L=1,2,3,\dots(\hbar)$
- Συμβολισμός ακτινοβολίας ηλεκτρικού (ή μαγνητικού) πολυπόλου
 - EI ή MI ,
 - π.χ. $E2$: ηλεκτρικό τετράπολο (2^2)
 - $M3$: μαγνητικό οκτάπολο
- Η ομοτιμία για την κάθε περίπτωση
 - $\pi_\gamma = (-1)^L$ *ηλεκτρικό πολύπολο*
 - $\pi_\gamma = -(-1)^L$ *μαγνητικό πολύπολο*

Ακτινοβολία πολυπόλων



Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία θα είναι το άθροισμα των συνεισφορών των πολυπόλων (αν και συνήθως 1-2 πολύπολα προεξάρχουν)

Ένα φωτόνιο (είναι ένα διανυσματικό σωματίο) πρέπει να φέρει τουλάχιστον μια μονάδα τροχιακής στροφορμής, (άρα δεν επιτρέπονται E0 και M0 ακτινοβολίες)

Η μεταβολή της ομοτιμίας σε μια μετάπτωση καθορίζεται από την τάξη της αντίστοιχης ακτινοβολίας και τον τύπο του πολυπόλου

Για μεταπτώσεις E: $\pi_i \pi_f(E) = (-1)^L$

Για μεταπτώσεις M: $\pi_i \pi_f(M) = -(-1)^L$

Η διατήρηση της στροφορμής και της ομοτιμίας οδηγούν σε ένα σύνολο κανόνων επιλογής οι οποίοι καθορίζουν τις επιτρεπτές μεταπτώσεις.

Ακτινοβολία	Συμβολισμός	l (τιμή L_γ)	π_γ
Ηλεκτρ. Διπόλου	E1	1	-1
Μαγν. Διπόλου	M1	1	1
Ηλεκτρ. Τετραπόλου	E2	2	1
Μαγν. Τετραπόλου	M2	2	-1
Ηλεκτρ. Οκταπόλου	E3	3	-1
Μαγν. Οκταπόλου	M3	3	1
Ηλεκτρ. Δεκαεξαπόλου	E4	4	1
Μαγν. Δεκαεξαπόλου	M4	4	-1
.....			

Μεσοι Χρόνοι ζωής στη γ-διάσπαση

13

Η πιθανότητα μετάπτωσης (1/τ: μέσος χρόνος ζωής) στη γ-διάσπαση προκύπτει από την ημικλασσική θεωρία εκπομπής ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας

$$\lambda(l) = \frac{1}{\tau_\gamma} = \frac{8\pi(l+1)}{l [(2l+1)!!]^2} \frac{1}{\hbar} \frac{E_\gamma^{2L+1}}{(\hbar c)^{2l}} \times B(l)$$

B(l) είναι η “ανηγμένη πιθανότητα μετάπτωσης” και περιέχει πληροφορία για τον πυρήνα

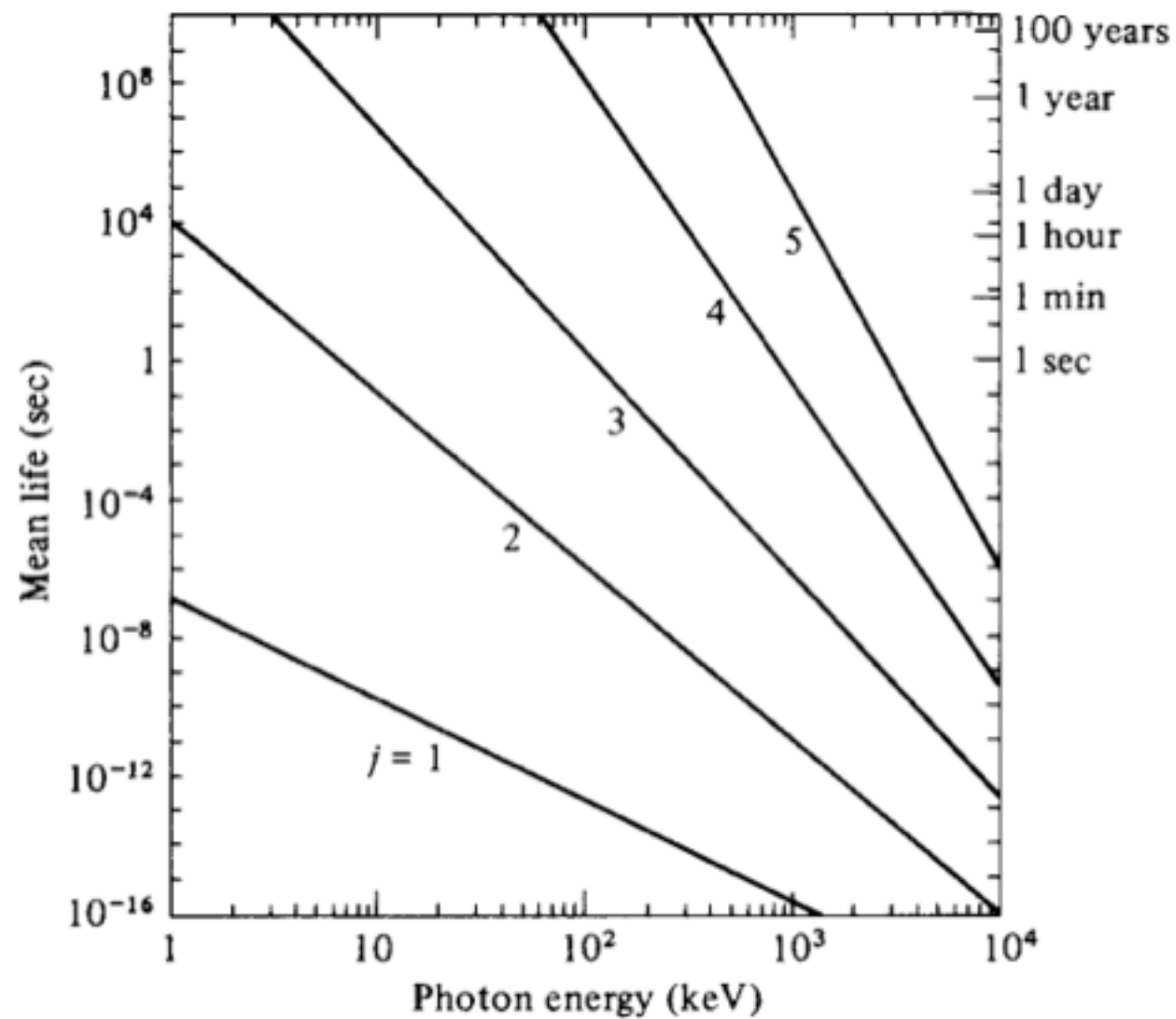
Ο Weisskopf χρησιμοποιώντας το μοντέλο των φλοιών ενός απλού πυρήνα κατέληξε σε σχέσεις που εκφράζουν τις σταθερές διάσπασης σε συνάρτηση της Ενέργειας και του A.

Τύπος μετάπτωσης	τ_γ (χρόνος ημιζωής, s)	τ_γ (s) για $A=125, E=0.1 \text{ MeV}$
E1	$5.7 \times 10^{-15} E^{-3} A^{-2/3}$	2×10^{-13}
E2	$6.7 \times 10^{-9} E^{-5} A^{-4/3}$	1×10^{-6}
E3	$1.2 \times 10^{-2} E^{-7} A^{-2}$	8
E4	$3.4 \times 10^4 E^{-9} A^{-8/3}$	9×10^7
M1	$2.2 \times 10^{-14} E^{-3}$	2×10^{-11}
M2	$2.6 \times 10^{-8} E^{-5} A^{-2/3}$	1×10^{-4}
M3	$4.9 \times 10^{-2} E^{-7} A^{-4/3}$	8×10^2
M4	$1.3 \times 10^5 E^{-9} A^{-2}$	9×10^9

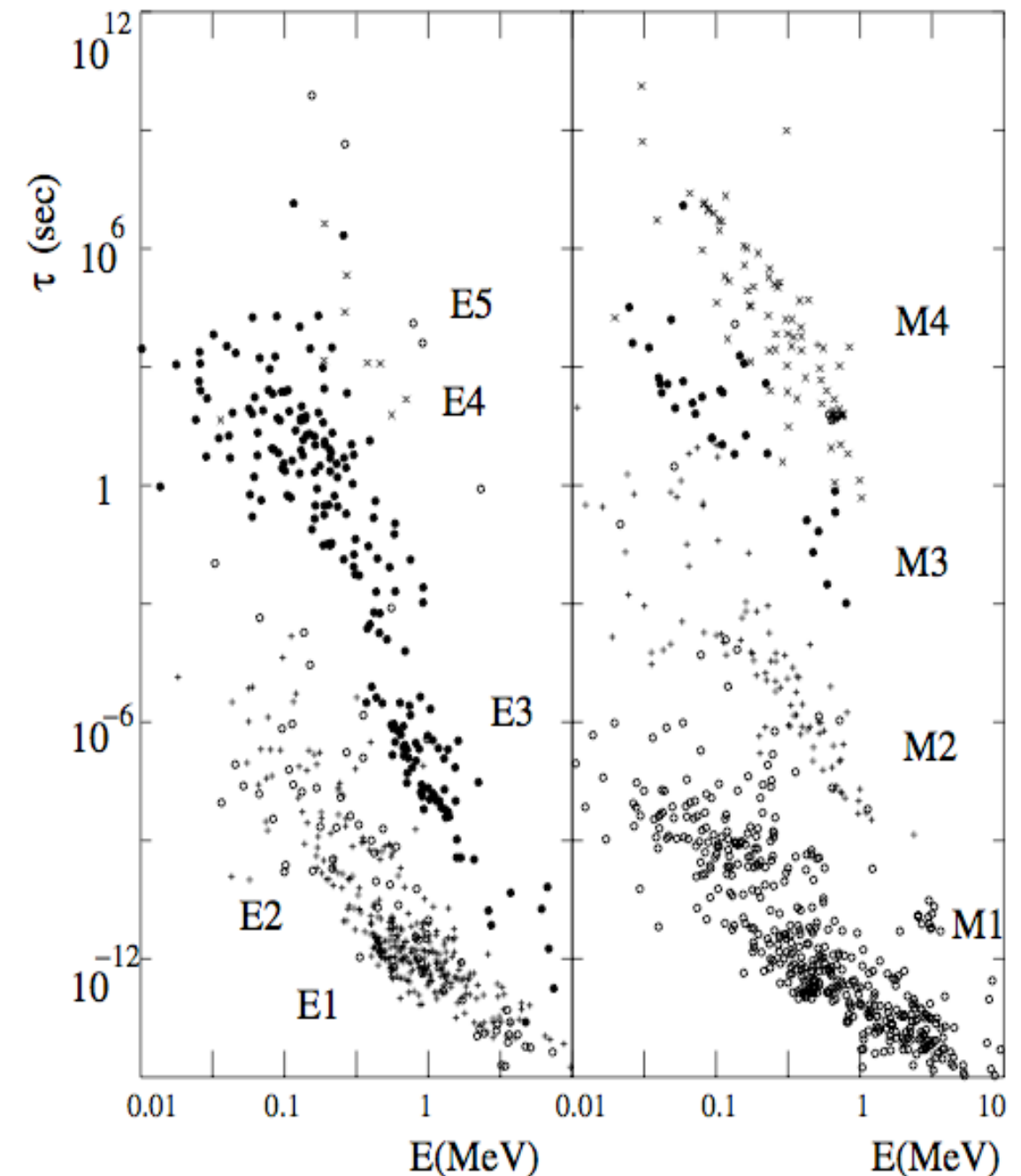
Η εξάρτηση: ενέργεια - χρόνος ζωής

14

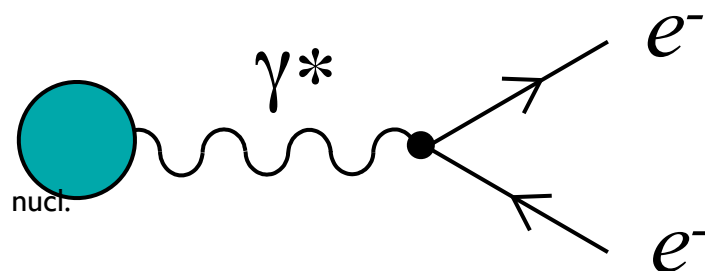
Για $A=100$,
ηλεκτρικές πολυπολικές



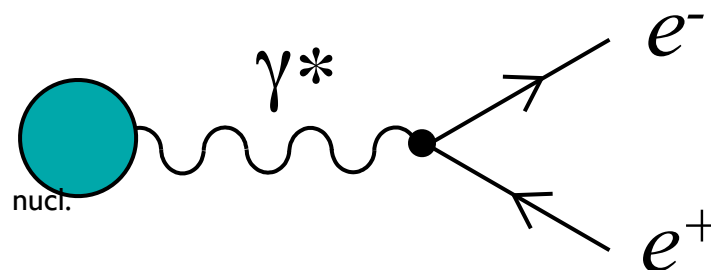
$$\tau_M/\tau_E \sim 20 A^{2/3}$$



- Τι γίνεται όταν ένας πυρήνας με $J=0$ χρειάζεται να αποδιεγερθεί;
- ΔΕΝ μπορεί μέσω εκπομπής γ
 - Μπορεί να κάνει εσωτερική μετατροπή -με εκπομπή δυνητικού γ^* (α'la Auger στο άτομο)



- Θα μπορούσε και μέσω δημιουργίας ζεύγους αν $E > 2m_e$ (δυνητικό γ δεν είναι απαραίτητο να έχει $S=1$ και μετατρέπεται σε ζεύγος σε μια $J=0$ κατάσταση)



Εσωτερικές Μετατροπές

16

0-→0 απαγορευμένη

Τι γίνεται σε μια 0^+ διεγερμένη:

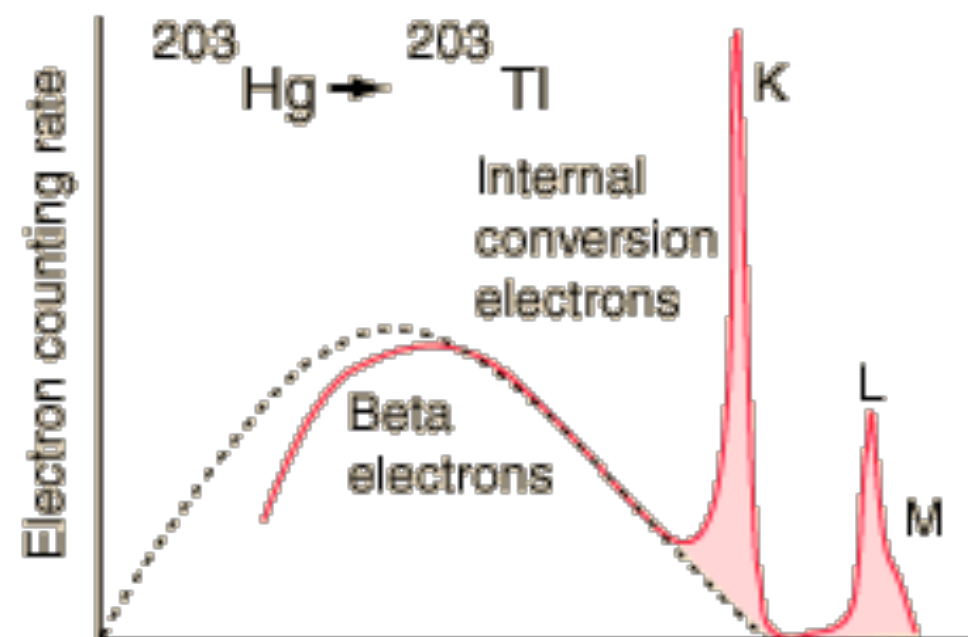
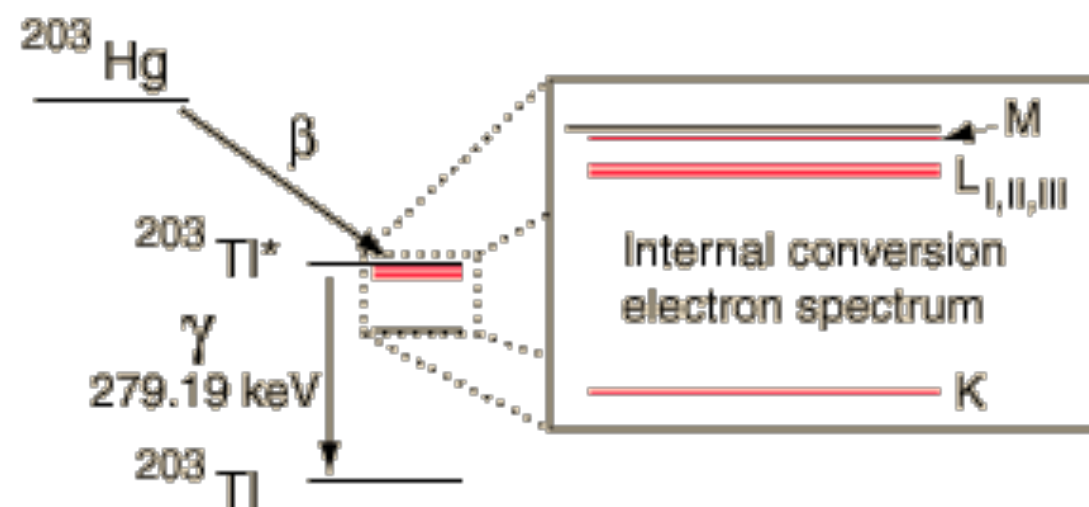
Διασπάται με

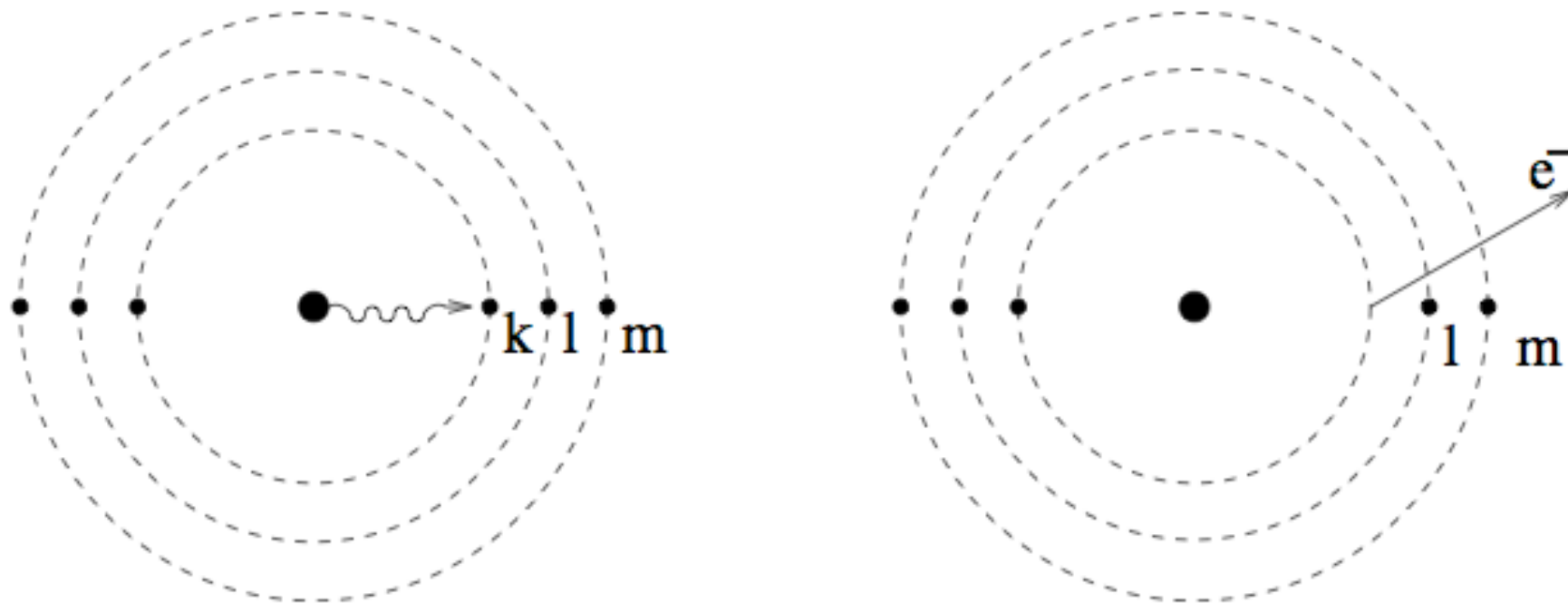
- **Εσωτερική μετατροπή**

Ο πυρήνας εκπέμπει ένα δυνητικό φωτόνιο το οποίο διώχνει ένα ατομικό ηλεκτρόνιο. (Η τροχιά του e πρέπει να περνάει μέσα από τον πυρήνα). Η πιθανότητα να βρεθεί στον πυρήνα αυξάνει $\propto Z^3$. Για $Z \gg$ ανταγωνίζεται τις γ διασπάσεις.

- **Εσωτερική μετατροπή ζεύγους e^+e^- .**

Ο πυρήνας εκπέμπει ένα δυνητικό φωτόνιο το οποίο μετατρέπεται σε ζεύγος e^+e^- .



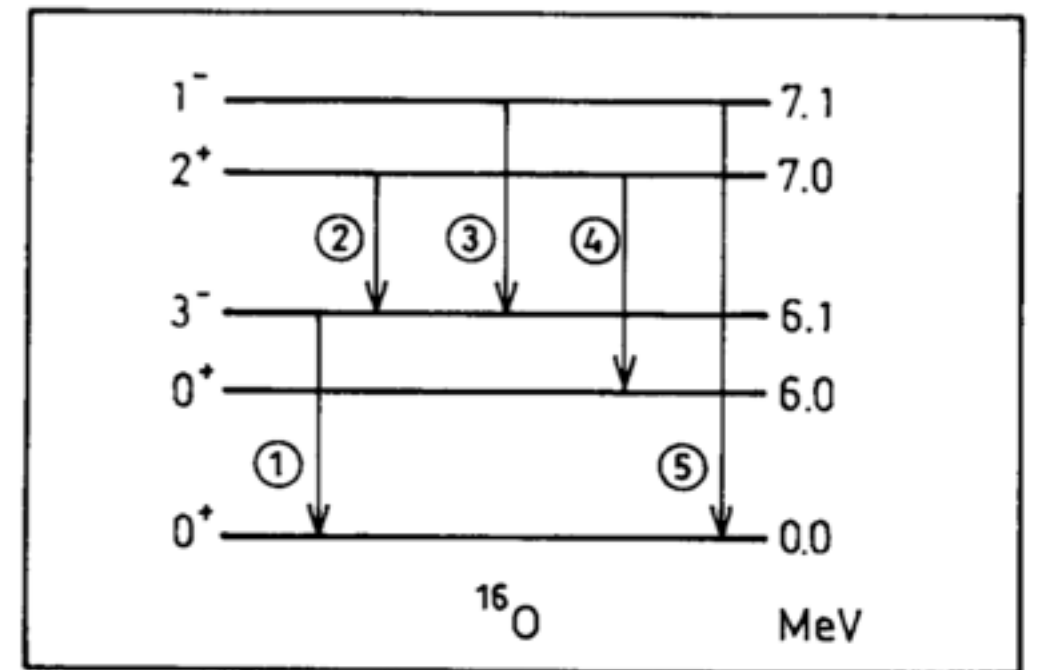


Προσοχή:

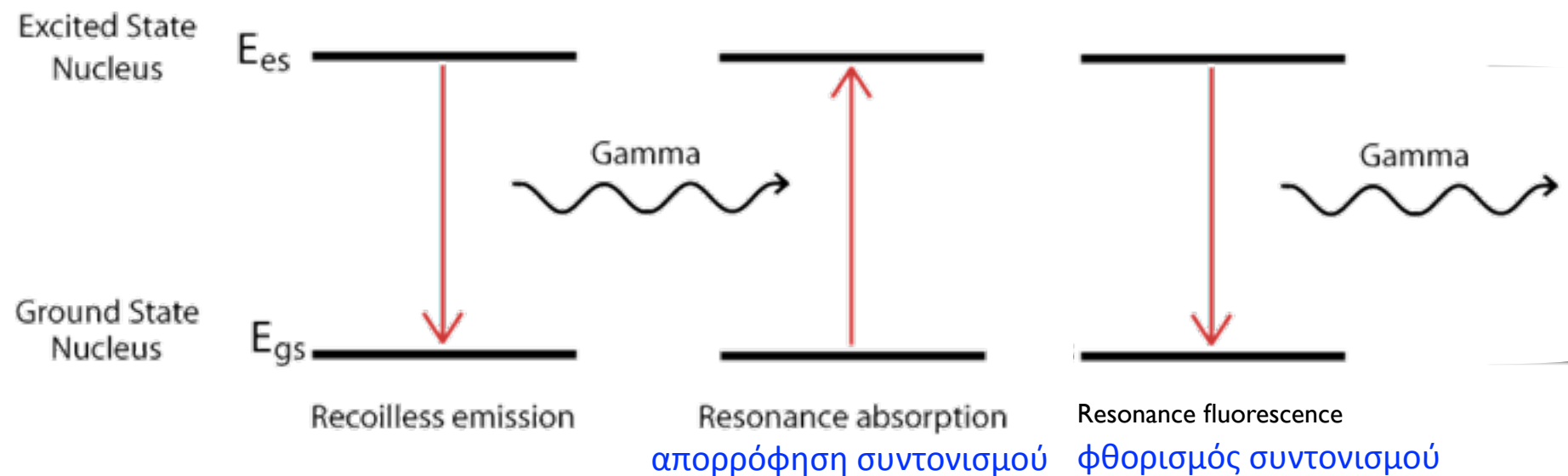
Δεν μπορεί να είναι φωτοηλεκτρικό φαινόμενο λόγω διατήρησης της στροφορμής (έχουμε πραγματικό φωτόνιο, όχι δυνητικό!).

Δίνονται οι στάθμες του ^{16}O με τα αντίστοιχα σπιν, ομοτιμία και ενέργεια.

- Τί είδους μετάπτωση είναι η κάθε αποδιέγερση και πόση η ενέργεια σε κάθε περίπτωση (1,2,3,4,5).
- Δώστε τους δυνατούς τρόπους αποδιέγερσης της στάθμης 6.0 MeV.



	$J_i \rightarrow J_f$	$\Delta J \leq l \leq \Sigma J$	$\Delta\pi$	τύπος	E_γ
1	$3 \rightarrow 0$	3	-1	E3	6.1
2	$2 \rightarrow 3$	1,2,3,4,5	-1	E1+M2+E3+M4+E5	0.9
3	$1 \rightarrow 3$	2,3,4	+1	E2+E4+M3	1.0
4	$2 \rightarrow 0$	2	+1	E2	1.0
5	$1 \rightarrow 0$	1	-1	E1	7.1



Φωτόνιο απο αποδιέγερση γ απορροφάται από όμοιο πυρήνα (**απορρόφηση συντονισμού στην ατομική**), ο οποίος στη συνέχεια αποδιεγείρεται επανεκπέμποντας φωτόνιο (**φθορισμός συντονισμού στην ατομική**) (1929 Kuhn) .

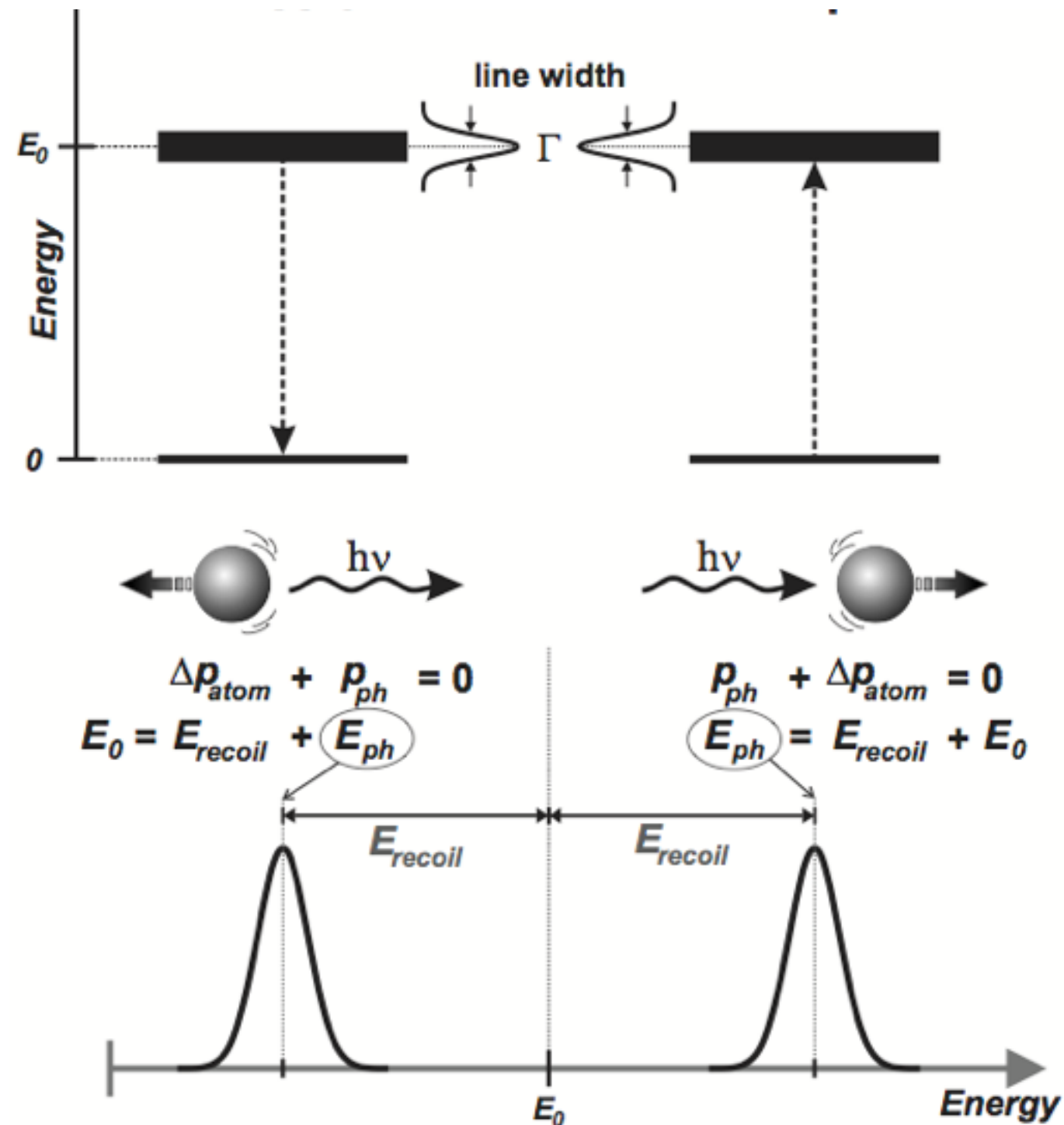
Είναι δυνατόν να πετύχουμε Πυρηνικό Συντονισμό ?

Πολλές προσπάθειες αποδείχθηκαν άκαρπες (μέχρι το 1951).

Ανάκρουση πυρήνα

- κατά την εκπομπή : $E_\gamma = E_0 - E_R$
(φθορισμός συντονισμού)
- κατά την απορρόφηση : $E_\gamma = E_0 + E_R$
(απορρόφηση συντονισμού)

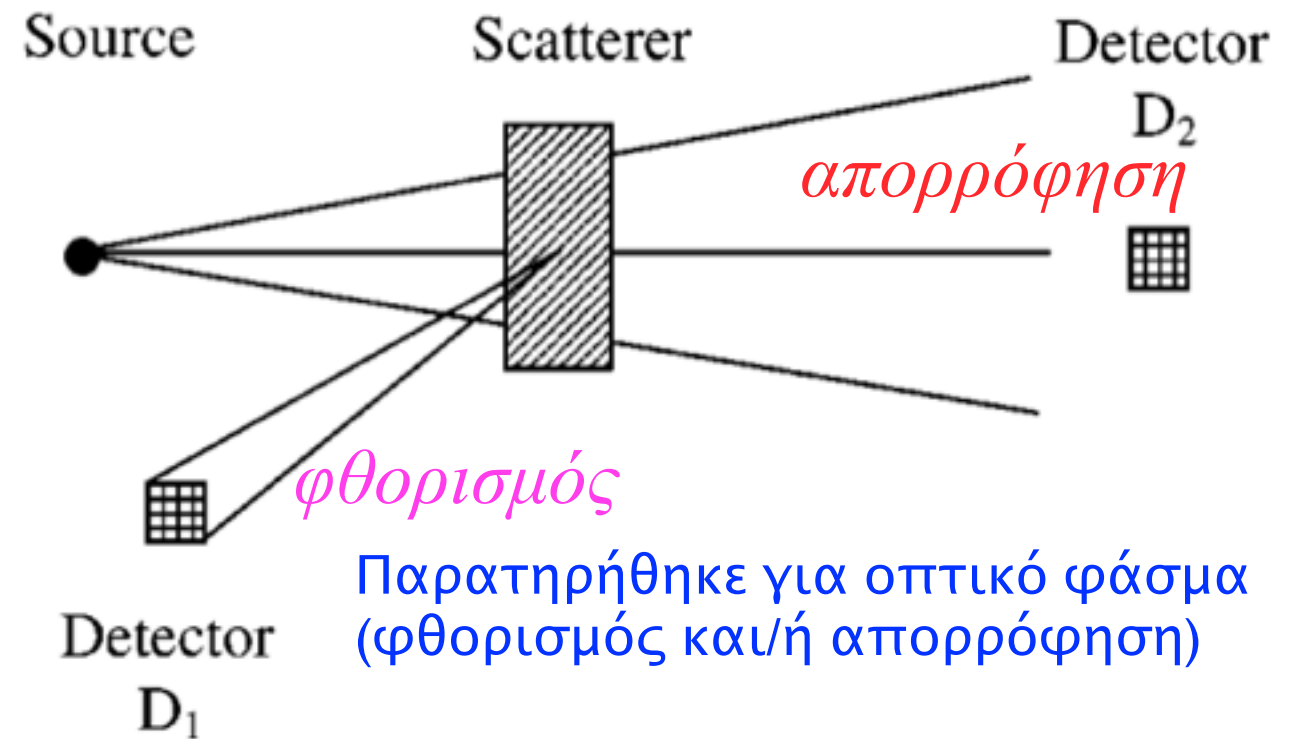
εύρος (Γ) της στάθμης $\tau \Gamma \approx \hbar$



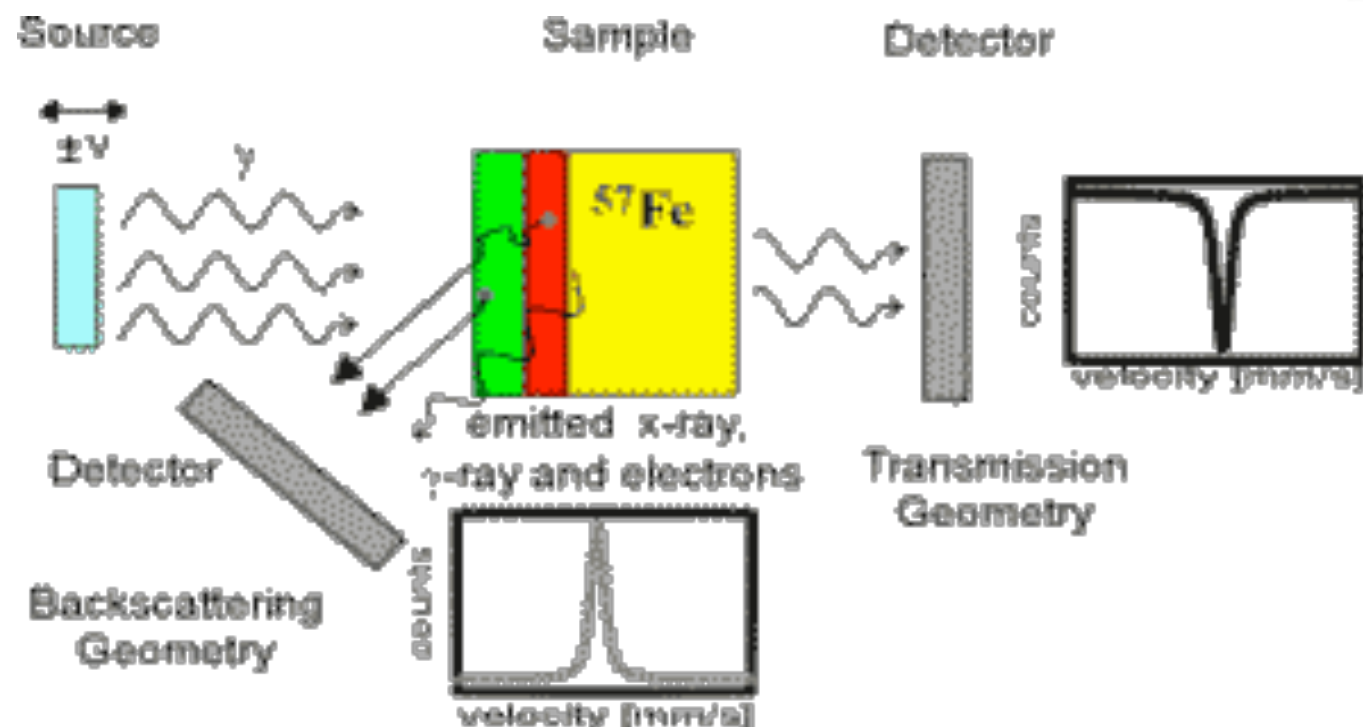
Πυρηνικός συντονισμός: Παρατηρήθηκε πειραματικά ?

21

*Πειραματική διάταξη για τη μέτρηση
φθορισμό συντονισμού ή/και
απορρόφηση συντονισμού*



Παρατηρήθηκε για οπτικό φάσμα
(φθορισμός και/ή απορρόφηση)

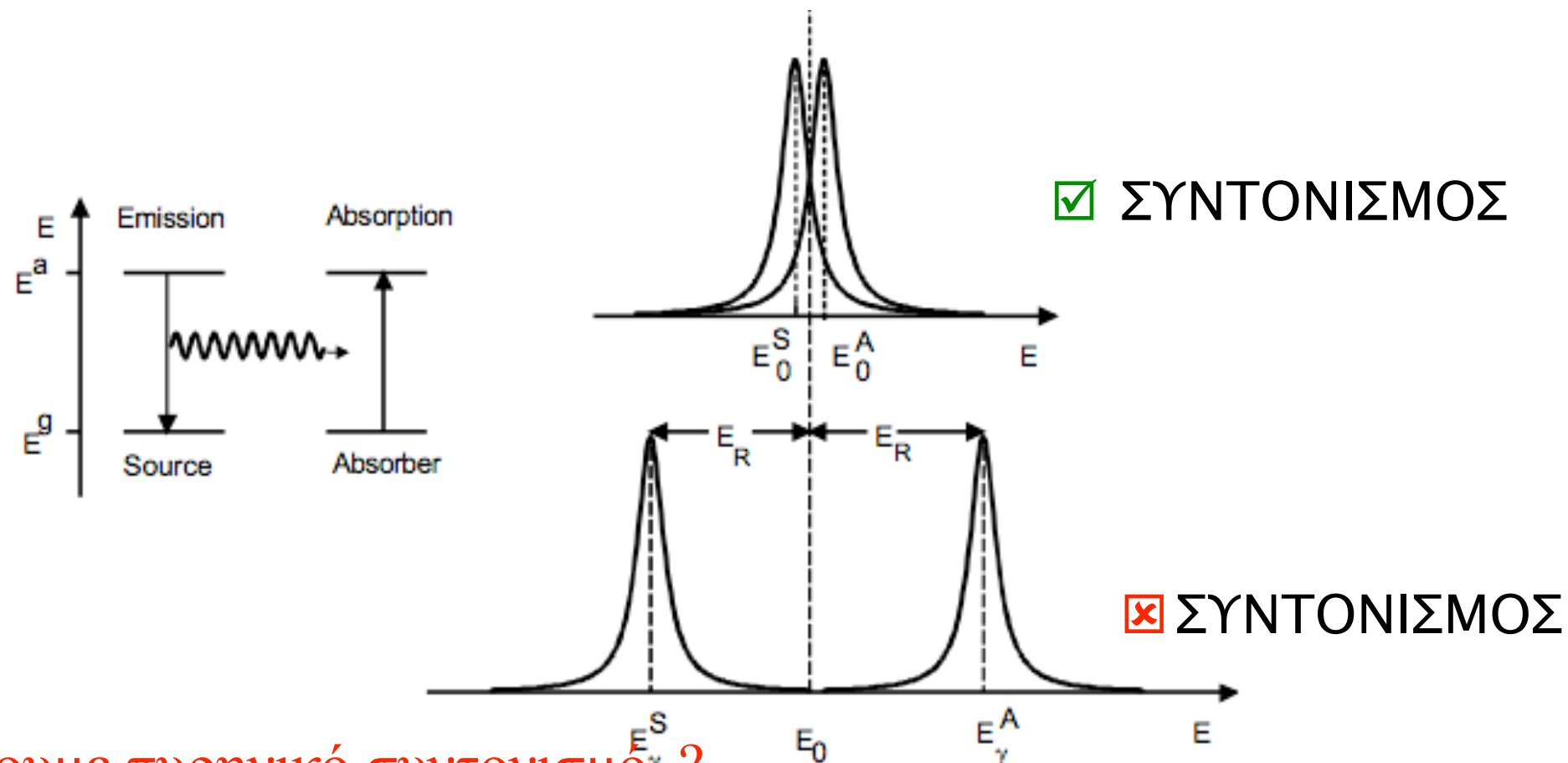


Πυρηνικός συντονισμός

22

Πότε δεν παρατηρείται ο πυρηνικός συντονισμός ??

Όταν η γραμμή εκπομπής δεν επικαλύπτεται με τη γραμμή απορρόφησης
Αν οι δύο γραμμές επικαλύπτονται έχουμε συντονισμό !



Πώς θα πετύχουμε πυρηνικό συντονισμό ?

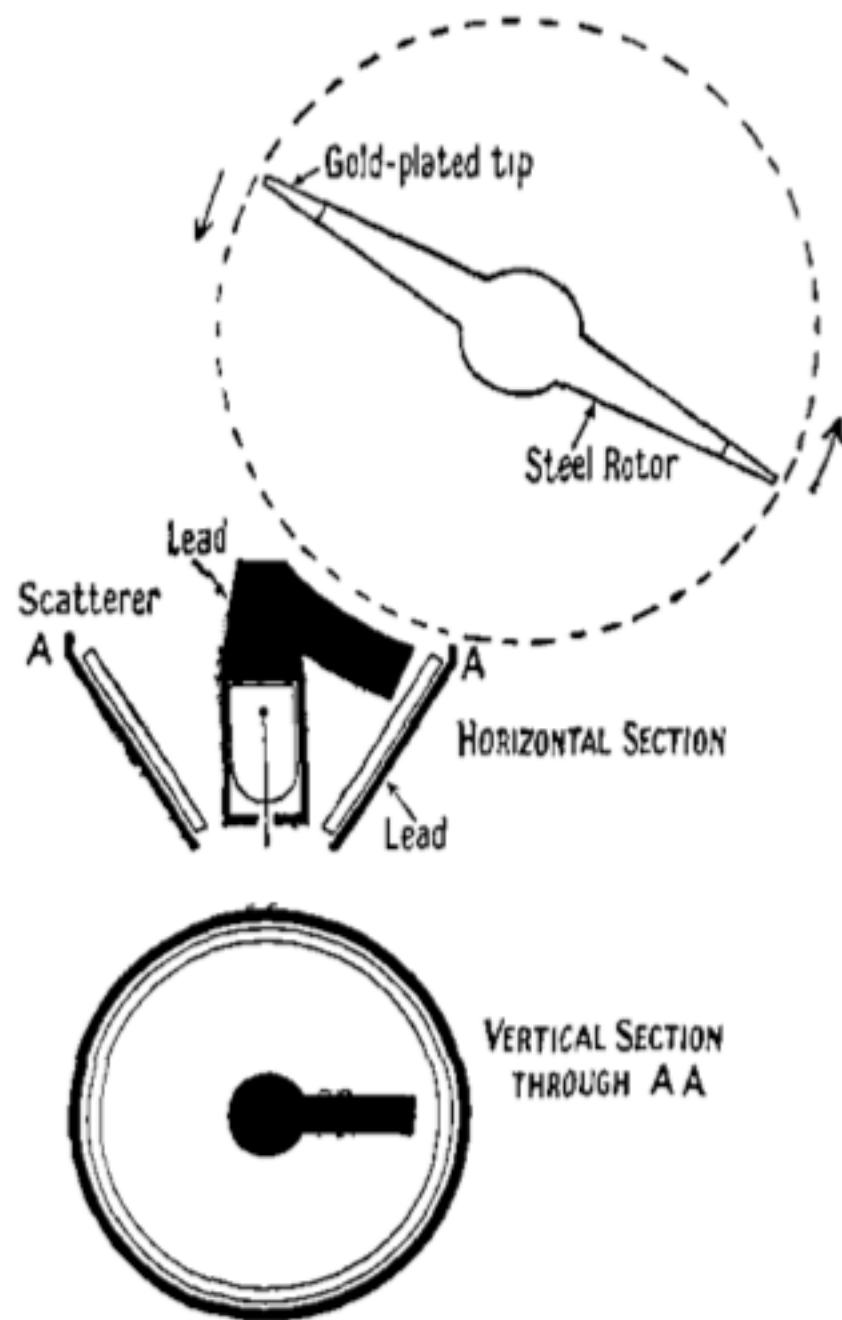
Αρχικά προσπάθησαν να το πετύχουν με 2 τρόπους:

1. Μειώνοντας την ενεργειακή διαφορά των δύο γραμμών (χρησιμοποιώντας το Φαινόμενο Doppler) (πείραμα Moon).
2. Διευρύνοντας το πλάτος των γραμμών με θερμική κίνηση, ώστε να αλληλεπικαλυφθούν (πείραμα Malmfors,).

Πείραμα Moon

23

1950s, Philip Moon in Birmingham



Χρησιμοποίησε το φαινόμενο Doppler για να αντισταθμίσει το έλλειμα ενέργειας μεταξύ πηγής και σκεδαστή προσθέτοντας ενέργεια :

$$E_D = \frac{v_n}{c} E_\gamma$$

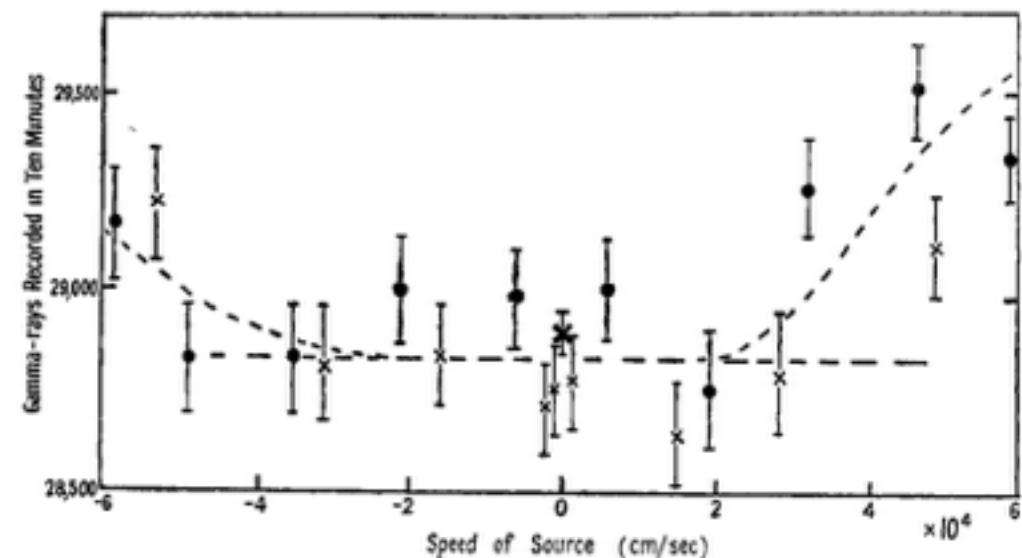


Figure 2. Effect of speed of source on rate of recording of scattered gamma-rays. Negative speeds indicate rotation in opposite sense to that shown in Figure 1.

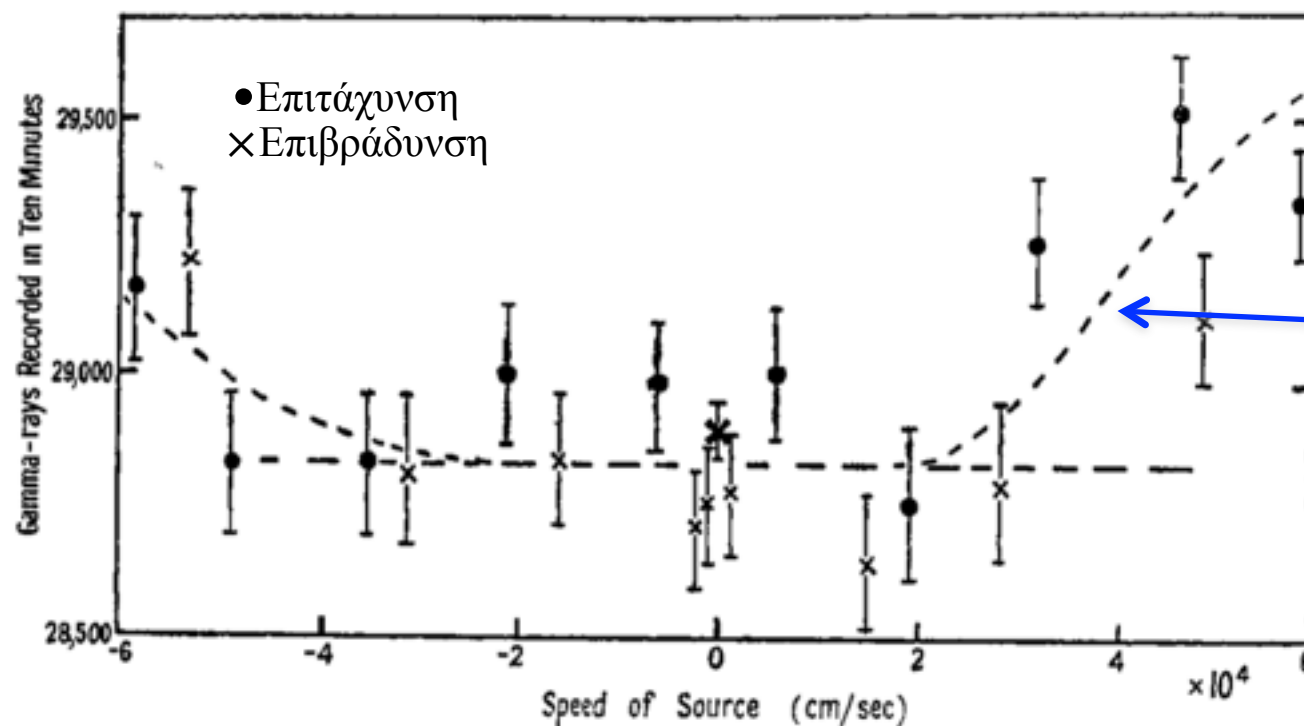
Κατέγραψε μικρή αύξηση στην ένταση της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας.

Figure 1. (Not to scale)

Επιλογή ισοτόπου

- Σε φυσική αυθονία για σκεδαστής
- Να έχει διεγερμένες καταστάσεις για να χρησιμοποιηθεί ως πηγή γ.
- Αποδιέγερση στη βασική στάθμη
- Μεγάλο εύρος Γ.
- Απαιτούμενη ταχύτητα πηγής εφικτή τεχνολογικά

Πηγή ^{198}Au (β) $\rightarrow$ ^{198}Hg
 ^{198}Hg γ - 411 keV
Σκεδαστής Hg



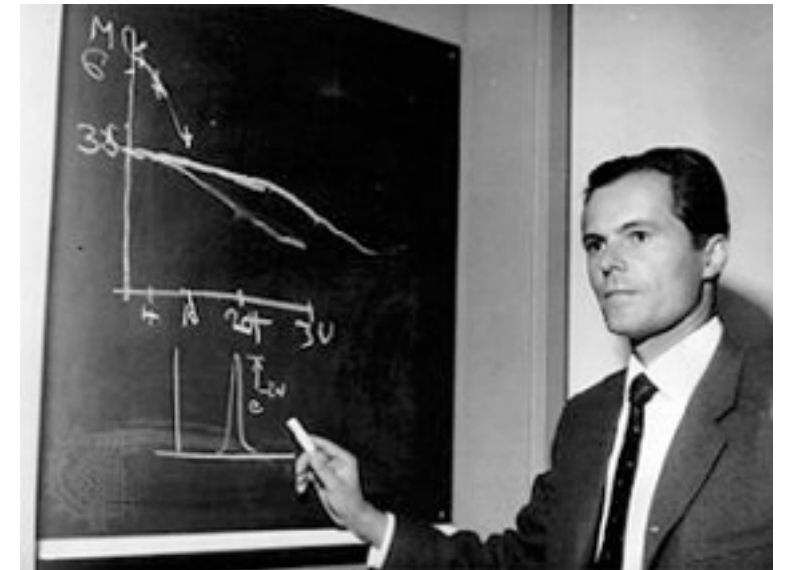
Κατέγραψε μικρή αύξηση στην ένταση της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας.

Figure 2. Effect of speed of source on rate of recording of scattered gamma-rays. Negative speeds indicate rotation in opposite sense to that shown in Figure 1.

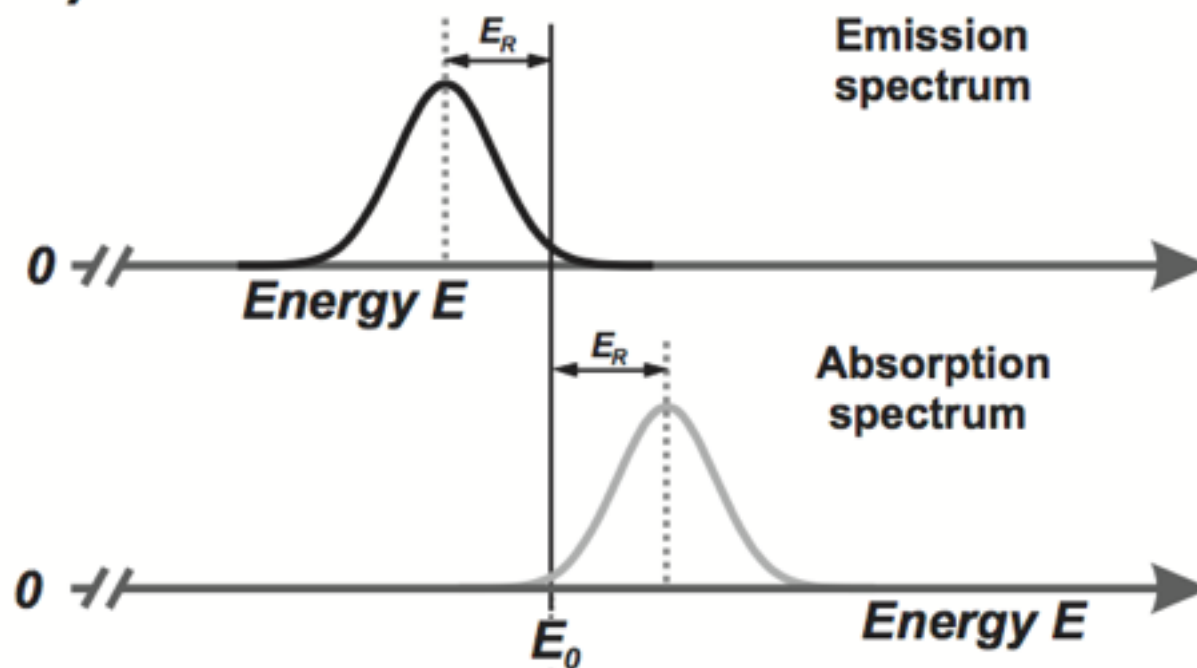
Η λύση προτάθηκε από τον Rudolf L. Mössbauer

25

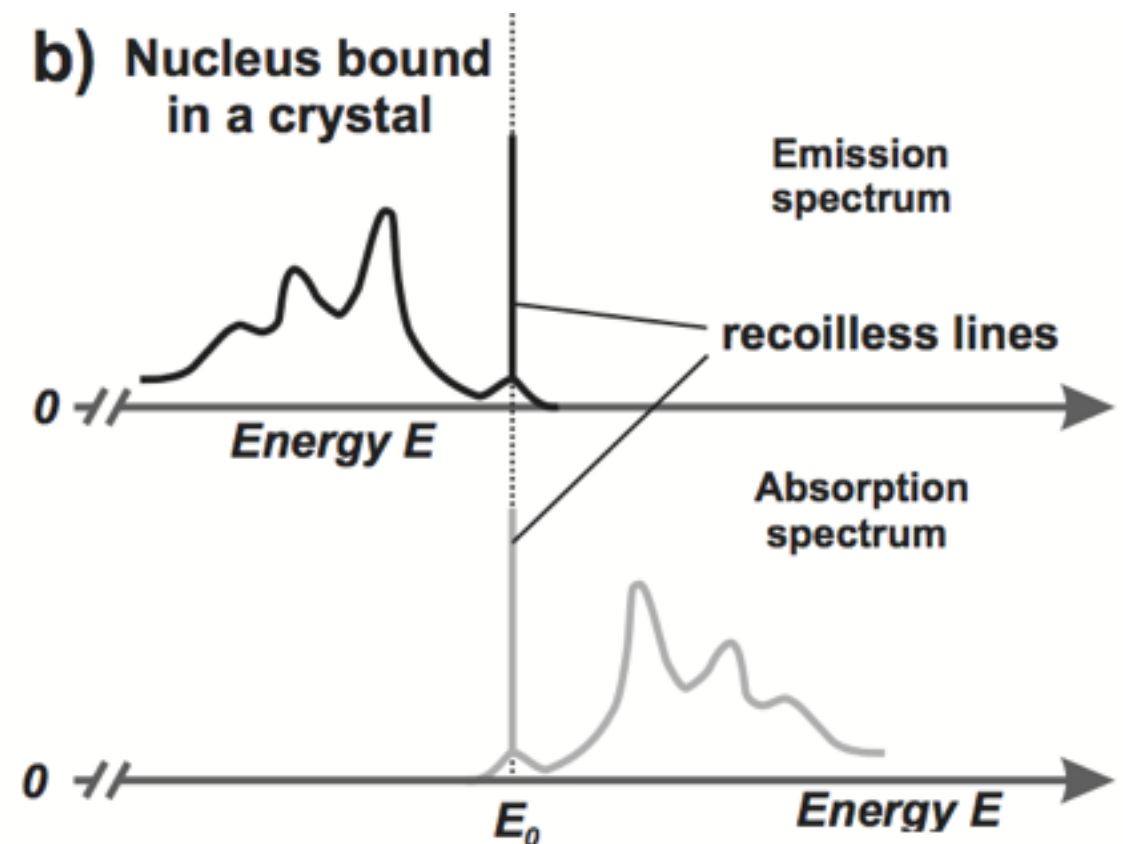
Ο Mössbauer ανακάλυψε ότι σε **χαμηλές θερμοκρασίες**, ένας πυρήνας που βρίσκεται στο πλέγμα ενός κρυστάλλου και εκπέμπει ένα γ-φωτόνιο, έχει ενέργεια ανάκρουσης ελάχιστη και σε κάποιες περιπτώσεις ο κρύσταλλος δεν μπορεί να απορροφήσει ενέργεια και άρα η ενέργεια ανάκρουσης μηδενίζεται.

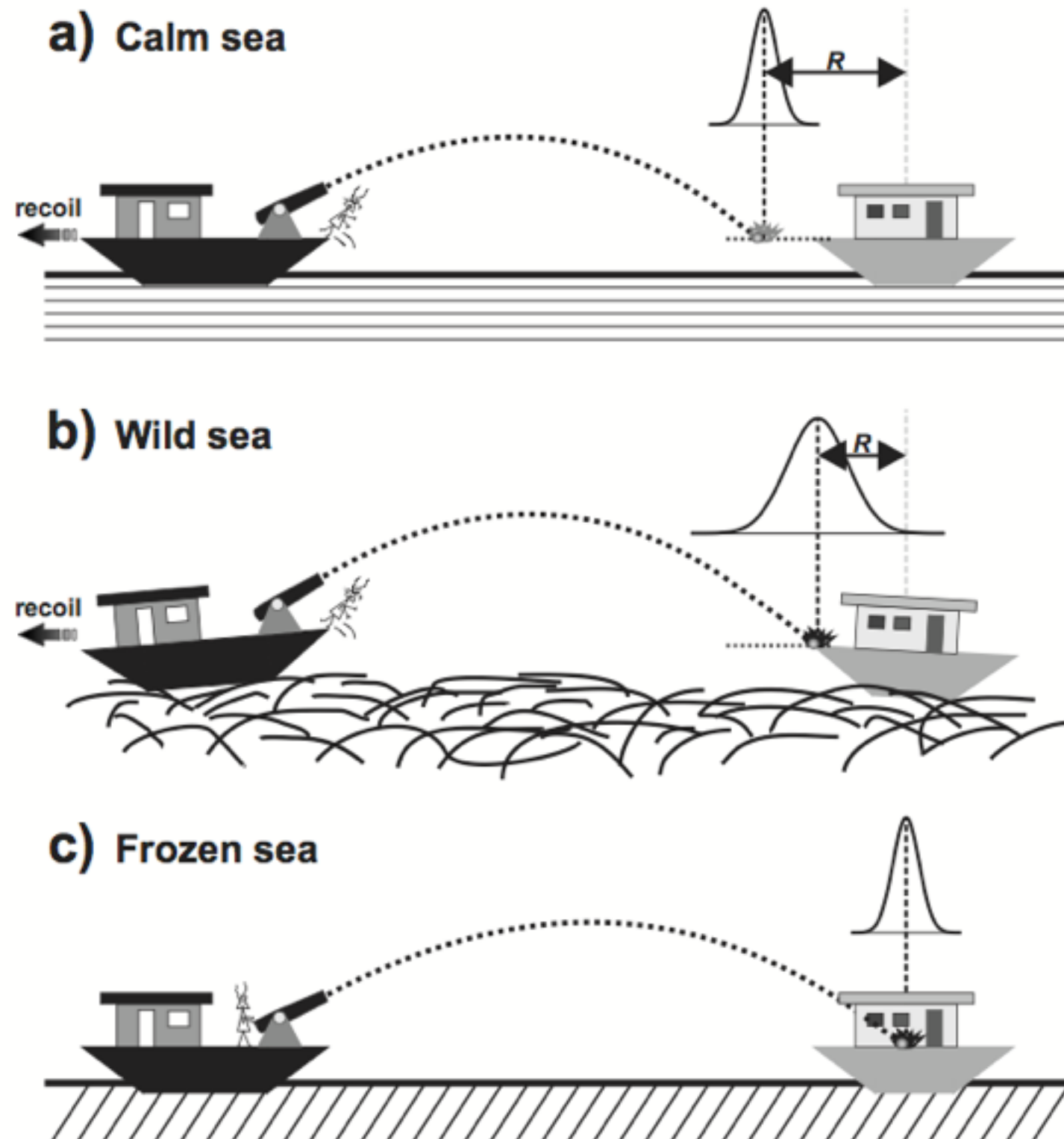


a) Freely recoiling nucleus



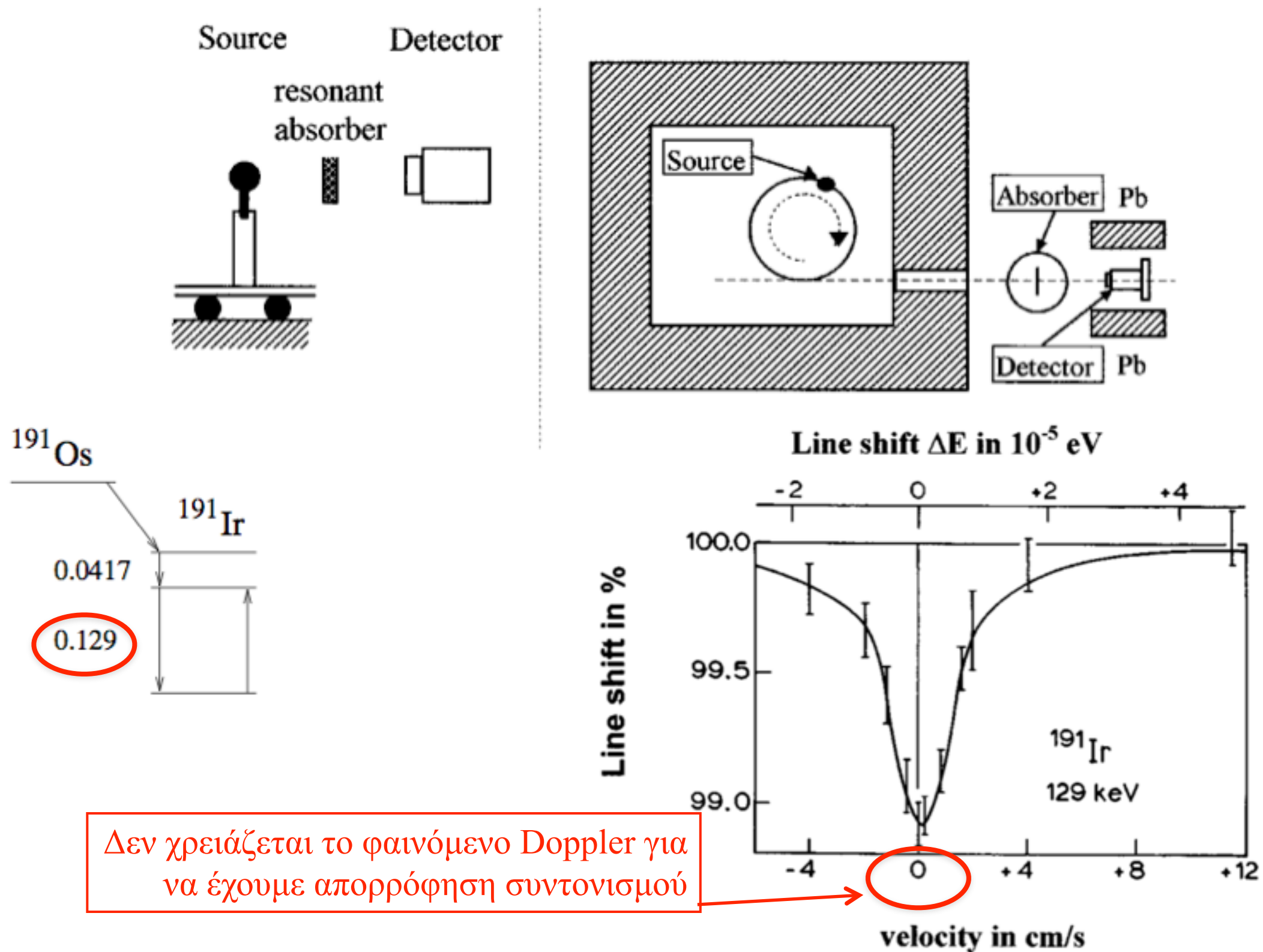
b) Nucleus bound in a crystal





Φαινόμενο Mössbauer

27



Δεν χρειάζεται το φαινόμενο Doppler για να έχουμε απορρόφηση συντονισμού

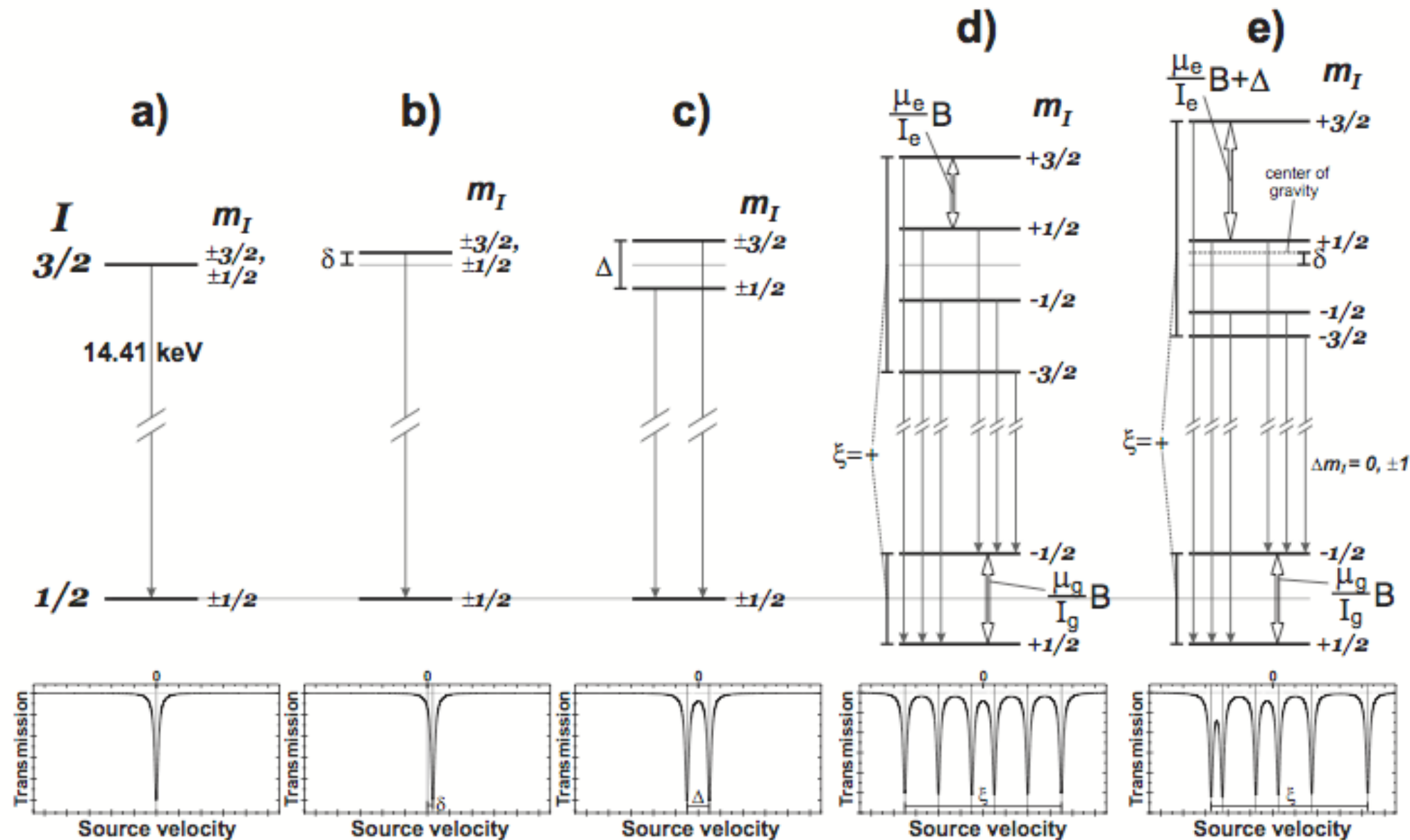
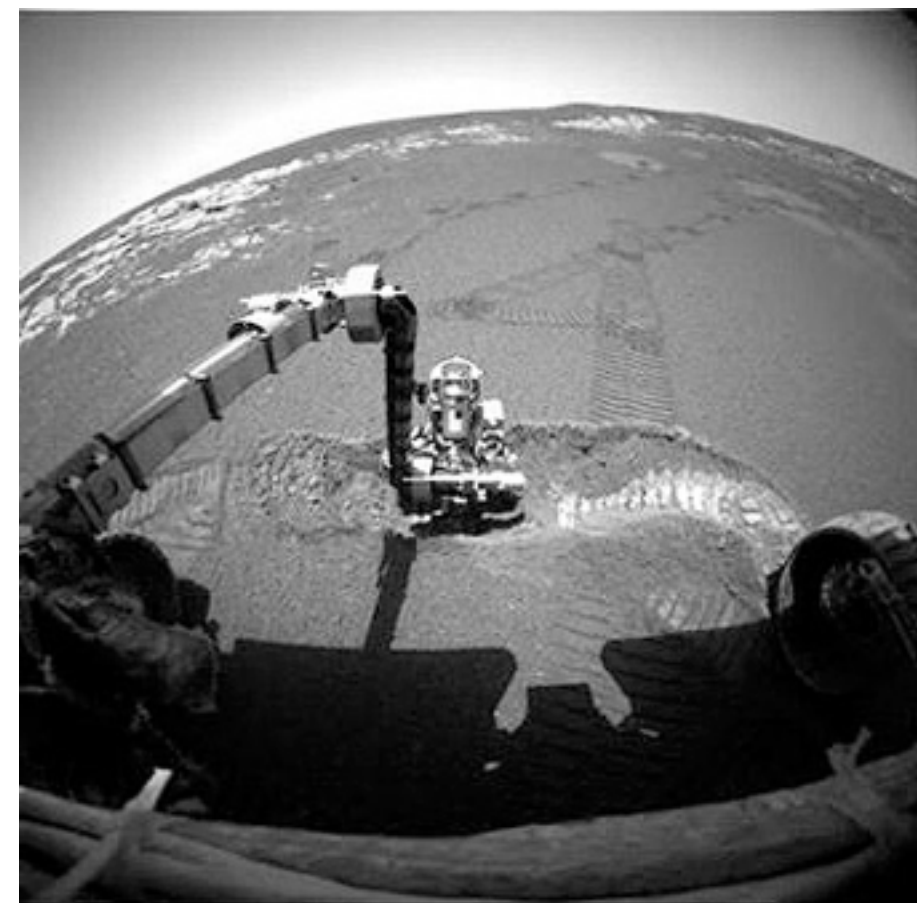
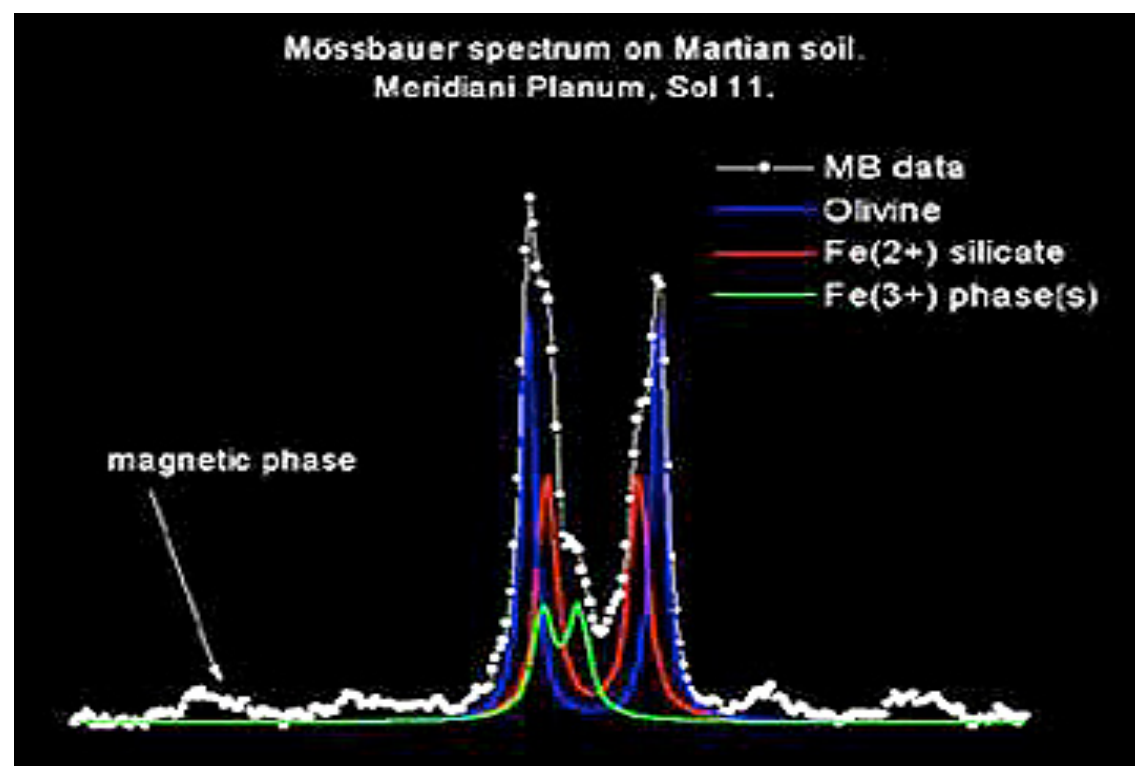
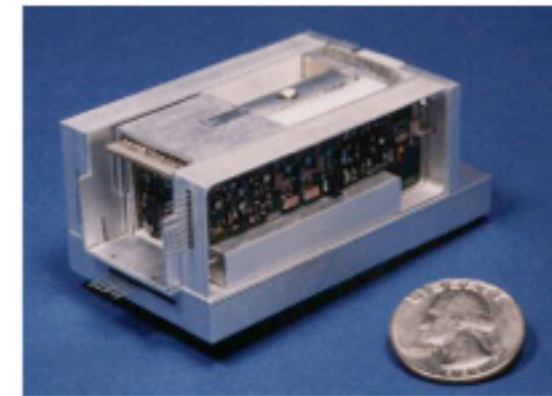


Figure 6.6: Nuclear energy level splittings (top) and corresponding Mössbauer spectra (bottom) for ^{57}Fe in case of: a) an isolated nucleus, b) only an electric monopole interaction, c) only a quadrupole interaction, d) only a magnetic dipole interaction and e) all interactions combined (see text). The splittings and spectra are sketched based on the hypothetical but illustrative case where $\delta : \Delta : \mu_e B/I_e : \mu_g B/I_g = 1 : 4 : 6 : 10$ (resulting in $\xi = 28$). The transitions between the levels are restricted by the dipole selection rule $\Delta m_I = 0, \pm 1$ in all cases. For clarity and simplicity, all level schemes are drawn with the center of gravity of their nuclear ground state aligned and all transition lines are approximated by lorentzian lineshapes of equal width and intensity.

Φαινόμενο Mössbauer στη γ-Φασματοσκοπία

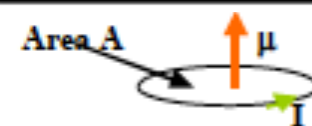
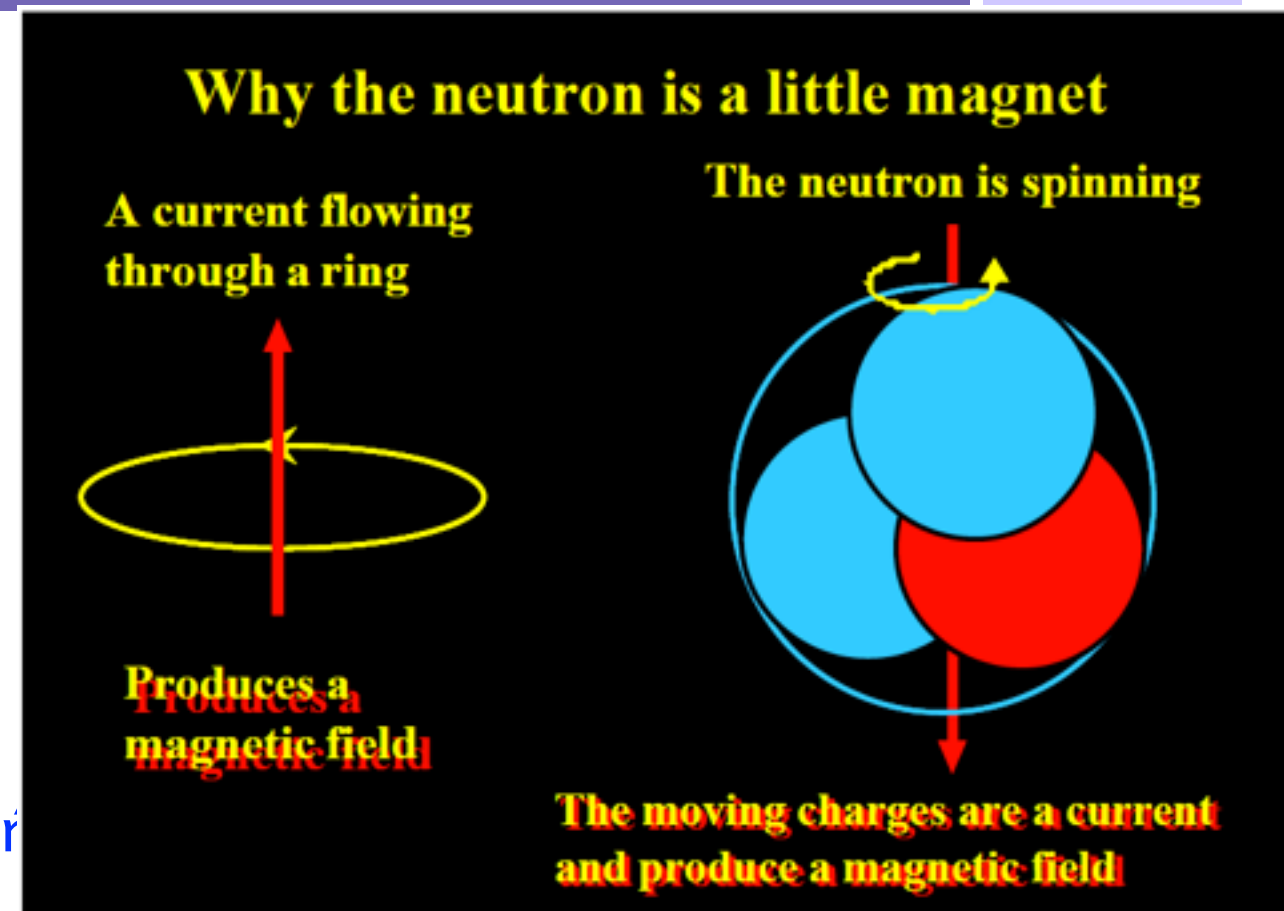
29

- Nuclear and Solid State Physics
- Biology
- Chemistry
- Materials Science
- Geology
- Archeology
- Forensic Science
- Paleontology
- Mineralogy
- Metallurgy
- Space Science (on Mars Exploration Rovers)

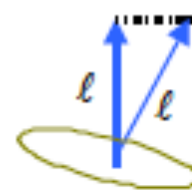


γ-διάσπαση Θεσσαλονίκη 8-12-2016

- Φορτισμένο σωματίο σε περιστροφική κίνηση (γωνιακή ορμή) δημιουργεί μαγνητική διπολική ροπή
- Φορτισμένο σωματίο με “εσωτερική στροφορμή” (σπιν), έχει επίσης και “εσωτερική μαγνητική διπολική ροπή” (intrinsic magnetic moment)
- ▶ e, p αναμένεται και έχουν μαγνητική ροπή
Το νετρόνιο παρ’ότι ΟΥΔΕΤΕΡΟ, έχει επίσης μαγνητική ροπή!
- Το νετρόνιο έχει κατανομή φορτίου με συνολικό φορτίο μηδέν. $\Rightarrow \Delta E N$
 $\epsilon \iota \nu \alpha \iota \sigma \eta \mu \epsilon \iota \alpha \kappa \acute{o} . \acute{E} \chi \epsilon \iota$
 $\delta \omicron \mu \acute{\eta} !$



$$\mu = iA$$



$$\mu = \frac{e}{(2\pi r / v)} \pi r^2 = \frac{evr}{2} = \frac{e}{2m} L$$

$$\boxed{\mu = \frac{e\hbar}{2m} L}$$

μαγνητόνη: $e\hbar/2m$

μαγνητόνη Bohr: $\mu_B = e\hbar/2m_e$

πυρηνική μαγνητόνη: $\mu_N = e\hbar/2m_p$

- Η πυρηνική μαγνητική ροπή είναι το διάνυσμα μ_j . Η διεύθυνση στο χώρο δεν είναι παρατηρήσιμο μέγεθος, όπως και η γωνιακή ορμή J
 - ▶ δεν είναι κβαντισμένη
 - ▶ δεν υπόκειται σε κανόνες διατήρησης
 - ▶ εκφράζεται σε μονάδες πυρηνικής μαγνητόνης
- Το παρατηρήσιμο μέγεθος είναι η αναμενόμενη τιμή του τελεστή μ στην κατάσταση ($J, m_j=J$)
- Ο γυρομαγνητικός λόγος ορίζεται: $\gamma_j = \mu_j/J\hbar$
- Ο παράγοντας g (g factor) είναι ο λόγος της μαγνητικής ροπής σε μονάδες μ_N προς την στροφορμή σε μονάδες $\hbar$: $\mu_j = \gamma_j J \hbar = g_j J \mu_N$
- Αντίστοιχα μπορούν να ορισθούν τα g_l, g_s : είναι οι αντίστοιχοι παράγοντες για την τροχιακή ορμή και το σπιν