

Εισαγωγή στη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων

Ασκήσεις Στοιχειωδών Σωματιδίων

5^ο Εξάμηνο

Δ. Σαμψωνίδης – Κ. Κορδάς – Χ. Πετρίδου

12 Ιανουαρίου 2018

Κουάρκ και Λεπτόνια

Κουάρκ

u	c	t
d	s	b

Φορτίο (Q)	Βαρυονικός Αριθμός (B)	Αντίστοιχος Αριθμός “γεύσης”
+2/3	+1/3	+1
-1/3	+1/3	-1

Λεπτονικός Αριθμός = 0 για όλα τα κουάρκ

Λεπτόνια

ν_e	ν_μ	ν_τ
e^-	μ^-	τ^-

Φορτίο (Q)	Βαρυονικός Αριθμός (B)	Αντίστοιχος Λεπτονικός Αριθμός
0	0	+1
-1	0	+1

Κουάρκ

Μπορούν να συμμετέχουν σε όλες τις αλλήλεπιδράσεις
(Ισχυρές, Ασθενείς και ΗλεκτροΜαγνητικές)

Κβαντικοί Αριθμοί

των κουάρκ

	B	Q	S	C	B	T
u	+1/3	+2/3	0	0	0	0
d	+1/3	-1/3	0	0	0	0
s	+1/3	-1/3	-1	0	0	0
c	+1/3	+2/3	0	+1	0	0
b	+1/3	-1/3	0	0	-1	0
t	+1/3	+2/3	0	0	0	+1

και

των αντικουάρκ

	B	Q	S	C	B	T
$\bar{u}$	-1/3	-2/3	0	0	0	0
$\bar{d}$	-1/3	+1/3	0	0	0	0
$\bar{s}$	-1/3	+1/3	+1	0	0	0
$\bar{c}$	-1/3	-2/3	0	-1	0	0
$\bar{b}$	-1/3	+1/3	0	0	+1	0
$\bar{t}$	-1/3	-2/3	0	0	0	-1

Λεπτόνια

ΔΕΝ συμμετέχουν στις Ισχυρές αλληλεπιδράσεις
("αισθάνονται" μόνο τις Ασθενείς και ΗλεκτροΜαγνητικές)

Λεπτονικός Αριθμός

	e^-	ν_e	μ^-	ν_μ	τ^-	ν_τ
L_e	+1	+1	0	0	0	0
L_μ	0	0	+1	+1	0	0
L_τ	0	0	0	0	+1	+1

	e^+	$\bar{\nu}_e$	μ^+	$\bar{\nu}_\mu$	τ^+	$\bar{\nu}_\tau$
L_e	-1	-1	0	0	0	0
L_μ	0	0	-1	-1	0	0
L_τ	0	0	0	0	-1	-1

- Κάθε 'οικογένεια' λεπτονίων **ΔΙΑΤΗΡΕΙ** τον αντίστοιχο Λεπτονικό Αριθμό
- Ο Λεπτονικός αριθμός **ΔΙΑΤΗΡΕΙΤΑΙ ΠΑΝΤΑ**

Σωματίδια που παρατηρούμε στη φύση

•Λεπτόνια

- σημειακά – δεν έχουν δομή
- Κάθε οικογένεια έχει τον δικό της Λεπτονικό αριθμό

•Αδρόνια

- Φτιαγμένα από κουάρκ (τα κουάρκ δεν τα βλέπουμε ελεύθερα – μόνο μέσα σε αδρόνια)
 - Βαρυόνια – συνδυασμοί 3 κουάρκ
 - π.χ, $p=uud$, $n=udd$
 - Έχουν Βαρυονικό αριθμό $B=1$
 - Μεσόνια – συνδυασμοί κουάρκ με αντι-κουάρκ
 - π.χ. $\pi^+=ud$, $D^-=cd$, $\pi^0 = uu$ και dd
 - Έχουν Βαρυονικό αριθμό $B=0$

Διατήρηση κβαντικών αριθμών στις διάφορες αλληλεπιδράσεις

- Πίνακας 1.4 στις Σημειώσεις Στοιχειωδών

Conserved quantity	Interaction		
	strong	electromagnetic	weak
energy-momentum	yes	yes	yes
charge			
baryon number			
lepton number			
<i>CPT</i>	yes	yes	yes
<i>P</i> (parity)	yes	yes	no
<i>C</i> (charge conjugation parity)	yes	yes	no
<i>CP</i> (or <i>T</i>)	yes	yes	10^{-3}
			violation
<i>I</i> (isospin)	yes	no	no

Χρόνος ζωής (τ) και πλάτος (Γ) σωματίου

Πεπερασμένος χρόνος ζωής σημαίνει αβεβαιότητα στην τιμή της ενέργειας (μάζας) ενός σωματιδίου

- αρχής της αβεβαιότητας $\Delta E \Delta t = \hbar$,
όπου $\Delta E = (\Delta m)c^2$, και $\Delta t = \tau \rightarrow$

$$\tau = \frac{\hbar}{(\Delta m)c^2} = \frac{\hbar}{\Gamma}$$

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}$$

- Η διασπορά στην κατανομή της μάζας είναι το πλάτος Γ του σωματιδίου και είναι μέτρηση του χρόνου ζωής τ
- Για σωματίδια που διασπώνται με τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις, $\tau \sim 10^{-23}$ s είναι περίπου όσο χρόνο χρειάζεται το φως για να διαπεράσει ένα αδρόνιο (διάμετρος $\sim 1\text{fm} \sim 10^{-15}$ m). Προφανώς και δεν μπορεί να μετρηθεί μια τροχιά ενός σωματίου με χρόνο ζωής 10^{-23} s ...
- Οπότε, μετρώντας τα προϊόντα της διάσπασης και με την αρχή διατήρησης ενέργειας και ορμής, κατασκευάζουμε τη **μάζα (ενέργεια) του διασπαζόμενου σωματιδίου**, η οποία έχει μια κατανομή κι από εκεί μπορούμε να βρούμε το Γ

Χρόνος ζωής (τ), πλάτος (Γ) σωματίου και σταθερές σύζευξης τρω
διαφόρων αλληλεπιδράσεων

$\Gamma = 1/\tau =$ πιθανότητα διάσπασης ανά μονάδα χρόνου



Άρα, όπως και η ενεργός διατομή (που είναι μέτρο της
πιθανότητας να γίνει μιά σκέδαση ή εξαύλωση), έτσι και το Γ
είναι ανάλογο του “ α ”²

(όπου “ α ”² = α^2 ή α_w^2 ή α_s^2 : ανάλογα αν η αλληλεπίδραση είναι
ηλεκτρομαγνητική, ασθενής ή ισχυρή, αντίστοιχα)

$$\frac{1}{\tau} = \Gamma \sim \alpha^2$$

Άσκηση 8

Συγκρίνετε τις σταθερές σύζευξης για τις εξής διασπάσεις

- $K^- + p \rightarrow \Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0 \quad \tau = 10^{-23} \text{ sec}$
- $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma \quad \tau = 10^{-19} \text{ sec}$
- $\Sigma^- \rightarrow n + \pi^- \quad (\tau \approx 10^{-10} \text{ sec})$

=> σημειώσεις στοιχειωδών, παράγραφο 1.8.

Ασκηση 1

Ποιά είναι τα συστατικά κουάρκ των παρακάτω αδρονίων?

Αν το αδρόνιο είναι συνδυασμός περισσότερων του ενός ζεύγους $q \bar{q}$ να δωθούν όλα τα ζεύγη

BARYONS	Strangenes s	Charm
n	0	0
p	0	0
Δ^{++}	0	0
Λ^0	-1	0
Ω^-	-3	0
MESONS		
π^+	0	0
π^0	0	0
ρ^0	0	0
η'^0	0	0
K^+	+1	0
K^-	-1	0
$\bar{K}^0$	-1	0
D^+	0	+1

} Συνδυασμοί u και d
(εννοείται και των
αντι-κουάρκ τους)
← Συνδυασμοί u , d και s

Ασκηση 1 - Λύση

Ποιά είναι τα συστατικά κουάρκ των παρακάτω αδρονίων?

Αν το αδρόνιο είναι συνδυασμός περισσότερων του ενός ζεύγους $q \bar{q}$ να δωθούν όλα τα ζεύγη

BARYONS	Strangenes s	Charm
n	0	0
p	0	0
Δ^{++}	0	0
Λ^0	-1	0
Ω^-	-3	0
MESONS		
π^+	0	0
π^0	0	0
ρ^0	0	0
η'^0	0	0
K^+	+1	0
K^-	-1	0
$\bar{K}^0$	-1	0
D^+	0	+1

Σημείωση: οι κβαντικοί αριθμοί “strangeness/ παραξενιά” και “charmness/χάρη” έχουν το πρόσημο του φορτίου του αντίστοιχου κουάρκ. Π.χ., το s έχει φορτίο $-1/3$, άρα: strangeness=-1 το c έχει φορτίο $+2/3$, άρα: charmness=+1

$$n = udd, p = uud, \Delta^{++} = uuu$$

$$\Lambda^0 = s|d u, \Omega^- = sss$$

$$\pi^+ = u \bar{d}$$

$$\pi^0 = \text{γραμμικός συνδυασμός των } u\bar{u} \text{ και } d\bar{d} \text{ (Σημείωση: εμφανίζεται είτε ως } u\bar{u} \text{ είτε ως } d\bar{d} \text{)}$$

$$\rho^0 = \{u\bar{u}, d\bar{d}\} \text{ (αλλιιώτικος γραμ. συνδ.)}$$

$$\eta' = \{u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}\} \text{ (γραμμικός συνδυασμός)}$$

$$K^+ = u\bar{s}, K^- = \bar{u}s, K^0 = \bar{s}d, \bar{K}^0 = s\bar{d}, D^+ = c\bar{d}$$

Άσκηση 2

Ποιές από τις παρακάτω αντιδράσεις/διασπάσεις γίνονται?
Αυτές που δεν γίνονται, ποιόν νόμο διατήρησης παραβιάζουν?

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \gamma$$

$$e^- \rightarrow \nu_e + \gamma$$

$$p + p \rightarrow p + \Sigma^+ + K^-$$

$$p \rightarrow e^+ + \nu_e$$

$$p \rightarrow e^+ + n + \nu_e$$

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

Δίνονται οι μάζες των σωματιδίων

$$M(\gamma) = 0$$

$$M(\nu_e) = M(\nu_\mu) = 0$$

$$M(e^+) = M(e^-) = 0.511 \text{ MeV}$$

$$M(\pi^+) = M(\pi^-) = 139.6 \text{ MeV}$$

$$M(\pi^0) = 135 \text{ MeV}$$

$$M(\mu^+) = M(\mu^-) = 105.7 \text{ MeV}$$

$$M(p) = 938.3 \text{ MeV}$$

$$M(n) = 939.6 \text{ MeV}$$

$$M(\Sigma^+) = 1189.4 \text{ MeV}$$

$$M(K^+) = M(K^-) = 493.7 \text{ MeV}$$

Δίνονται:

$$|\Sigma^+ = uus, K^- = \bar{u}s$$

Σημείωση:

- Στη διάσπαση ενός σωματιδίου ελέγχουμε τη διατήρηση της ενέργειας
- Όταν όμως έχουμε σκέδαση δύο σωματιδίων υποθέτουμε ότι η αρχική ενέργεια (που περιλαμβάνει την κινητική ενέργεια) μπορεί πάντα να είναι αρκετή για να επιτρέπεται η αντίδραση

Άσκηση 2 - λύση

Ποιές από τις παρακάτω αντιδράσεις/διασπάσεις γίνονται?
Αυτές που δεν γίνονται, ποιόν νόμο διατήρησης παραβιάζουν?

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \gamma$$

$$e^- \rightarrow \nu_e + \gamma$$

$$p + p \rightarrow p + \Sigma^+ + K^-$$

$$p \rightarrow e^+ + \nu_e$$

$$p \rightarrow e^+ + n + \nu_e$$

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

1. Διατήρηση λεπτονικού αριθμού

2. Διατήρηση φορτίου

3. Διατήρηση φορτίου

4. Διατήρηση βαρυονικού αριθμού

5. Διατήρηση ενέργειας

6. Επιτρέπεται

7. Επιτρέπεται

Βάζω σε πίνακα τις ποσότητες / κβαντικούς αριθμούς που διατηρούνται πάντα, σε όλες τις αλληλεπιδράσεις. Πρώτα βάζω τα πιο εύκολα να ελεγχθούν και σταματάω με το πρώτο που παραβιάζεται!

	Φορτίο	Βαρυονικός	Λεπτονικός	Ενέργεια
1	OK	OK	X	
2	X			
3	X			
4	OK	X		
5	OK	OK	OK	X

Άσκηση 3

Οι παρακάτω διασπάσεις δεν γίνονται. Γιατί? (ποιόν νόμο διατήρησης παραβιάζουν?)

$$n \rightarrow p + e^{-}$$

$$n \rightarrow \pi^{+} + e^{-}$$

$$n \rightarrow p + \pi^{-}$$

$$n \rightarrow p + \gamma$$

Δίνονται οι μάζες των σωματιδίων

$$M(\gamma) = 0$$

$$M(\nu_e) = M(\nu_\mu) = 0$$

$$M(e^{+}) = M(e^{-}) = 0.511 \text{ MeV}$$

$$M(\pi^{+}) = M(\pi^{-}) = 139.6 \text{ MeV}$$

$$M(\pi^0) = 135 \text{ MeV}$$

$$M(\mu^{+}) = M(\mu^{-}) = 105.7 \text{ MeV}$$

$$M(p) = 938.3 \text{ MeV}$$

$$M(n) = 939.6 \text{ MeV}$$

$$M(\Sigma^{+}) = 1189.4 \text{ MeV}$$

$$M(K^{+}) = M(K^{-}) = 493.7 \text{ MeV}$$

Άσκηση 3 - λύση

Οι παρακάτω διασπάσεις δεν γίνονται. Γιατί? (ποιόν νόμο διατήρησης παραβιάζουν?)

$$n \rightarrow p + e^{-}$$

1. Διατήρηση λεπτονικού αριθμού και στροφορμής

$$n \rightarrow \pi^{+} + e^{-}$$

2. Διατήρηση βαρυονικού και λεπτονικού αριθμού

$$n \rightarrow p + \pi^{-}$$

3. Διατήρηση ενέργειας

$$n \rightarrow p + \gamma$$

4. Διατήρηση φορτίου

Βάζω σε πίνακα τις ποσότητες / κβαντικούς αριθμούς που διατηρούνται πάντα, σε όλες τις αλληλεπιδράσεις. Πρώτα βάζω τα πιό εύκολα να ελεγχθούν και σταματάω με το πρώτο που παραβιάζεται!

	Φορτίο	Βαρυονικός	Λεπτονικός	Ενέργεια
1	OK	OK	X	
2	OK	X	X	
3	OK	OK	OK	X
4	X			

Άσκηση 4

Ποιές από τις παρακάτω διασπάσεις επιτρέπονται και ποιές όχι.

Αν όχι, γιατί? Αν ναι, ποιά αλληλεπίδραση είναι υπεύθυνη

(ηλεκτρομαγνητική, ασθενής, ισχυρή)?

$$1. p \bar{p} \rightarrow \pi^+ \pi^0$$

$$2. \eta \rightarrow \gamma \gamma$$

$$3. \Sigma^0 \rightarrow \Lambda \pi^0$$

$$4. \Sigma^- \rightarrow n \pi^-$$

$$5. e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

$$6. \mu^- \rightarrow e^+ \bar{\nu}_e$$

$$7. \Delta^+ \rightarrow p \pi^0$$

$$8. \bar{\nu}_e p \rightarrow n e^+$$

$$9. pp \rightarrow \Sigma^+ n K^0 \pi^+ \pi^0$$

$$10. p \rightarrow e^+ \gamma$$

$$11. pp \rightarrow ppp \bar{p}$$

$$12. \pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$$

$$13. p \bar{p} \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$$

$$14. \Xi^- \rightarrow \Lambda \pi^-$$

$$15. \Sigma^- \rightarrow n e \bar{\nu}_e$$

Δίνονται οι μάζες από πριν, και

$$M(\Sigma^-) = 1197.4 \text{ MeV}$$

$$M(\Sigma^0) = 1192.6 \text{ MeV}$$

$$M(K^0) = M(\bar{K}^0) = 497.7 \text{ MeV}$$

$$M(\Xi^-) = 1321.3 \text{ MeV}$$

$$M(\Lambda) = 1115.6 \text{ MeV}$$

$$M(\Delta^+) = 1210 \text{ MeV}$$

$$M(\eta) = 547.5 \text{ MeV} \quad (\text{σημ: } \eta = \text{ήτα})$$

Αν επιτρέπεται, τότε:

- αν έχουμε νεutrίνο, είναι Ασθενής
- αν έχουμε φωτόνιο, είναι Ηλεκτρομαγνητική
- αν έχουμε καθαρή αλλαγή γεύσης, κατά κύριο λόγο κατά 1 μονάδα (π.χ., $\Delta S=1$, $\Delta C=1$), είναι Ασθενής. Αλλαγή γεύσης κατά 2 μονάδες (π.χ., $\Delta S=2$) είναι σπάνια!!
- αν παράγονται ζεύγη νέας γεύσης είναι κυρίως ισχυρή (με τις άλλες, αν επιτρέπονται, να γίνονται με πολύ μικρότερη πιθανότητα)

Δίνονται:

$$\Sigma^0 = u d s, \Sigma^- = d d s$$

$$\Delta^+ = u u d, \Xi^- = d s s$$

$$K^- = \bar{u} s, \bar{K}^0 = \bar{d} s$$

$$K^+ = u \bar{s}, K^0 = d \bar{s}$$

Άσκηση 4 - λύσεις

Ποιές από τις παρακάτω διασπάσεις επιτρέπονται και ποιές όχι.

Αν όχι, γιατί? Αν ναι, ποιά αλληλεπίδραση είναι υπεύθυνη (ηλεκτρομαγνητική, ασθενής, ισχυρή)?

1. $p \bar{p} \rightarrow \pi^+ \pi^0$
2. $\eta \rightarrow \gamma\gamma$
3. $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda \pi^0$
4. $\Sigma^- \rightarrow n \pi^-$
5. $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$
6. $\mu^- \rightarrow e^+ \bar{\nu}_e$
7. $\Delta^+ \rightarrow p \pi^0$
8. $\bar{\nu}_e p \rightarrow n e^+$

1. * φορτίο
2. ΗΜ
3. * Ενέργεια
4. ασθενής
5. ΗΜ, ασθενής
6. * λεπτονικός
7. ισχυρή
8. ασθενής

9. $pp \rightarrow \Sigma^+ n K^0 \pi^+ \pi^0$
10. $p \rightarrow e^+ \gamma$
11. $pp \rightarrow ppp \bar{p}$
12. $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$
13. $p \bar{p} \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$
14. $\Xi^- \rightarrow \Lambda \pi^-$
15. $\Sigma^- \rightarrow n e \bar{\nu}_e$

9. ισχυρή
10. * βαρυονικός,
* λεπτονικός
11. ισχυρή
12. ΗΜ
13. ισχυρή
14. ασθενής
15. ασθενής

Βάζω σε πίνακα τις ποσότητες / κβαντικούς αριθμούς που διατηρούνται στις διάφορες αλληλεπιδράσεις. Πρώτα βάζω τα πιο εύκολα να ελγχθούν και σταματάω με το πρώτο που παραβιάζεται!

αντίδραση	Φορτίο	Βαρυονικός	Λεπτονικός	Ενέργεια	Strangeness	Charmness
4	OK	OK	OK	OK	X κατά $\Delta S=1$, οπότε ασθενής	

Άσκηση 5

Ποιές από τις παρακάτω διασπάσεις επιτρέπονται και ποιές όχι.

Αν όχι, γιατί? Αν ναι, ποιά αλληλεπίδραση είναι υπεύθυνη
(ηλεκτρομαγνητική, ασθενής, ισχυρή)?

1. $n \rightarrow \pi^0 \pi^0$

2. $\mu^- \rightarrow e^+ \gamma$

3. $\pi^- p \rightarrow \Sigma^- K^+ \pi^0$

4. $K^- n \rightarrow \Xi^- \bar{K}^0$

5. $\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_e \bar{\nu}_\mu$

6. $p \bar{p} \rightarrow B^+ B^-$

7. $\pi^0 \rightarrow e^+ e^- e^+ e^-$

Δίνονται:

$$B^- = \bar{u} b, B^0 = \bar{d} b$$

$$B^+ = u \bar{b}, \bar{B}^0 = d \bar{b}$$

Αν επιτρέπεται:

- αν έχουμε νεutrino, είναι ασθενής
- αν έχουμε φωτόνιο, είναι ηλεκτρομαγνητική
- αν έχουμε καθαρή αλλαγή γεύσης, αλλά κατά 1 μονάδα μόνο (π.χ., $\Delta S=1$, $\Delta C=1$) είναι ασθενής. Αν η αλλαγή γεύσης είναι κατά 2 μονάδες (π.χ., $\Delta S=2$) τότε δεν γίνεται!
- αν παράγονται ζεύγη νέας γεύσης είναι κυρίως ισχυρή (με τις άλλες, αν επιτρέπονται, να γίνονται με πολύ μικρότερη πιθανότητα)

Άσκηση 5 - Λύσεις

Ποιές από τις παρακάτω διασπάσεις επιτρέπονται και ποιές όχι.

Αν όχι, γιατί? Αν ναι, ποιά αλληλεπίδραση είναι υπεύθυνη
(ηλεκτρομαγνητική, ασθενής, ισχυρή)?

1. $n \rightarrow \pi^0 \pi^0$
2. $\mu^- \rightarrow e^+ \gamma$
3. $\pi^- p \rightarrow \Sigma^- K^+ \pi^0$
4. $K^- n \rightarrow \Xi^- \bar{K}^0$
5. $\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_e \bar{\nu}_\mu$
6. $p \bar{p} \rightarrow B^+ B^-$
7. $\pi^0 \rightarrow e^+ e^- e^+ e^-$

1. * βαρυονικός
2. * ηλεκτρονικός λεπτονικός αριθμός
* μιονικός λεπτονικός αριθμός
3. ισχυρή (κυρίως)
4. * $\Delta S = -2$ (άρα δεν γίνεται ούτε με ασθενή)
5. * λεπτονικός
6. ισχυρή (κυρίως)
7. ηλεκτρομαγνητική

Αν επιτρέπεται:

- αν έχουμε νεutrino, είναι ασθενής
- αν έχουμε φωτόνιο, είναι ηλεκτρομαγνητική
- αν έχουμε καθαρή αλλαγή γεύσης, αλλά κατά 1 μονάδα μόνο (π.χ., $\Delta S=1$, $\Delta C=1$) είναι ασθενής. Αν η αλλαγή γεύσης είναι κατά 2 μονάδες (π.χ., $\Delta S=2$) τότε δεν γίνεται!
- αν παράγονται ζεύγη νέας γεύσης είναι **κυρίως ισχυρή** (με τις άλλες, αν επιτρέπονται, γίνεται με πολύ μικρότερη πιθανότητα)

Περιγραφή σε βασικό επίπεδο - Διαγράμματα Feynman

- Έχουμε μία πιο βασική ερμηνεία του συμβαίνει στις αντιδράσεις και διασπάσεις που βλέπουμε στη φύση
- Αλληλεπιδασίες μέσω **μποζονίων διαδοτών** των διαφόρων δυνάμεων
 - ΗΜ : γ
 - Ασθενείς : W^+, W^-, Z^0
 - Ισχυρές: g

και

Αναπαράσταση με **διαγράμματα Feynman**

Άσκηση 6

Αυτές οι αντιδράσεις επιτρέπονται: α) Τι είδος είναι τα νετρίνα?
β) Ποιά η σύσταση κουάρκ των αδρονίων, γ) Κάνετε τα
διαγράμματα Feynman

$$\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$$

$$\mu^+ \rightarrow e^+ \nu \nu$$

$$\mu^- \rightarrow e^- \nu \nu$$

$$K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$$

$$\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ e^- \nu$$

$$\Sigma^- \rightarrow n \mu^- \nu$$

$$\Sigma^+ \rightarrow \Lambda^0 e^+ \nu$$

$$D^0 \rightarrow K^- e^+ \nu$$

$$\nu p \rightarrow n e^+$$

$$\nu {}^{37}_{17}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}_{18}\text{Ar} e^-$$

$$\nu p \rightarrow \mu^- n$$

$$\nu n \rightarrow e^- p$$

$${}^3_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He} e^- \nu$$

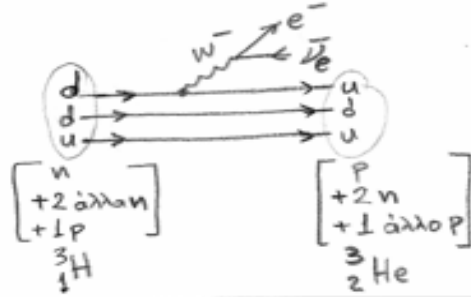
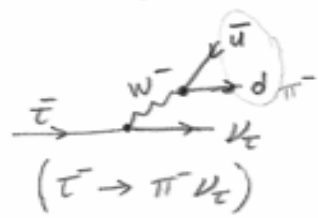
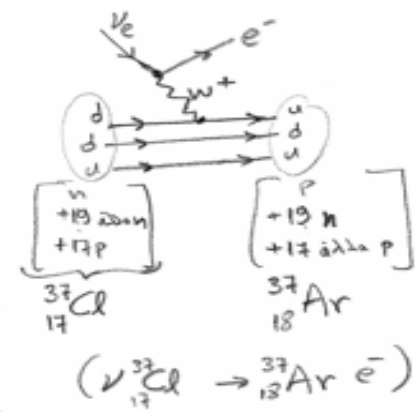
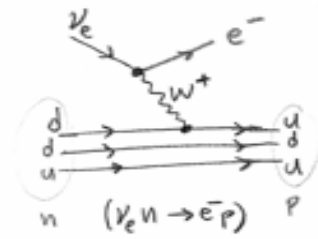
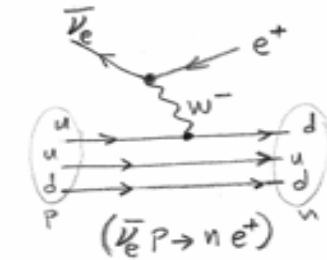
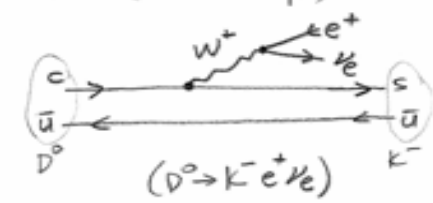
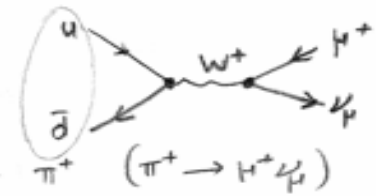
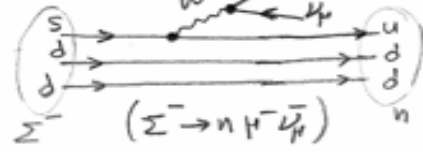
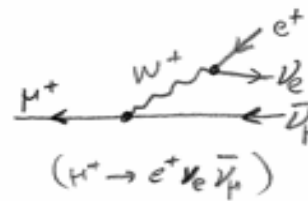
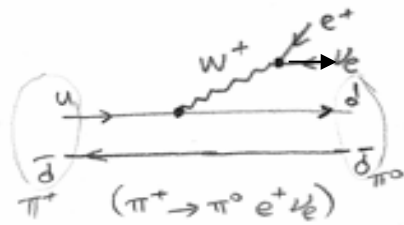
$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu$$

$$\pi^- \rightarrow e^- \nu$$

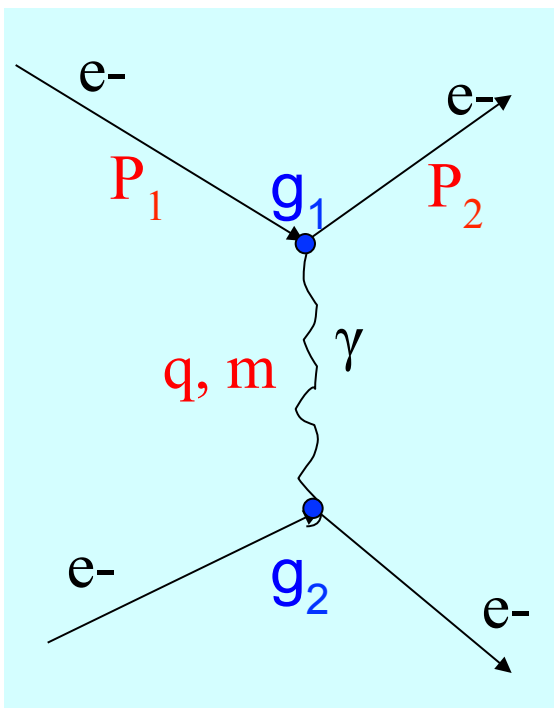
$$\tau^- \rightarrow \pi^- \nu$$

Άσκηση 6 - Λύση

Αυτές οι αντιδράσεις επιτρέπονται: α) Τι είδος είναι τα νευτρίνα?
β) Ποιά η σύσταση κουάρκ των αδρονίων, γ) Κάνετε τα διαγράμματα Feynman



Μποζονικός διαδότης και ισχύς σύζευξης



- Μεταφορά Ενέργειας & ορμής (τετρα-ορμής): $q = P_1 - P_2$ όπου P_1 = τετρα-ορμή = $\{E, p_x, p_y, p_z\}$ του σωματιδίου #1, κλπ.

Διαταραχή κυματοσυνάρτησης λόγω σκέδασης

Πλάτος σκέδασης $f(q)$ είναι το στοιχείο πίνακα M της μετάβασης από την αρχική στην τελική κατάσταση $M = f(q) = \frac{g_1 g_2}{q^2 - m^2}$

- g_1, g_2 η ισχύς της σύζευξης του μποζονίου (διαδότη) με τα σκεδαζόμενα σωματία. Εδώ: $g_1 = g_2 = g$
- $q^2 - m^2$ = πόσο μακριά είναι η μάζα του διαδότη στην αλληλεπίδραση αυτή, από τη πραγματική τιμή της μάζας του διαδότη. (q =τετρα-ορμή, και m =μάζα του διαδότη)

Ρυθμός αλληλεπιδράσεων W , στοιχείο πίνακα M , και σταθερά σύζευξης g

- Ρυθμός αλληλεπιδράσεων W : αριθμός μεταβάσεων από την αρχική στην τελική κατάσταση ανά μονάδα χρόνου.
- Ο ρυθμός W εξαρτάται από το τετράγωνο του μέτρου του στοιχείου πίνακα M της μετάβασης: $W \sim |M|^2$

$$M = f(q) = \frac{g_1 g_2}{q^2 - m^2} = \frac{g^2}{q^2 - m^2} \quad \longrightarrow \quad |M|^2 \sim \left| \frac{g^2}{q^2 - m^2} \right|^2$$

- Σκεδάσεις σωματιδίων: ο ρυθμός αλληλεπιδράσεων (W) είναι ανάλογος της ενεργού διατομής (σ) της αλληλεπίδρασης
- Διασπάσεις σωματιδίου με μέσο χρόνο ζωής τ πλάτος Γ : $W = 1/\tau = \Gamma/\hbar$

$$\text{θυμηθήτε: } \Gamma \tau = \hbar \rightarrow \tau = \frac{\hbar}{\Gamma}$$

$$\bullet \text{Οπότε: } \sigma \sim W \sim |M|^2 \sim g^4 \quad \text{και} \quad \Gamma \sim W \sim |M|^2 \sim g^4$$

Ηλεκτρομαγνητικές Αλληλεπιδράσεις

Η σταθερά σύζευξης σε κάθε κόμβο των Feynman είναι



Σταθερά λεπτής υφής: α

Μια αδιάστατη ποσότητα που μετράει την ένταση της ζεύξης.

Ο λόγος της ηλεκτροστατικής ενέργεια απώθησης δύο e σε απόσταση ίση με το ισοδύναμο μήκος Compton προς την ενέργεια που αντιστοιχεί στην μάζα ηρεμίας του e .

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}$$

Θα χρησιμοποιούμε παντού:
MeV για ενέργεια,
 $1/4\pi\epsilon_0 = 1$ σε όλους τους τύπους,
και θα βάζουμε:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = e^2 = \alpha \hbar c, \text{ όπου } \alpha = 1/137, \hbar c = 197 \text{ MeV fm}$$

Η ποσότητα $\alpha^{1/2} \sim e$ εκφράζει την πιθανότητα για την εκπομπή ή απορρόφηση ενός φωτονίου.

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = (\mu\epsilon \ 4\pi\epsilon_0 = 1 \text{ και } \hbar c = 1) \Rightarrow \sqrt{\alpha} = e$$

Ηλεκτρομαγνητικές Αλληλεπιδράσεις

Η ισχύς της αλληλεπίδρασης μεταξύ φορτισμένων σωματιών και φωτονίων είναι όσο το φορτίο του ηλεκτρονίου: $g = e \sim \sqrt{\alpha}$:

(η σταθερά της λεπτής υφής α)

Σε κάθε κόμβο, ισχύς σύζευξης $\sim$

$$\sqrt{\alpha}$$

Πιθανότητα σύζευξης $\sim \alpha$

Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο :

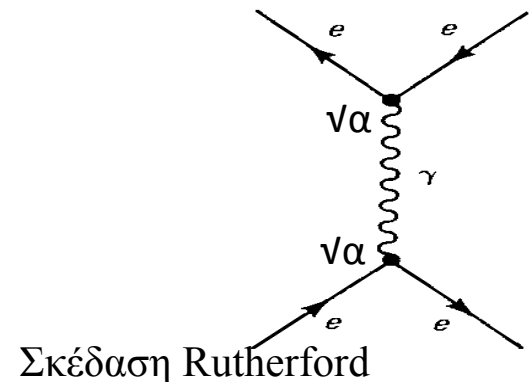
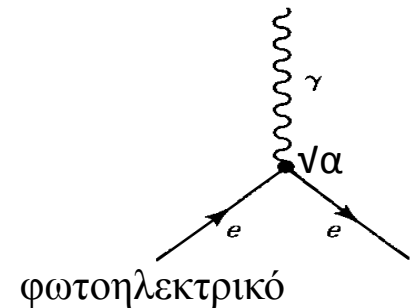
πλάτος της αλληλεπίδρασης $\sim \sqrt{\alpha}$

=> ενεργός διατομή: $\sim \alpha$ (1ης τάξης)

Σκέδαση Coulomb:

πλάτος της αλληλεπίδρασης $\sim \alpha$

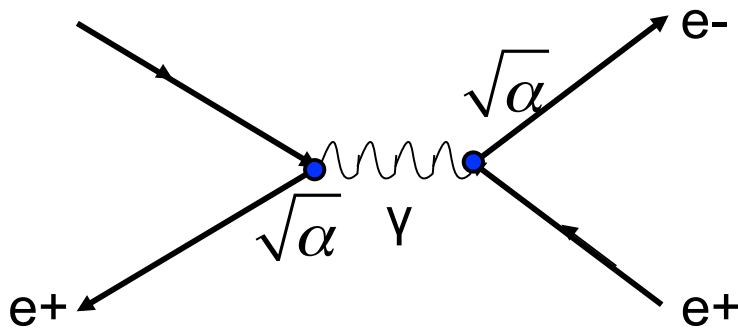
=> ενεργός διατομή: $\sim \alpha^2$ (2ης τάξης)



Άσκηση 7

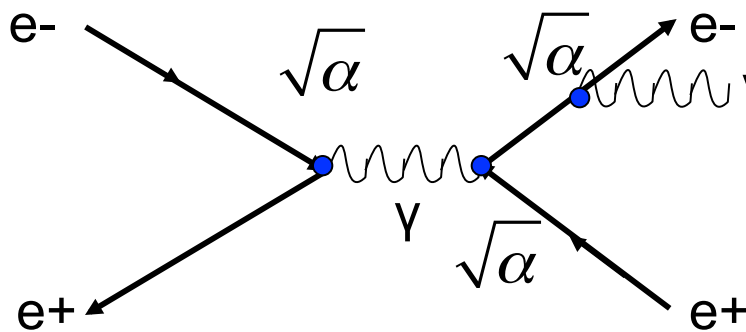
Ποιά απ'τις 2 εκδοχές είναι η πιθανότερη να γίνει? Κατά πόσο σε σχέση με την άλλη?

Διαφορά στην πιθανότητα να συμβούν οι δύο αυτές εκδοχές:



ενεργός διατομή $\sigma \sim \alpha^2$
 $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$

Το πάνω είναι
πιθανότερο
(κατά $1/\alpha = 137$) να
εκπέμψει φωτόνιο



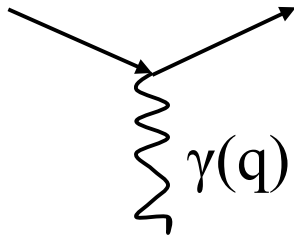
ενεργός διατομή $\sigma \sim \alpha^3$
 $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^- \gamma$

Οι διαδότες των ασθενών δυνάμεων

- Τα μποζόνια βαθμίδας (gauge bosons): W^+ , W^- , Z^0
- Με μάζες : W^+ , W^- : $80 \text{ GeV}/c^2$, Z^0 : $90 \text{ GeV}/c^2$

Ηλεκτρομαγνητικές Δυνάμεις

- κόμβος (διάγραμμα Feynman)



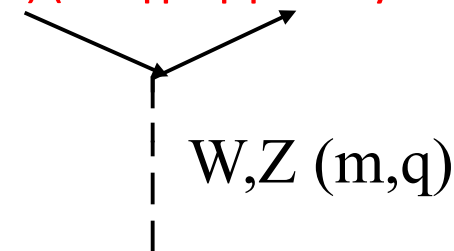
- Σταθερά Σύζευξης

$$\alpha = e^2,$$

$$f(q) = \frac{\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha}}{q^2}$$

Ασθενείς Δυνάμεις

- κόμβος (διάγραμμα Feynman)



- Σταθερά Σύζευξης

$$a_w = g^2,$$

$$f(q) = \frac{g^2}{q^2 + m^2}$$

Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις

Η σταθερά σύζευξης σε κάθε κόμβο των Feynman είναι

$\sqrt{G}$

$$f(q) = \frac{g^2}{q^2 - M_{W,Z}^2}$$

$$\text{Για } q^2 \rightarrow 0: f(q) \approx \left| \frac{g^2}{M_{W,Z}^2} \right| = G \approx 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

Στην ενοποιημένη θεωρία των ηλεκτρομαγνητικών και των ασθενών δυνάμεων (την “ηλεκτρασθενή θεωρία” των Weinberg, Salam και Glasgow, 1968) προτάθηκε η σταθερά της σύζευξης (g) των W και Z με τα λεπτόνια και τα κουάρκ, να είναι ίση με την ηλεκτρομαγνητική σύζευξη του φωτονίου με ηλεκτρόνια (e). Οπότε $g = \sqrt{4\pi\alpha} = e$.

Η ασθενής σύζευξη εμφανίζεται με σταθερά G (τη σταθερά Fermi) που είναι μικρότερη από την e^2 του ηλεκτρομαγνητισμού κατά $M_{W,Z}^2$ λόγω της μάζας των διαδοτών W και Z

Γνωρίζοντας τη σταθερά του Fermi, G (από διάφορες μετρήσεις χρόνων ζωής με χρήση του χρυσού κανόνα του Fermi, π.χ., στο χρόνο ζωής του μιονίου), Περιμένουμε:

$$M_{W,Z} = \frac{g}{\sqrt{G}} = \frac{\sqrt{4\pi\alpha}}{\sqrt{G}} = \sqrt{\frac{4\pi\alpha}{G}} \approx 90 \text{ GeV}$$

όπως και βρέθηκε στο CERN το 1983!

Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις

- Κουάρκς και λεπτόνια φέρουν ηλεκτρομαγνητικό και 'ασθενές' φορτίο .
- Τα νετρίνο έχουν μόνο ασθενές: ΔΕΝ έχουν ούτε ισχυρό, ούτε ηλεκτρομαγνητικό φορτίο
- Οι ασθενείς δυνάμεις είναι 10^3 - 10^5 φορές ασθενέστερες από τις ηλεκτρομαγνητικές → μικρότερη πιθανότητα σύζευξης
- Μπορούν να παραβιάζουν τις γεύσεις ΔC , $\Delta S \neq 0$ (αλλά μέχρι ΔC , $\Delta S = \pm 1$)
- Περιλαμβάνουν είτε μόνο κουάρκς ή κουάρκς και λεπτόνια
- Παραδείγματα: διάσπαση νετρονίου, σκέδαση αντνετρίνο-πρωτονίου
 $\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$ ($\tau \approx 10^{-10}$ sec) → ασθενής ($\Delta S=1$)
 $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$ ($\tau \approx 10^{-19}$ sec) → ηλεκτρομαγνητική

Άσκηση 8 – λύση

Και Ισχυρές Αλληλεπιδράσεις

- Οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις συμβαίνουν μεταξύ κουάρκ



$$\downarrow$$
$$\tau = \hbar/\Gamma \rightarrow 10^{-23} \text{ sec}$$



$$\Rightarrow (a_s / a) = (10^{-19} / 10^{-23})^{1/2} \approx 100 \rightarrow a_s = g_s^2 / 4\pi\hbar c$$

g_s είναι το αντίστοιχο φορτίο για τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις:

χρώμα $\Leftrightarrow$ ισχυρό φορτίο

$\Rightarrow$ Κουάρκ : **Red**, **Green**, **Blue** (R, G, B)

$\Rightarrow$ Αντικουάρκ: anti-**Red**, anti-**Green**, anti-**Blue** : R(bar), G(bar), B(bar)

Βασικά χαρακτηριστικά των δυνάμεων

	Ισχυρή	Ασθενής	Ηλεκτρο- μαγνητική	Βαρυτική
Σταθερά σύζευξης	$a_s=0.1-1$	$G = G_F=10^{-5}$ GeV^{-2}	$a= 1/137$	$KM^2/\hbar c=$ 0.5×10^{-38}
Τυπική ενεργός διατομή	10 mb	10 pb	10^{-2} mb	
Τυπικός χρόνος ζωής (sec)	10^{-23}	$10^{-10} - 10^{-8}$ (στις ασθενείς υπάρχουν μεγάλες διαφοροποιήσεις στους χρόνους ζωής)	10^{-20}	

Ο χρόνος ζωής είναι ένδειξη για το ποιά αλληλεπίδραση είναι υπεύθυνη για τη διάσπαση, και τι “α” (σταθερά σύζευξης) έχει αυτή η αλληλεπίδραση. Να έχετε υπ’ όψιν σας αυτές τις τάξεις μεγέθους.

Ασκήσεις 11-15: Επιτρεπτές ή όχι αλληλεπιδράσεις

X

- Άσκηση 11 = άσκηση 2.6 του βιβλίου σας (Cottingham & Greenwood)
- Άσκηση 12 = Εξηγείστε ποιές από τις παρακάτω αλληλεπιδράσεις είναι επιτρεπτές και γιατί. Ποιός νόμος παραβιάζεται στις περιπτώσεις που δεν επιτρέπονται?
- $p + p \rightarrow p + \Sigma^+ + K^-$ (το Σ^+ είναι βαρυόνιο με ένα παράδοξο κουάρκ, και το K^- παράδοξο μεσόνιο)
- $p + p \rightarrow \Sigma^+ + K^+$
- $p + n \rightarrow p + \Sigma^+ + K^-$
- $p + n \rightarrow \Lambda^0 + \Sigma^+$

Ασκήσεις 11-15: Επιτρεπτές ή όχι αλληλεπιδράσεις

X

- **Άσκηση 13** = Εξηγείστε ποιές από τις παρακάτω αλληλεπιδράσεις είναι επιτρεπτές και γιατί. Ποιός νόμος παραβιάζεται στις περιπτώσεις που δεν επιτρέπονται?

$$p \rightarrow e^+ + n + \nu_e$$

$$p + n \rightarrow \Sigma^+ + \Xi^- + K^+ \text{ (το } \Xi^- \text{ είναι βαρυόνιο με δύο παράδοξα κουάρκ)}$$

$$\Xi^0 \rightarrow \Sigma^0 + \Lambda^0$$

$$\Sigma^+ \rightarrow K^+ + \Lambda^0$$

- **Άσκηση 14** = Εξηγείστε ποιές από τις παρακάτω αλληλεπιδράσεις είναι επιτρεπτές και γιατί. Ποιός νόμος παραβιάζεται στις περιπτώσεις που δεν επιτρέπονται?

$$\Lambda^0 \rightarrow K^+ + K^-$$

$$\Sigma^+ \rightarrow K^+ + \Lambda^0$$

$$\Sigma^0 \rightarrow p + \pi^-$$

$$\Xi^- \rightarrow n + \pi^-$$

Ασκήσεις 11-15: Επιτρεπτές ή όχι αλληλεπιδράσεις

X

- **Άσκηση 15** = Εξηγείστε ποιές από τις παρακάτω αλληλεπιδράσεις είναι επιτρεπτές και γιατί. Ποιός νόμος παραβιάζεται στις περιπτώσεις που δεν επιτρέπονται?

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \gamma + \nu_e + \nu_\mu \text{ (αντι)}$$

$$K^- \rightarrow \pi^- + \pi^+ + e^- \nu_e \text{ (αντι)}$$

$$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

$$K^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu$$

Explain why each of the following particles cannot exist according to the quark model.

- (a) A baryon of spin 1.
- (b) An antibaryon of electric charge +2.
- (c) A meson with charge +1 and strangeness -1.
- (d) A meson with opposite signs of charm and strangeness.

Quarks spin = 1/2		
Flavor	Approx. Mass GeV/c ²	Electric charge
u up	0.002	2/3
d down	0.005	-1/3
c charm	1.3	2/3
s strange	0.1	-1/3
t top	173	2/3
b bottom	4.2	-1/3

	S	C	B	T
d	0	0	0	0
u	0	0	0	0
s	-1	0	0	0
c	0	1	0	0
b	0	0	-1	0
t	0	0	0	1

Έχοντας 4.5 GeV διαθέσιμη ενέργεια, ποιο είναι το βαρύτερο ισότοπο που μπορεί να κανείς να παράγει θεωρητικά;

1. ^2D
2. ^3He
3. ^3T

Λύση

Με 4.5 GeV διαθέσιμη ενέργεια μπορεί κανείς να παράγει βαρυόνια με ενέργεια μέχρι 2.25 GeV. Για να διατηρείται ο βαρυονικός αριθμός θα πρέπει να παράγονται ο ίδιος αριθμός βαρυονίων και αντιβαρυονίων ταυτόχρονα. Άρα τελικά μόνο η μισή ενέργεια είναι διαθέσιμη για την παραγωγή βαρυονίων. Από τα τρία ισότοπα μόνο το ^2D έχει μάζα ηρεμίας μικρότερη των 2.5 GeV. Η σωστή απάντηση είναι (1)

Extras

Σε μια σύγκρουση μεταξύ ενός ακίνητου πρωτονίου και ενός κινούμενου πρωτονίου παράγεται σωματίδιο με μάζα ηρεμίας M επιπλέον των δύο πρωτονίων. Να βρεθεί η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να έχει το κινούμενο πρωτόνιο ώστε να είναι δυνατή αυτή η αντίδραση.

Λύση:

Στο ενεργειακό κατώφλι της αντίδρασης

$$p + p \rightarrow M + p + p,$$

τα σωματίδια στο δεξί σκέλος παράγονται σε ηρεμία. Η ενέργεια και η ορμή του κινούμενου σωματιδίου είναι E_p p_p αντίστοιχα. Η αναλλοίωτη μάζα του συστήματος στο κατώφλι είναι :

$$S = (E_p + m_p)^2 - p_p^2 = (2m_p + M)^2.$$

$$E_p^2 = m_p^2 + p_p^2,$$

$$E_p = \frac{(2m_p + M)^2 - 2m_p^2}{2m_p}$$

$$= m_p + 2M + \frac{M^2}{2m_p}.$$

Ένα σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m και κινητική ενέργεια διπλάσια της μάζας ηρεμίας του συγκρούεται με ένα ακίνητο σωματίδιο ίσης μάζας. Τα δύο σωματίδια συνδυάζονται και παράγουν ένα νέο σωματίδιο. Να υπολογιστεί η μάζα ηρεμίας του νέου σωματιδίου.

Λύση

Έστω M η μάζα του νέου σωματιδίου. Το κινούμενο σωματίδιο έχει συνολική ενέργεια $E=m+T=3m$.

Στο όριο όπου το σωματίδιο παράγεται σε ηρεμία και το τετράγωνο της αναλλοίωτης μάζας είναι

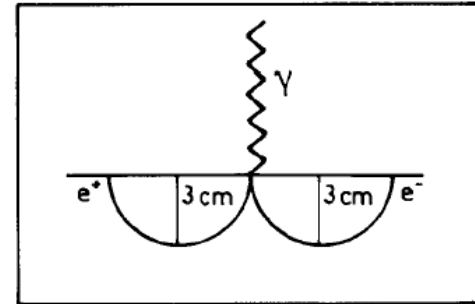
$$S=(E+m)^2-p^2=M^2$$

$$\text{Με } E^2-p^2=m^2, \text{ έχουμε } M^2=E^2+2Em+m^2-p^2=2Em+2m^2=8m^2,$$

$$M=2\sqrt{2}m$$

Extras

A certain electron-positron pair produced cloud chamber tracks of radius of curvature 3 cm lying in a plane perpendicular to the applied magnetic field of magnitude 0.11 Tesla (Fig. 4.3). What was the energy of the γ -ray which produced the pair?



$$\begin{aligned} pc &= ecB\rho \\ evB &= \frac{m\gamma v^2}{\rho} = \frac{pv}{\rho}, & &= \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^8}{1.6 \times 10^{-13}} B\rho \\ & & &= 300B\rho \end{aligned}$$

with B in Tesla, ρ in meter and p in MeV/ c . Hence, on putting $c = 1$, the momentum of the e^+ or e^- is

$$p = 300B\rho = 300 \times 0.11 \times 0.03 = 0.99 \text{ MeV}/c,$$

and its energy is

$$E = \sqrt{p^2 + m_e^2} = \sqrt{0.99^2 + 0.51^2} = 1.1 \text{ MeV}.$$

Therefore the energy of the γ -ray that produced the e^+e^- pair is approximately

$$E_\gamma = 2E = 2.2 \text{ MeV}.$$

Μονάδες

- Οι ταχύτητες που συναντάμε στη φυσική των σωματιδίων είναι κοντά στο c .

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \equiv \text{μονάδα ταχύτητας} \equiv 1$$

- Οι στροφορμές, δράσεις, γενικά το γινόμενο $x p \sim \hbar$ ή $E t \sim \hbar$

$$\hbar c = 197 \text{ MeV fm}, \text{ όπου: } \hbar = \frac{h}{2\pi} \equiv \text{μονάδα δράσης (ενέργειας} \times \text{χρόνου)} \equiv 1$$

- Φυσικές διαστάσεις είναι το c και το $\hbar$.
 - Είναι βολικό ένα σύστημα μονάδων όπου $c = \hbar = 1$

- $M = E/c^2$ [E] ,
- $L = \hbar c/E$ [E^{-1}]
- $T = \hbar/E$ [E^{-1}],

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi \hbar c} = \frac{1}{137}$$

Μονάδες

	Quantity	N.U.	Conv. Factor to SI
E	GeV		$1\text{GeV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
P	GeV		
M	GeV		$1\text{kg} = 5.61 \cdot 10^{26} \text{ GeV}$
length	$1/\text{GeV}$		$1\text{m} = 5.07 \cdot 10^{15} \text{ GeV}^{-1}$
time	$1/\text{GeV}$		$1\text{sec} = 1.52 \cdot 10^{24} \text{ GeV}^{-1}$
J	dimensionless		
Q	dimensionless		

Μονάδες

Αυτό μας επιτρέπει

- Να εκφράζουμε όλα τα φυσικά μεγέθη σε μονάδες ενέργειας: απόσταση είναι $[E]^{-1}$. Ορμή είναι $[E]$. Κοκ.
- Τα φυσικά μεγέθη να εκφράζονται σε “λογικές” μονάδες

Φυσική μονάδα μήκους: μήκος κύματος Compton: $\hbar / m_0 c = 1$

Φυσική μονάδα χρόνου: $\tau = \hbar / m_0 c^2 = 1$

Φυσική μονάδα ενέργειας: $E = m_0 c^2 = 1$

Μάζα πρωτονίου: 10^{-24} g $\rightarrow$ Ενέργεια ηρεμίας ≈ 1 GeV.

Άρα, αν πάρουμε ως ενέργεια αναφοράς το 1 GeV, όλα τα φυσικά μεγέθη είναι ποσότητες κοντά στη μονάδα.

Ηλεκτρόνιο: 2000 φορές πιο ελαφρύ $\rightarrow$ Ενέργεια ηρεμίας ≈ 0.5 MeV

Πάντα χρήσιμα: Σχετικιστική κινηματική και μονάδες

Σχετικιστική κινηματική:

$$\underset{\text{ενέργεια}}{E} = \underset{\text{μάζα}}{m} \underset{c = \text{ταχύτητα του φωτός}}{c^2}$$

Η μάζα είναι μια μορφή ενέργειας



γενικά, με κινητική ενέργεια T , έχουμε: $E = T + mc^2$

$$E = \gamma mc^2, \text{ όπου } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \text{ και } \beta = v/c, \text{ με } v = \text{ταχύτητα σωματιδίου}$$

$$p = \gamma mv = \gamma \beta mc, \text{ όπου } p = \text{ορμή}$$

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \quad \rightarrow \quad E [\text{MeV}], p [\text{MeV}/c], m [\text{MeV}/c^2]$$

Μονάδες:

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \equiv \text{μονάδα ταχύτητας} \equiv 1$$

$$\hbar c = 197 \text{ MeV fm}, \text{ όπου: } \hbar = \frac{h}{2\pi} \equiv \text{μονάδα δράσης (ενέργειας} \times \text{χρόνου)} \equiv 1$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}$$

Σημείωση: με $c=1$, έχουμε: $E^2 = p^2 + m^2$, κλπ.