

Στοιχεία Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων (5ου εξαμήνου, χειμερινό 2018-19)

Τμήμα Τ2: Κ. Κορδάς & Δ. Σαμψωνίδης

Μάθημα 11

Αλληλεπίδραση νουκλεονίου-νουκλεονίου – πυρηνική
δύναμη και δυναμικό Yukawa– Δευτέριο
Βάθος πηγαδιού δυναμικού νουκλεονίων – Ενέργεια Fermi

Κώστας Κορδάς

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Πυρηνική & Στοιχειώδη, Αριστοτέλειο Παν. Θ/νίκης, 6 Νοεμβρίου 2018

Σήμερα

- **Κβαντικοί αριθμοί και ομοτιμία (parity)**
- **Πυρηνικό δυναμικό - δυναμικό Yukawa, σύστημα δευτερίου**
 - Βιβλίο C&G, Κεφ. 1 όλο, Κε. 2 (παρ. 2.4-2.6), Κεφ. 3 (παρ. 3.3 και 3.4), Παράρτημα Γ (κυρίως Γ.2,3,4).
 - Βιβλίο Χ. Ελευθεριάδη: κεφ. 6, παρ 6.1, 6.2
 - Σημειώσεις Πυρηνικής, Κεφ. 6
- **Εκτίμηση βάθους πηγαδιού για το δυναμικό νουκλεονίων - Ενέργεια Fermi**
 - Βιβλίο C&G, Παράρτημα Β, Κεφ. 5, 5.1-5.2
 - Βιβλίο Χ. Ελευθεριάδη: κεφ. 6, παρ 6.3
 - Σημειώσεις Πυρηνικής, Κεφ. 8
- **Ιστοσελίδα:** <http://www.physics.auth.gr/course/show/125>

1. Για τα άτομα γνωρίζουμε ότι περιγράφουμε τις καταστάσεις τους με την εξίσωση Schroedinger και το δυναμικό Coulomb

Για τους πυρήνες, τι δυναμικό να χρησιμοποιήσουμε;

Χαρακτηριστικά της πυρηνικής δύναμης

- **Ελκτική**
 - και μάλιστα υπερνικάει τις απωστικές δυνάμεις Coulomb των πρωτονίων στους πυρήνες
- **Μικρής εμβέλεια**
 - γιατί ξέρουμε ότι έχουμε τέλεια συμφωνία μόνο με Coulomb στα ατομικά φαινόμενα
 - Περίπου 1 fm , από σκεδάσεις σωματίων α
- **Κορεσμένη**
 - Δεν αισθάνεται κάθε νουκελόνιο όλα τα άλλα, αλλιώς η ενέργεια σύνδεσης θα αυξάνοταν με $A(A-1)$. Όμως αυξάνεται με A (θυμηθείτε: $B/A \sim 8 \text{ MeV}$)
- **Ανεξάρτητη του φορτίου**
 - Η πυρηνική δύναμη είναι ίδια για τις αλληλεπιδράσεις pp , nn , np
- **Σε πολύ μικρές αποστάσεις γίνει απώθητική (repulsive core)**

Δυναμικά με τη σωστή συμπεριφορά

- Το δυναμικό, V (=δυναμική ενέργεια), δύο νουκλεονίων πρέπει να περιγράφει τις βασικές ιδιότητες του πυρήνα: κορεσμό, μικρή εμβέλεια

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

- Διαλέγουμε ένα εύλογο δυναμικό $V \rightarrow$ το χρησιμοποιούμε στην Χαμιλτονιανή και λύνουμε την εξίσωση Schroedinger για δύο νουκλεόνια $\rightarrow$ προσαρμόζουμε τη λύση στα πειραματικά δεδομένα (υπολογίζουμε τις παραμέτρους της λύσης)
- Πειραματικά δεδομένα από
 - σκεδάσεις p_n και n_p (σκεδάσεις nn : δύσκολες πειραματικά)
 - τη μελέτη των ιδιοτήτων του δευτερίου
- Δοκιμάζουμε διάφορα Δυναμικά:
 - Στατικά Δυναμικά: Coulomb, Yukawa (διαφέρουν ως προς τη συνάρτηση)
 - Αλληλεπιδράσεις Νουκλεονίου-Νουκλεονίου: Δυναμικό Παρισιού

Κεντρικά δυναμικά – εξάρτηση μόνο από απόσταση, όχι διεύθυνση



- Από το δυναμικό δύο νουκλεονίων πρέπει να προκύπτει η δύναμη κορεσμού
- Τα δυναμικά δίνουν μια **ελκτική δύναμη** για r -εμβέλεια: $F = -\partial V / \partial r$ και μια **απωστική δύναμη** για πολύ μικρό r

- Ελκτικό δυναμικό “τυπου Coulomb”

$$V(r) \propto \frac{1}{r}$$

είναι δυνατόν να δημιουργεί δυσκολίες στους υπολογισμούς.

- Συχνά για μικρές ορμές νουκλεονίων το αντικαθιστούμε με το “**πηγάδι δυναμικού**”, ή με το **δυναμικό Yukawa**

$$V(r) \propto \frac{e^{-\frac{mc}{\hbar}r}}{r}$$

Ο όρος $e^{-r/R}$ στον αριθμητή κάνει το δυναμικό να πέφτει πολύ πιο γρήγορα από το απλό $1/r$

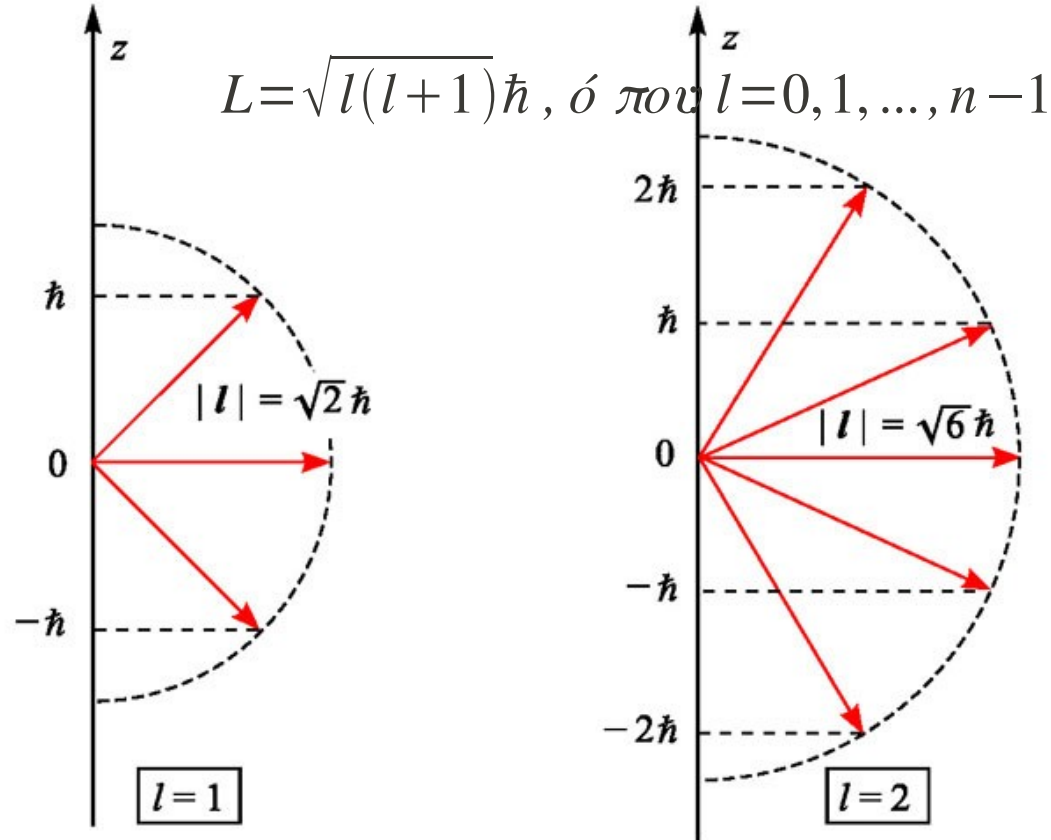
Μήκος $R=1.4 \text{ fm}$
 $\rightarrow$ ενέργεια $\sim 100 \text{ MeV}$

Δυναμικό Yukawa: $(1/r)*e^{-r/R}$

- Αλληλεπίδραση μεταξύ των νουκλεονίων με την ανταλλαγή ενός **σωματιδίου-διαδότη με σχετικά μεγάλη μάζα, m**
 - Πεπερασμένη ακτίνα δράσης (“εμβέλεια”)
 - Εκπομπή και απορρόφηση του σωματιδίου-διαδότη μάζας m
(παραβίαση της ενέργειας κατά mc^2 , δεν μπορεί να διαρκέσει πάνω από $\Delta E \Delta t \simeq \hbar \rightarrow m c^2 \Delta t \simeq \hbar$)
→ Πόση εμβέλεια έχει το σωματίδιο αυτό;
- $$Εμβέλεια \leq R = c \Delta t = \frac{\hbar}{m c} \quad \rightarrow R = \text{μήκος κύματος Compton του σωματιδίου-διαδότη}$$
- Χρησιμοποιώντας την εμβέλεια ($\sim 1.4 \text{ fm}$) υπολογίζεις $m \sim 140 \text{ MeV}$ ($\sim$ μάζα πιονίου: οπότε αρχικά υποθέσαμε ότι ο διαδότης των πυρηνικών δυνάμεων μεταξύ νουκλεονίων ήταν το πiónιο)

(Άνοιγμα παρένθεσης:
κβαντικοί αριθμοί και ομοτιμία

Κβάντωση στροφορμής



Ο κβαντικός αριθμός l , ορίζει το μήκος του διανύσματος της στροφορμής.

Το διάνυσμα της στροφορμής μπορεί να έχει μόνο συγκεκριμένους προσανατολισμούς: όσους δίνουν κάποια από τις επιτρεπόμενες προβολές στον άξονα z

ΣΧΗΜΑ 9.9: Το κβαντωμένο διάνυσμα της στροφορμής για $\ell=1$ και $\ell=2$. Λόγω της κβάντωσης της προβολής του πάνω σε έναν άξονα, το «διάνυσμα» της στροφορμής –αν η σχεδίασή του ως διανύσματος έχει νόημα– μπορεί να έχει μόνο ορισμένους διάκριτους προσανατολισμούς στον χώρο. Φαινόμενο που αποδίδεται με τον όρο «κβάντωση προσανατολισμού» ή «κβάντωση χώρου». Σημειώστε επίσης –γιατί αυτό είναι το πιο προκλητικό από όλα– ότι το διάνυσμα ℓ ουδέποτε ευθυγραμμίζεται με τον άξονα z . Ακόμα και στην κατάσταση μέγιστης προβολής του σε αυτόν τον άξονα σχηματίζει γωνία μαζί του αφού είναι πάντα $(\ell_z)_{\max} = \hbar\ell < |\ell| = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$.

Άθροισμα κβαντικών στροφορμών

Ο κανόνας άθροισής τους είναι πάντα ο ίδιος:

- Οι συνειστώσες z απλά προστίθονται (όπως και στα απλά διανύσματα)
- Ο κβαντικός αριθμός της ολικής στροφορμής μπορεί να πάρει τις εξής τιμές:

* από τη διαφορά μέχρι το άθροισμα (με βήμα μονάδα)
των δύο κβαντικών αριθμών των στροφορμών που προστίθονται
(αναλογία με αυτό που γίνεται με το μήκος των απλών διανυσματων)

Άθροισμα τροχιακών στροφορμών: $\vec{L}_{1+2} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$

$$m_{l(1+2)} = m_{l(1)} + m_{l(2)} \text{ και } |l_1 - l_2| \leq l_{1+2} \leq |l_1 + l_2|$$

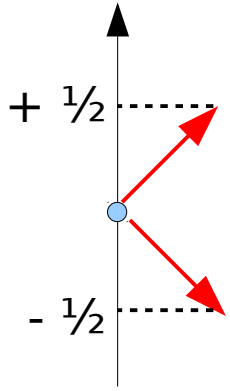
Άθροισμα ιδιοστροφορμών (σπιν): $\vec{S}_{1+2} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$

$$m_{s(1+2)} = m_{s(1)} + m_{s(2)} \text{ και } |s_1 - s_2| \leq s_{1+2} \leq |s_1 + s_2|$$

Άθροισμα τροχιακής στροφορμής και ιδιοστροφορμής: $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

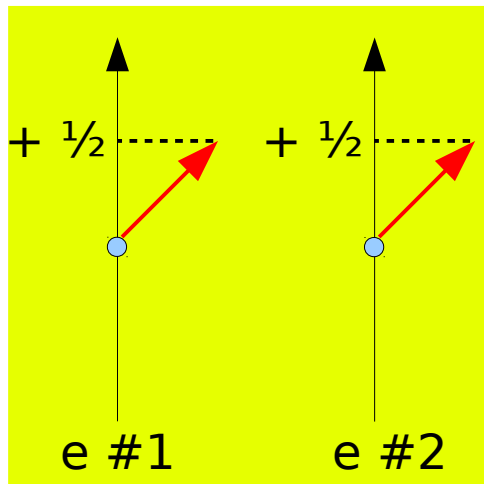
$$m_j = m_l + m_s \text{ και } |l - s| \leq j \leq |l + s|$$

Π.χ: άθροισμα σπιν δύο σωματιδίων με σπιν $\frac{1}{2}$ το καθένα

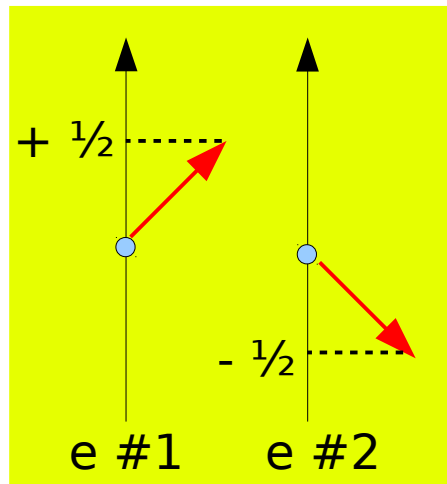


- * Όταν λέμε ότι ένα ηλεκτρόνιο (e) έχει “σπιν $\frac{1}{2}$ ”, εννοούμε ότι ο κβαντικός αριθμός του σπιν, είναι $\frac{1}{2}$, δηλαδή $s = \frac{1}{2}$.
- * Το διάνυσμα του σπιν μπορεί να έχει τους εξής προσανατολισμούς κατά τον άξονα των z: από $-\frac{1}{2}$ έως $+\frac{1}{2}$ με βήμα μονάδα, Δηλαδή, η προβολή μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές $-\frac{1}{2}$ ή $+\frac{1}{2}$

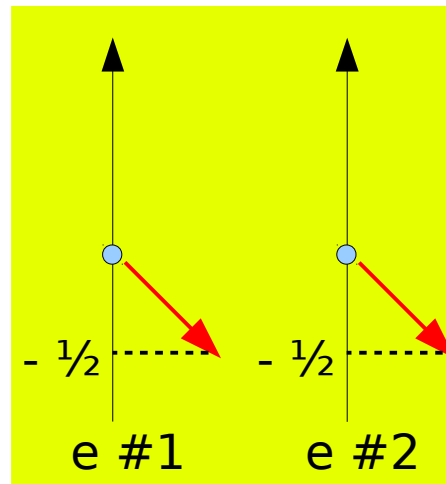
Το ολικό σπιν ενός συστήματος δύο ηλεκτρονίων μπορεί να πάρει τις τιμές:



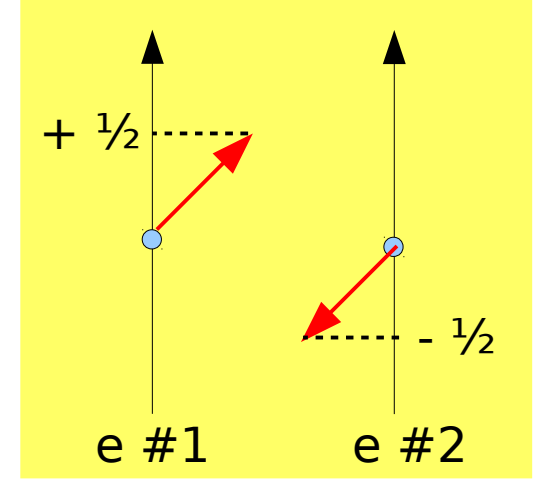
$$m_{s(1+2)} = +1$$



$$m_{s(1+2)} = 0$$



$$m_{s(1+2)} = -1$$



$$m_{s(1+2)} = 0$$

Και στις τρεις αυτές περιπτώσεις το ολικό σπιν έχει **μήκος διάφορο του μηδενός**:

$$\text{Μήκος του διανύσματος σπιν} = \sqrt{s(s+1)} \hbar$$

$$S_{1+2} = 1$$

(s = η τιμή της μέγιστης προβολής)

Υπάρχει μόνο αυτός ο τρόπος ώστε το ολικό σπιν να έχει **μήκος μηδέν**: $S_{1+2} = 0$

Ενέργεια: εξάρτηση κι από τροχιακή στροφορμή κι από σπίν

Κάθε ιδιοκατάσταση της ενέργειας, στροφορμής κ' σπιν στο άτομο χαρακτηρίζεται από κβαντικούς αριθμούς $\{n, l, s, j, m_j\}$

→ **Ολική στροφορμή J ατόμου:** άθροισμα τροχιακής στροφορμής L και σπίν S

$$\text{π.χ, για } s=1/2: \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, j = l \pm 1/2$$

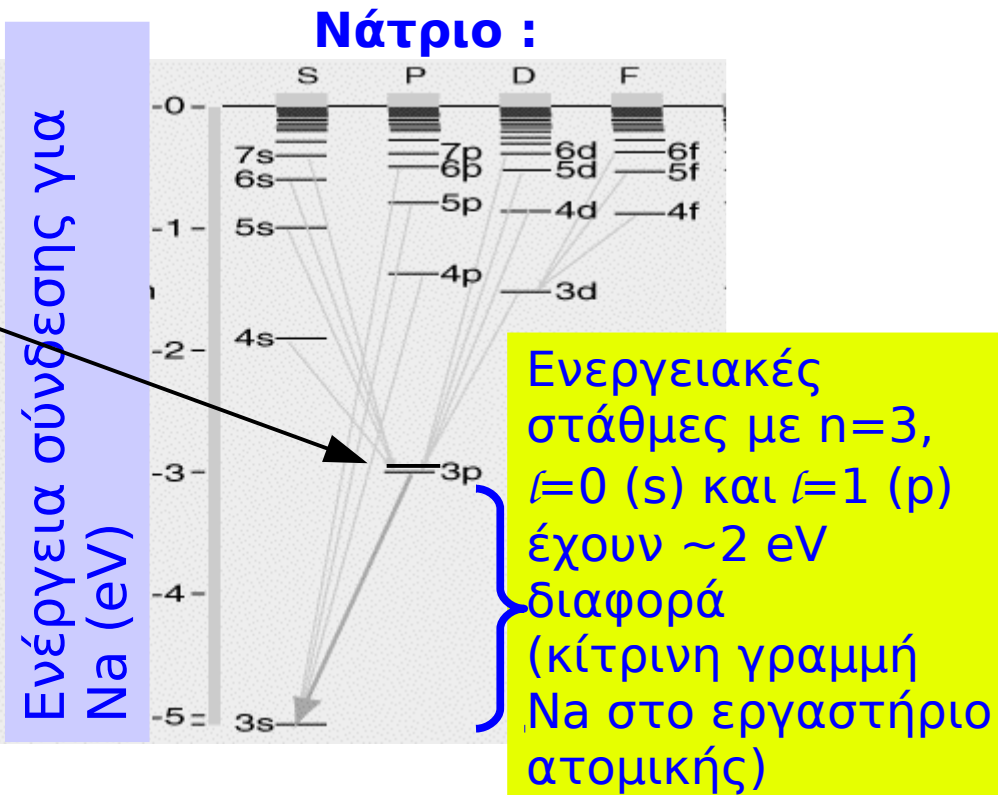
$$\text{Για } l=1 \rightarrow j = 1 \pm 1/2 = 3/2 \text{ ή } 1/2$$

Διπλή κίτρινη γραμμή του Νατρίου (θυμάστε στο εργαστήριο ατομικής;) Αποτέλεσμα της **σύζευξης σπίν-τροχιάς (Spin-orbit coupling = $L \cdot S$ coupling)**: σύζευξη του σπιν του ηλεκτρονίου με το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το πρωτόνιο, το οποίο θεωρούμε σαν περιστρεφόμενο γύρω από το ηλεκτρόνιο, όταν βρίσκμαστε πάνω στο ηλεκτρόνιο)

Συμβολισμός καταστάσεων:

$$ns_J, np_J, nd_J, nf_J, \dots$$

$$\text{Π.χ, } 2p_{1/2}: (n=2, l=1, j=1/2)$$



Ακόμα ένας κβαντικός αριθμός: Ομοτιμία (parity)

- Είδαμε ότι κάθε ιδιοκατάσταση της ενέργειας, στροφορμής και σπιν στο άτομο χαρακτηρίζεται από κβαντικούς αριθμούς $\{n, l, s, m_l, m_s\}$. **Ο τρόπος που συμπεριφέρεται η αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση σε αναστροφή του χώρου** (που είναι το αποτέλεσμα της εφαρμογής του τελεστή της ομοτιμίας/parity, P , πάνω της) μπορεί να ορίσει κι άλλον έναν κβαντικό αριθμό: την **ομοτιμία ή parity**

$$P(\vec{r}) = -\vec{r} \left\{ \begin{array}{l} P(\psi(\vec{r})) = \psi(-\vec{r}) = \psi(\vec{r}) : \text{άρτια συνάρτηση} \rightarrow \text{Parity} = +1 \\ P(\psi(\vec{r})) = \psi(-\vec{r}) = -\psi(\vec{r}) : \text{περιττή συνάρτηση} \rightarrow \text{Parity} = -1 \end{array} \right.$$

- Κι έτσι γράφουμε την ολική στροφορμή (= "το σπίν" του συστήματος) και την ομοτιμία ως: $\mathbf{J}^\pi$ π.χ., κατάσταση $\frac{3}{2}^+$
- Σημείωση:** για κεντρικά δυναμικά $\psi(\vec{r}) = R(r) Y(\theta, \varphi) \rightarrow$ η πάρτυ της ψ οφείλεται μόνο στις "σφαιρικές αρμονικές" συναρτήσεις Y_{lm} :

$$\vec{r} \rightarrow -\vec{r} : P(Y(\theta, \varphi)) = Y(\pi - \theta, \pi + \varphi) = (-1)^l Y(\theta, \varphi), \text{ οπότε: } \text{Parity} = (-1)^l$$

Σημείωση: οι γωνιακές ιδιοσυναρτήσεις $Y(\theta, \phi)$ είναι οι “Σφαιρικές Αρμονικές” και είναι ίδιες για όλα τα “κεντρικά δυναμικά”, δηλ. αυτά που δεν έχουν εξάρτηση από το θ, ϕ (όπως πχ. το δυναμικό Coulomb $\sim 1/r$)

ΠΙΝΑΚΑΣ 9.2. Οι σφαιρικές αρμονικές μέχρι $\ell = 2$

	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$
$m = 2$			$Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$
$m = 1$		$Y_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$	$Y_{21} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{i\phi}$
$m = 0$	$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$	$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$
$m = -1$		$Y_{1,-1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}$	$Y_{2,-1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{-i\phi}$
$m = -2$			$Y_{2,-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\phi}$

Είδαμε πρίν ότι η ενέργεια ενός συστήματος εξαρτάται απο τους διάφορους κβαντικούς αριθμούς, μεταξύ των οποίων και η στροφορμή και το σπιν του: OK.

Ερώτηση:

Αφού βλέπουμε ότι η ομοτιμία (parity), είτε είναι +1 είτε -1, αφήνει το $|\psi|^2$ αμετάβλητο, δηλαδή αφήνει την πιθανότητα ανά μονάδα όγκου αμετάβλητη, επηρεάζει η ομοτιμία κάτι μετρήσιμο/παρατηρίσιμο;

→ Βεβαίως και ναι.

Parity: η αναστροφή του χώρου και η Αρχή του Pauli

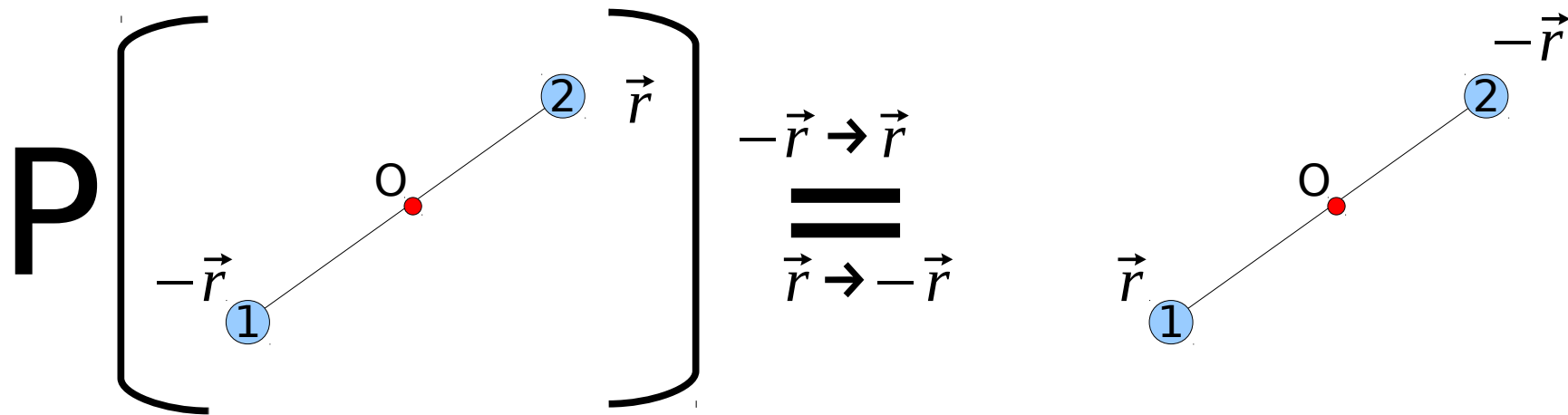
Η απαγορευτική αρχή του Pauli
και η μη διακρίσιμότητα των ταυτόσημων σωματιδίων στην Κβαντομηχανική

Στην «ρίζα» της γενικευμένης αρχής του Pauli βρίσκεται το θεμελιώδες γεγονός ότι στην Κβαντομηχανική τα ταυτόσημα σωματίδια που ανήκουν στο ίδιο φυσικό σύστημα (π.χ. ένα άτομο) είναι μη διακρίσιμα διότι περιγράφονται από αλληλοεπικαλυπτόμενες κυματοσυναρτήσεις, κι επομένως είναι αδύνατον να πούμε ποιο είναι το #1 ποιο είναι το #2 κ.ο.κ. Αυτή η αδυναμία διάκρισης διασφαλίζεται κβαντομηχανικά μόνο με κύματοσυναρτήσεις $\psi(x_1, x_2)$ που είναι συμμετρικές [$\psi(x_2, x_1) = \psi(x_1, x_2)$] ή αντισυμμετρικές [$\psi(x_2, x_1) = -\psi(x_1, x_2)$] κι επομένως οδηγούν σε πιθανότητα $|\psi(x_1, x_2)|^2$ που είναι συμμετρική στην εναλλαγή $x_1 \leftrightarrow x_2$ κι άρα δεν επιτρέπει τη διάκριση των δύο σωματιδίων.

ΜΕΛΕΤΗ: Σ. Τραχανά, Κβαντομηχανική I, σελ. 468 – 480.

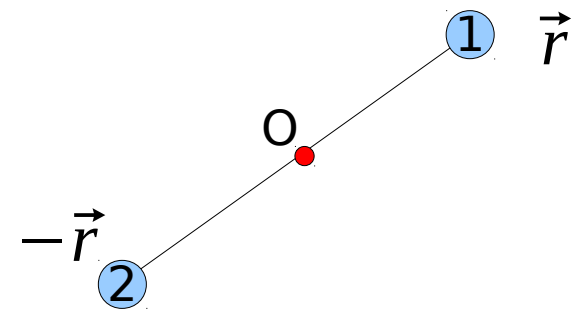
- Όλα τα σωματίδια με ακέραιο σπιν ($s=0, 1, 2, \dots$) - τα αποκαλούμενα **μποζόνια** - περιγράφονται από **συμμετρικές κυματοσυναρτήσεις (Parity = +1)**, ενώ όλα τα σωματίδια με ημι-ακέραιο σπιν ($s=1/2, 3/2, \dots$) - τα αποκαλούμενα **φερμιόνια** - περιγράφονται από **αντισυμμετρικές κυματοσυναρτήσεις (Parity = -1)**
ως προς την αναστροφή του χώρου ($x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$)

Parity: για την κυματοσυνάρτηση δύο **ταυτόσημων** σωματιδίων, η αναστροφή του χώρου είναι ίδια με την ανταλλαγή τους



Με την εφαρμογή της πάριτυ πάνω στην αριστερή κατάσταση (το #1 στη θέση $-r$, και το #2 στη θέση r) έχουμε το #1 στη θέση r , και το #2 στη θέση $-r$:

→ ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα έχουμε και με την ανταλλαγή των σωματιδίων #1 και #2



Ταυτόσημα φερμιόνια: ποτέ με ίδιους κβαντικούς αριθμούς

Η ολική κυματοσυνάρτηση $\Psi_{1,2}$ δύο ταυτόσημων φερμιονίων (του #1 και του #2) είναι γινόμενο των κυματοσυνρτήσεων της θέσης για τα #1 και #2, ψ_1 και ψ_2 , και του ολικού τους σπίν, $X_{1,2}$

Αυτή η ολική κυματοσυνάρτηση είναι αντισυμμετρική, σύμφωνα με την αρχή του Pauli: $\Psi_{2,1} = -\Psi_{1,2}$, αφού έχουμε φερμιόνια

$$\text{Όπου: } \Psi_{1,2} = \psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2)X_{1,2}(\text{σπιν}) \qquad \Psi_{2,1} = \psi_2(\vec{r}_1)\psi_1(\vec{r}_2)X_{2,1}(\text{σπιν})$$

Αν τα 2 φερμιόνια είναι με ίδιο προσανατολισμό σπίν (πχ., $+\frac{1}{2}$) τότε, αφού τα δυο φερμιόνια είναι ταυτόσημα και δεν μπορώ να διακρίνω ποιός είναι ο #1 και ποιός ο #2, έχω:

$$X_{1,2}(\text{σπιν}) = X_1(\text{σπιν πάνω})X_2(\text{σπίν πάνω}) = X_2(\text{σπιν πάνω})X_1(\text{σπίν πάνω}) = X_{2,1}(\text{σπιν})$$

$$\text{Οπότε: } \psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2) = -\psi_2(\vec{r}_1)\psi_1(\vec{r}_2)$$

Θυμηθείτε ότι η $\psi(r, \theta, \phi)$ καθορίζει τους κβαντικούς αριθμούς της ενέργειας και της τροχιακής στροφορμής (n, l, m_l).

Οπότε, αν εκτός από το σπιν έχουν την ίδια “θέση” ($\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}$), δηλαδή του ίδιους άλλους κβαντικούς αριθμούς (n, l, m_l) τότε:

$$\psi_1(\vec{r})\psi_2(\vec{r}) = -\psi_2(\vec{r})\psi_1(\vec{r}) \rightarrow \psi_1(\vec{r})\psi_2(\vec{r}) = 0$$

Και αφού η κυματοσυνάρτησή τους είναι μηδέν, η πιθανότητα να τα βρούμε έτσι είναι μηδέν! → ΔΗΛΑΔΗ: ποτέ δεν τα βρίσκεις με ολόιδιους κβαντικούς αριθμούς

Οι καταστάσεις με $S=1$ είναι “συμμετρικές” καταστάσεις ενός συστήματος δύο ταυτόσημων νουκλεονίων

C.4 The deuteron

Παράρτημα Γ.4, “Το δευτέριο”

The total intrinsic spin S of two spin $\frac{1}{2}$ fermions is

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2,$$

where from the rules above the quantum number S can take the values $S = 1$ and $S = 0$. Explicitly, the three $S = 1$ states $|S, S_m\rangle$ are found to be

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= |+\tfrac{1}{2}\rangle_1 |+\tfrac{1}{2}\rangle_2 \\ |1, 0\rangle &= (|+\tfrac{1}{2}\rangle_1 |-\tfrac{1}{2}\rangle_2 + |-\tfrac{1}{2}\rangle_1 |+\tfrac{1}{2}\rangle_2)/\sqrt{2} \\ |1, -1\rangle &= |-\tfrac{1}{2}\rangle_1 |-\tfrac{1}{2}\rangle_2 \end{aligned} \tag{C.6}$$

and the $S = 0$ state is

$$|0, 0\rangle = (|+\tfrac{1}{2}\rangle_1 |-\tfrac{1}{2}\rangle_2 - |-\tfrac{1}{2}\rangle_1 |+\tfrac{1}{2}\rangle_2)/\sqrt{2}. \tag{C.7}$$

(The factors $\sqrt{2}$ are for normalisation.)

ΟΛΕΣ οι καταστάσεις με το ίδιο S έχουν την ίδια συμμετρία ως προς την εναλλαγή $1 \leftrightarrow 2$. Π.χ., οι $S=1$ είναι ΟΛΕΣ συμμετρικές, αφού η $|S=1, S_z=+1\rangle$ είναι συμμετρική

Κλείσιμο παρένθεσης:
κβαντικοί αριθμοί και ομοτιμία)

Αλληλεπίδραση νουκελονίου-νουκλεονίου – “δυναμικό Παρισιού”

Απωστικό κέντρο

Δυναμικό = άθροισμα διαφόρων όρων:

$$V(r) = V_{C1}(r) + V_T(r)\Omega_T + V_{SO}(r)\Omega_{SO} + V_{SO2}(r)\Omega_{SO2}$$

• Περιλαμβάνει:

- ▶ συνάρτηση για τις επιτρεπτές (αντισυμμετρικές) καταστάσεις δύο πρωτονίων ή δύο νετρονίων ή νετρονίου πρωτονίου ($S=0$: αντισυμμετρικές)
- ▶ συνάρτηση για τις συμμετρικές καταστάσεις (εφικτές μόνο στο σύστημα πρωτονίου-νετρονίου) ($S=1$: συμμετρικές)

Για ολικό $S=0$, τα νουκλεόνια “αισθάνονται” μόνο ένα κεντρικό δυναμικό πάντα

Έχει αρκετό βάθος για δέσμιο σύστημα

$$\Omega_T = 3 \frac{(\sigma_1 \cdot r)(\sigma_2 \cdot r)}{r^2} - \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

σύζευξη σπιν-σπίν

Για ολικό $S=1$, υπάρχουν τεσσereis συνεισφορές στο δυναμικό

(οι 3 παραπάνω με $S=1$ και το V_{SO2})

$$\hbar\Omega_{SO} = (\sigma_1 + \sigma_2) \cdot L$$

$$\hbar^2\Omega_{SO2} = (\sigma_1 \cdot L)(\sigma_2 \cdot L) + (\sigma_2 \cdot L)(\sigma_1 \cdot L)$$

Οι 4 όροι στο $V(r)$: κεντρικό, ταχυστικό δυναμικό & 2 όροι σύζευξης $L \cdot S$

Όχι αρκετό βάθος για δέσμιο σύστημα

Γιατί ο μικρότερος πυρήνας είναι το δευτέριο (πρωτόνιο-νετρόνιο) και όχι άλλος;

- Η βασική κατάσταση συστήματος δύο νουκλεονίων έχει $I=0$ μεταξύ των 2 νουκλεονίων: συμμετρική κυματοσυνάρτηση ως προς την εναλλαγή των νουκλεονίων ($1 \leftrightarrow 2$ ή $\mathbf{r} \leftrightarrow -\mathbf{r}$).
- Αν $S=0$, το μόνο δυναμικό είναι το κεντρικό V_{co} (Σχήμα προηγούμενη σελ.): αλλά, δεν έχει αρκετό βάθος για δέσιμο σύστημα.
- Οπότε μένει η $S=1$ σαν επιλογή.
 - Οι κυματοσυναρτήσεις $S=1$ είναι **συμμετρικές** ως προς την εναλλαγή των νουκλεονίων
 - όμως, **ΔΕΝ** γίνεται να έχουμε δύο ταυτόσημα φερμιόνια σε συμμετρική κατάσταση,
 - οπότε, δεν γίνεται να έχουμε πρωτόνιο-πρωτόνιο ή νετρόνιο-νετρόνιο.
 - κι έτσι μένει το πρωτόνιο-νετρόνιο μόνη επιλογή για να το σύστημα 2 νουκλεονίων!

Παράρτημα Γ.4, “Το δευτέριο”

Δευτέριο (1)

- Είναι η μόνη δέσμια κατάσταση νουκλεονίου-νουκλεονίου (n-p) που υπάρχει: ($A=2$, $Z=N=1$)

▶ Μπορεί να διαχωριστεί στα n, p με ακτινοβολήση $E_\gamma \geq 2.2245 \text{ MeV}$ (ενέργεια σύνδεσης)

- ▶ Το δευτέριο ΔΕΝ έχει διεγερμέν
- ▶ Στροφορμή $J = 1\hbar$
 - ▶ Μαγνητική διπολική ροπή μ_d και
 - ▶ Ηλεκτρική τετραπολική ροπή

binding energy = 2.2245 MeV,
angular momentum $j = 1$,
magnetic moment = $0.8574 (e\hbar/2m_p)$,
electric quadrupole moment = 0.286 fm^2 .

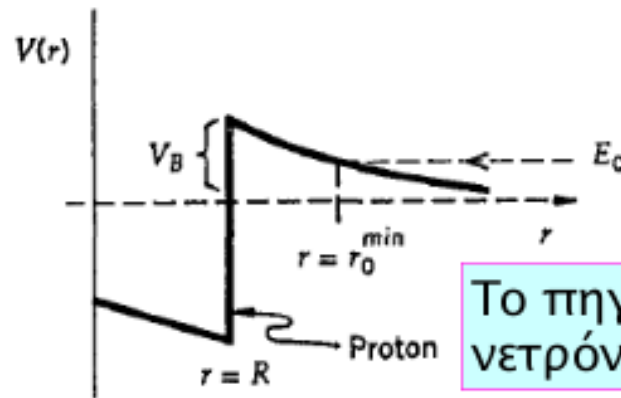
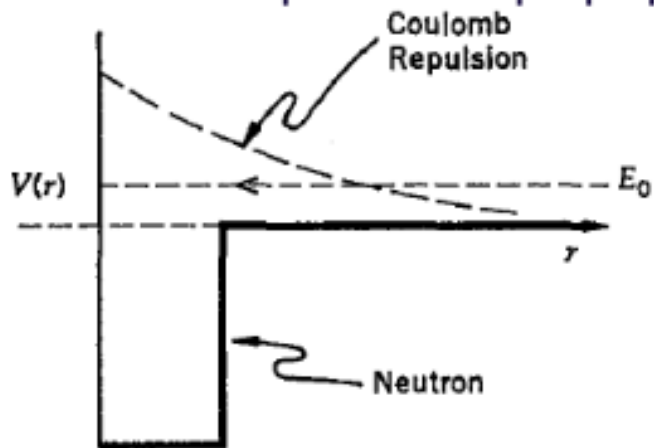
“Πυρηνική”
Μαγνητόνη
 μ_N

Παρατηρούμε: $\mu_d \neq \mu_n + \mu_p$ (αλγεβρικό άθροισμα) Αλλά ούτε είναι πολύ διαφορετικό. Αποκλείεται η ύπαρξη τροχιακής στροφορμής ($L = 0$)

- Έχουμε τις εξής επιλογές με: $S_p = 1/2$, $S_n = 1/2$
 $S_d = 1$ ($S_z = -1, 0, 1$)
 $S_d = 0$ ($S_z = 0$)
- Η κατάσταση $S_d = 0$ ΔΕΝ είναι δέσμια

Δευτέριο (2)

- Γιατί η τετραπολική ροπή του δευτερίου δεν είναι μηδέν?
 - ▶ $L=0$ πρόκειται για **S** “σφαιρική” κατανομή φορτίου
 - ▶ Πιθανή εξήγηση:
 - ▶ Δεν είναι καθαρή S αλλά έχει κι ένα μικρό ποσοστό D ($D \equiv I=2$: σχετική στροφορμή p-n)
- Για να βρούμε τις κυματοσυναρτήσεις χρησιμοποιούμε σφαιρικό πηγάδι δυναμικού:
- Η εξίσωση Schroedinger: $d^2u/dr^2 + 2\mu/\hbar^2 (V_0 - E)u$ $u = r \psi(r)$ ($L=0$)
- Η κυματοσυνάρτηση πρέπει να τείνει στο μηδέν για $r > R$ (δυναμικού)



Το πηγάδι δυναμικού για νετρόνια και για πρωτόνια

2. Πυρήνες με δέσμια νουκλεόνια - τα πρωτόνια και τα νετρόνια σε διαφορετικά πηγάδια δυναμικού

Ενέργεια Fermi και βάθος πηγαδιών

Δέσμιο σύστημα **φερμιονίων** σε πηγάδι δυναμικού → **υπάρχουν ενεργειακές στάθμες** που συμπληρώνονται από το βάθος του πηγαδιού και προς τα πάνω, μέχρι μια ενέργεια που τη λέμε **Ενέργεια Fermi (E_F)**

→ Θα δούμε τώρα έναν γρήγορο τρόπο να βρούμε πόσο περίπου βάθος έχει αυτό το πηγάδι δυναμικού.

Διαφορετικά πηγάρια ρ, η

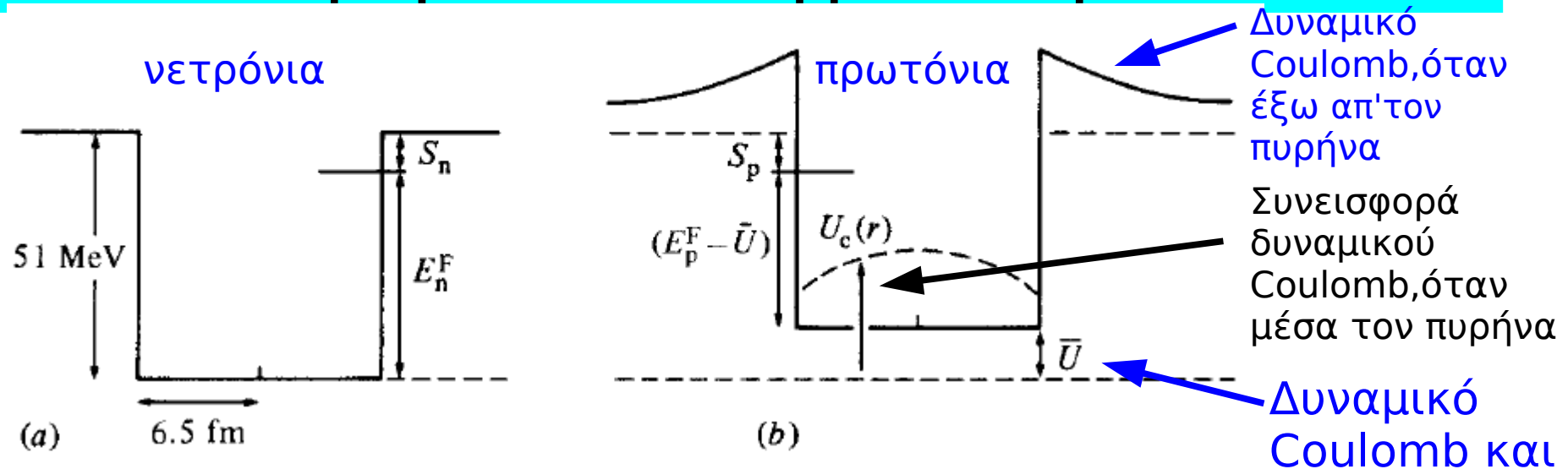


Fig. 5.1 A schematic representation of (a) the neutron potential well and (b) the proton potential well for the nucleus $^{208}_{82}\text{Pb}$. E_n^F and $(E_p^F - \bar{U})$ have been estimated using equation (5.5). The observed neutron separation energy S_n of 7.4 MeV implies a neutron well-depth of 51 MeV. The observed proton separation energy S_p of 8.9 MeV implies that $\bar{U} = 11$ MeV. $\bar{U}$ represents the sum of the mean electrostatic potential and the asymmetry energy.

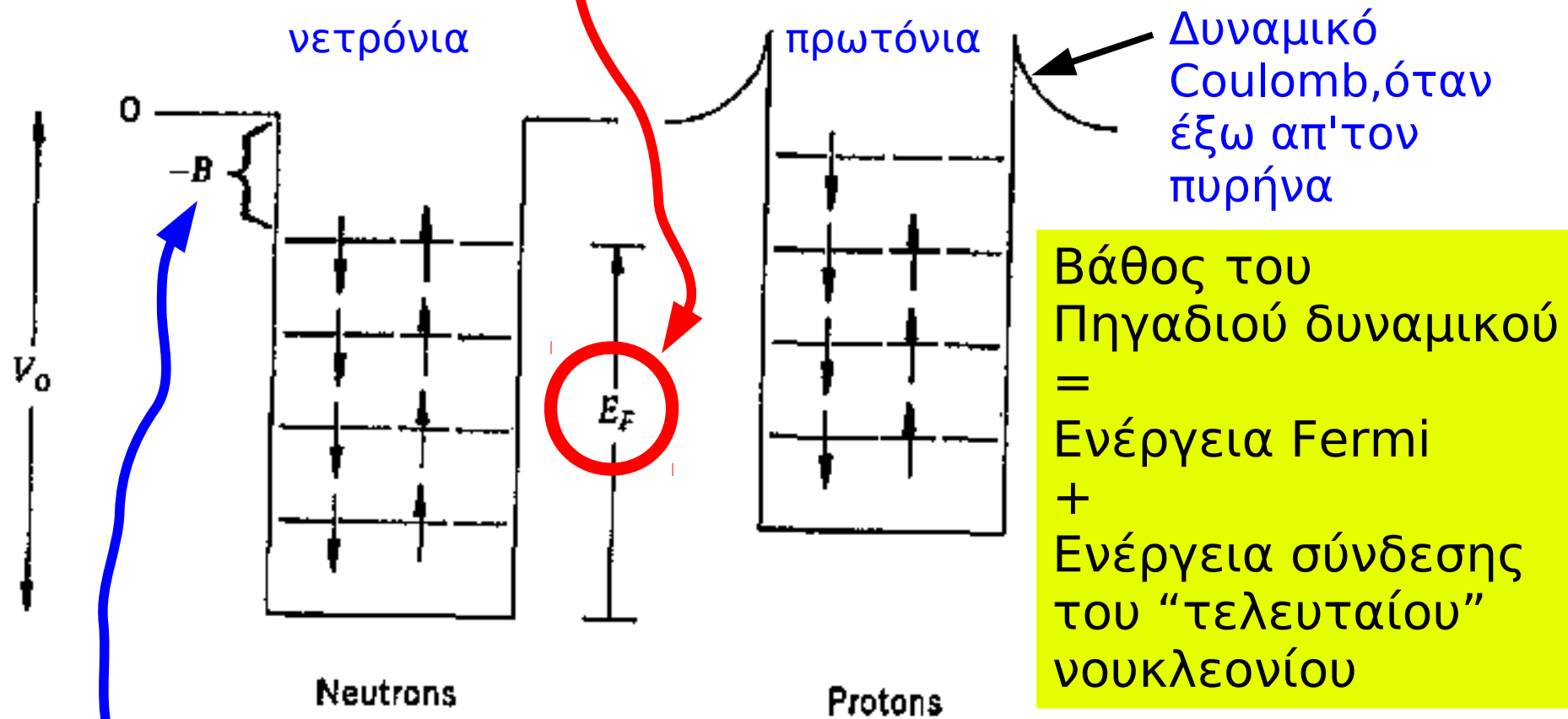
$$U_c(r) = \begin{cases} \frac{(Z-1)e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left[\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right], & r < R, \\ \frac{(Z-1)e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > R, \end{cases} \quad (5.1)$$

where R is the nuclear radius.

Σχήμα 5.1 και εξίσωση 5.1 του βιβλίου σας

Διαφορετικά πηγάδια p, n

Δέσμιο σύστημα **φερμιονίων** σε πηγάδι δυναμικού $\rightarrow$ ενεργειακές στάθμες, συμπληρωμένες από το βάθος του πηγαδιού και προς τα πάνω, **μέχρι μια ενέργεια που τη λέμε Ενέργεια Fermi (E_F)**



Ενέργεια σύνδεσης του τελευταίου νουκλεονίου =
= Ενέργεια διαχωρισμού του = $S_n(N, Z)$

Πυκνότητα καταστάσεων σε κουτί

- Παράρτημα Β βιβλίου σας C&G, πυκνότητα καταστάσεων, σε κυβικό κουτί.

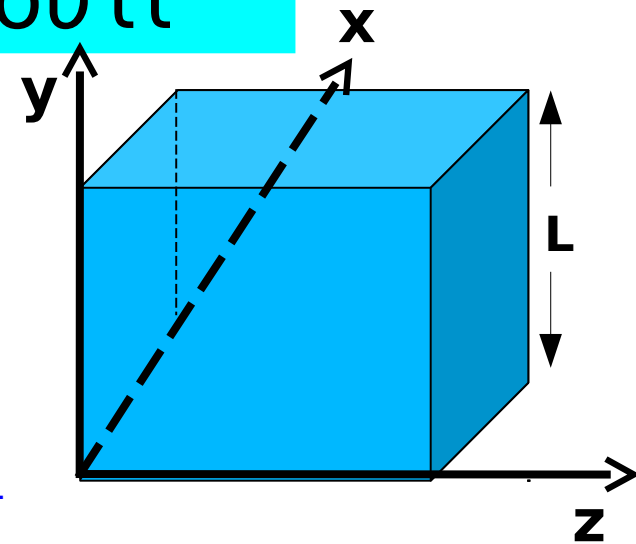
Στάσιμο κύμα σε κουτί:

* $\psi(x,y,z)$ = ημίτονα και συνημίτονα

* $\psi(x,y,z) = 0$ όταν $x,y,z = 0$ ή L

→ $\psi(x,y,z)$ = μόνο ημίτονα

με k_x, k_y, k_z ακέραια πολλαπλάσια του π/L



$$\psi(x, y, z) = \text{const.} \cdot \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \cdot \sin(k_z z)$$

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L}, k_y = \frac{n_y \pi}{L}, k_z = \frac{n_z \pi}{L}, \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3 \dots$$

$$k^2 = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \rightarrow E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$$

Σημείωση: τα n_x, n_y, n_z είναι θετικά, και τα k_x, k_y, k_z επίσης

- Για κάθε E αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα k
- Καθε μιά τιμή του k μπορώ να την αποκτήσω από διαφορετικούς συνδυασμούς των n_x, n_y, n_z . Κάθε συγκεκριμένος συνδυασμός (n_x, n_y, n_z) ορίζει μία μόνο **κατάσταση**

Ερώτηση: Πόσες καταστάσεις υπάρχουν για $E \leq E_0$ ή αντίστοιχα για $k \leq k_0$;

Αριθμός & Πυκνότητα καταστάσεων σε κουτί

- Χώρος φάσεων:** οι άξονες είναι οι ορμές P_x , P_y , P_z ή (ισοδύναμα) οι κυματάριθμοι k_x , k_y , k_z

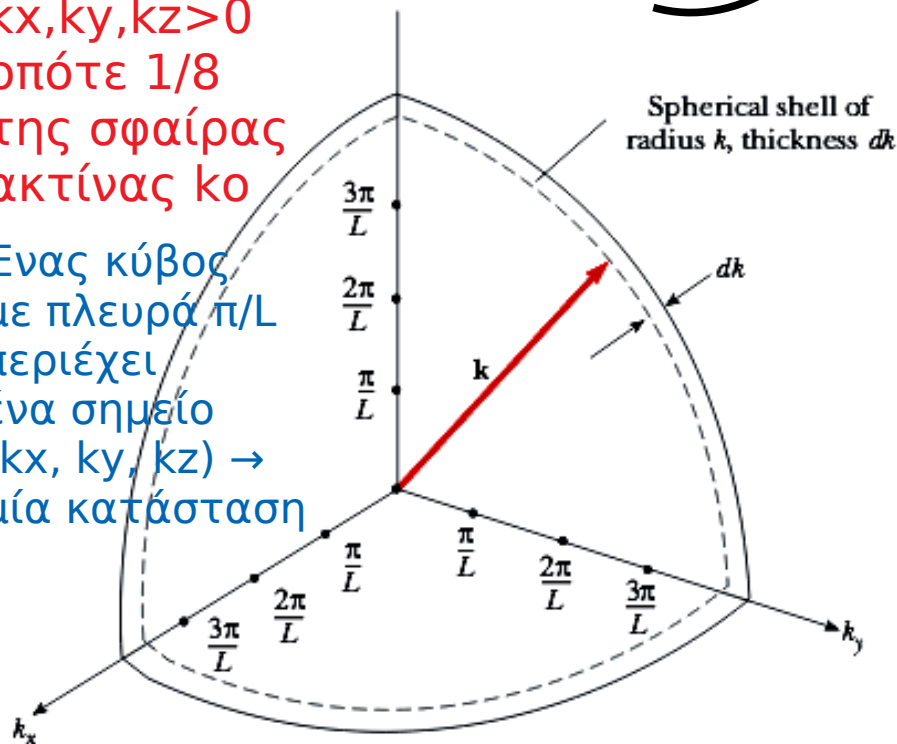
1. Αριθμός διακριτών σημείων (k_x, k_y, k_z) με $k < k_0 =$

(όγκος στο χώρο των φάσεων) / (όγκος μίας κατάστασης)
 όπου: κάθε κατάσταση (k_x, k_y, k_z) καταλαμβάνει όγκο $(\pi/L)^3$

$$= \frac{1}{8} \frac{4\pi k_0^3}{3} \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k_0^3}{3} \quad L^3 = V$$

$k_x, k_y, k_z > 0$
 οπότε 1/8
 της σφαίρας
 ακτίνας k_0

Ένας κύβος
 με πλευρά π/L
 περιέχει
 ένα σημείο
 $(k_x, k_y, k_z) \rightarrow$
 μία κατάσταση



Αριθμός & Πυκνότητα καταστάσεων σε κουτί

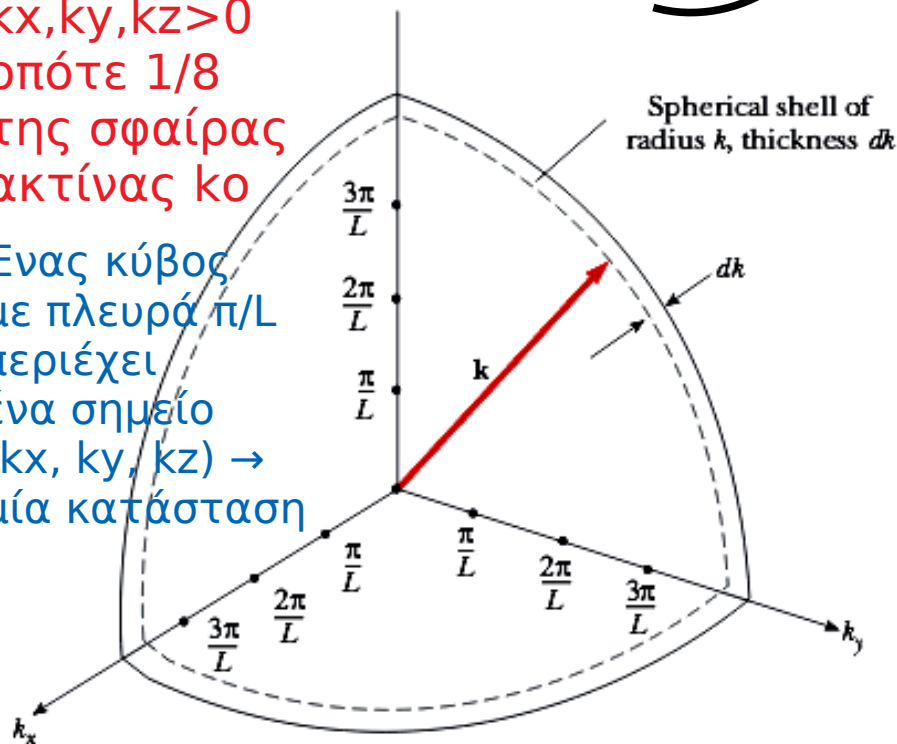
- **Χώρος φάσεων:** οι άξονες είναι οι ορμές P_x , P_y , P_z ή (ισοδύναμα) οι κυματάριθμοι k_x , k_y , k_z

1. Αριθμός διακριτών σημείων (k_x, k_y, k_z) με $k < k_0 =$
(όγκος στο χώρο των φάσεων) / (όγκος μίας κατάστασης)
 όπου: κάθε κατάσταση (k_x, k_y, k_z) καταλαμβάνει όγκο $(\pi/L)^3$

$$= \frac{1}{8} \frac{4\pi k_0^3}{3} \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k_0^3}{3} \quad L^3 = V$$

$k_x, k_y, k_z > 0$
 οπότε 1/8
 της σφαίρας
 ακτίνας k_0

Ένας κύβος
 με πλευρά π/L
 περιέχει
 ένα σημείο
 $(k_x, k_y, k_z) \rightarrow$
 μία κατάσταση



2. $k_x, k_y, k_z > 0$. Για:

$$k_0 < k < k_0 + dk_0$$

οι καταστάσεις είναι
 σε όγκο:

$$\frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k_0^2 dk_0$$

Αριθμός & Πυκνότητα καταστάσεων σε κουτί

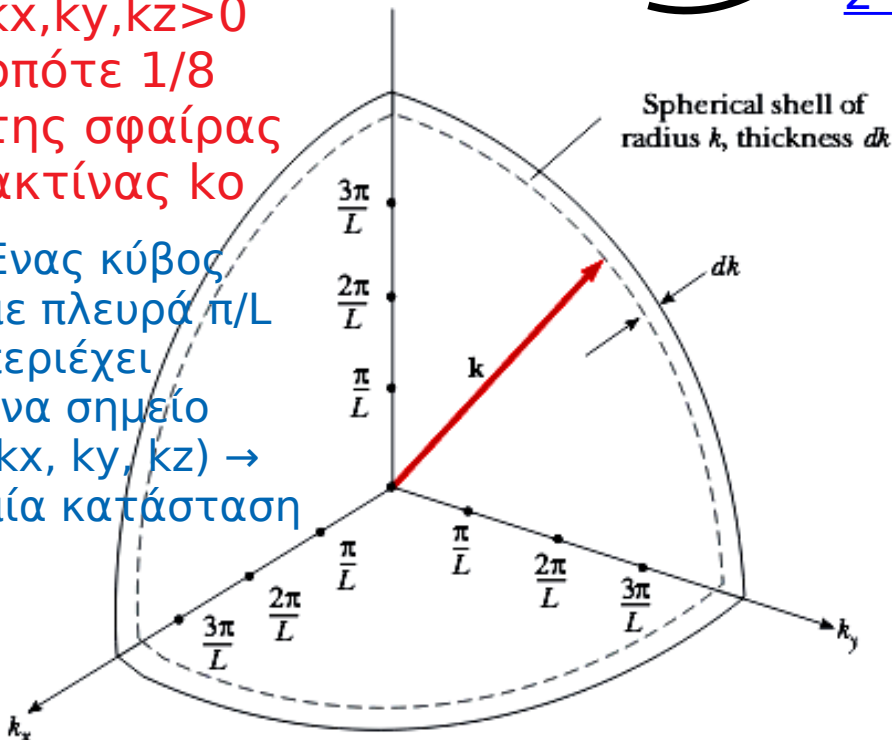
- **Χώρος φάσεων:** οι άξονες είναι οι ορμές P_x, P_y, P_z ή (ισοδύναμα) οι κυματάριθμοι k_x, k_y, k_z

1. Αριθμός διακριτών σημείων (k_x, k_y, k_z) με $k < k_0 =$
(όγκος στο χώρο των φάσεων) / (όγκος μίας κατάστασης)
 όπου: κάθε κατάσταση (k_x, k_y, k_z) καταλαμβάνει όγκο $(\pi/L)^3$

$$= \frac{1}{8} \frac{4\pi k_0^3}{3} \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k_0^3}{3}$$

$k_x, k_y, k_z > 0$
 οπότε 1/8
 της σφαίρας
 ακτίνας k_0

Ένας κύβος
 με πλευρά π/L
 περιέχει
 ένα σημείο
 $(k_x, k_y, k_z) \rightarrow$
 μία κατάσταση



2. $k_x, k_y, k_z > 0$. Για:

$$k_0 < k < k_0 + dk_0$$

οι καταστάσεις είναι
 σε όγκο: $\frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k_0^2 dk_0$

3. Αριθμός καταστάσεων N_0 με $k < k_0$

Οι καταστάσεις επί 2 επειδή μπορούμε να έχουμε
 2 προσανατολισμούς σπιν σε κάθε (k_x, k_y, k_z)

$$N_0 = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k_0^3}{3}, \quad \text{or} \quad k_0^3 = 3\pi^2 \frac{N_0}{V}$$

Αριθμός & Πυκνότητα καταστάσεων σε κουτί

- Χώρος φάσεων:** οι άξονες είναι οι ορμές P_x , P_y , P_z ή (ισοδύναμα) οι κυματάριθμοι k_x , k_y , k_z

- Αριθμός διακριτών σημείων (k_x, k_y, k_z) με $k < k_0 =$**
(όγκος στο χώρο των φάσεων) / (όγκος μίας κατάστασης)
όπου: κάθε κατάσταση (k_x, k_y, k_z) καταλαμβάνει όγκο $(\pi/L)^3$

$$= \frac{1}{8} \frac{4\pi k_0^3}{3} \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k_0^3}{3}$$

$k_x, k_y, k_z > 0$
οπότε 1/8
της σφαίρας
ακτίνας k_0

Ένας κύβος
με πλευρά π/L
περιέχει
ένα σημείο
 $(k_x, k_y, k_z) \rightarrow$
μία κατάσταση

$$L^3 = V$$

- Αριθμός καταστάσεων N_0 με $k < k_0$**
Οι καταστάσεις επί 2 επειδή μπορούμε να έχουμε
2 προσανατολισμούς spin σε κάθε (k_x, k_y, k_z)

$$N_0 = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k_0^3}{3}, \quad \text{or} \quad k_0^3 = 3\pi^2 \frac{N_0}{V}$$

- Σωματίδιο σε καθορισμένη κατάσταση (n_x, n_y, n_z)**
και οποιονδήποτε προσανατολισμό spin,
έχει ενέργεια:

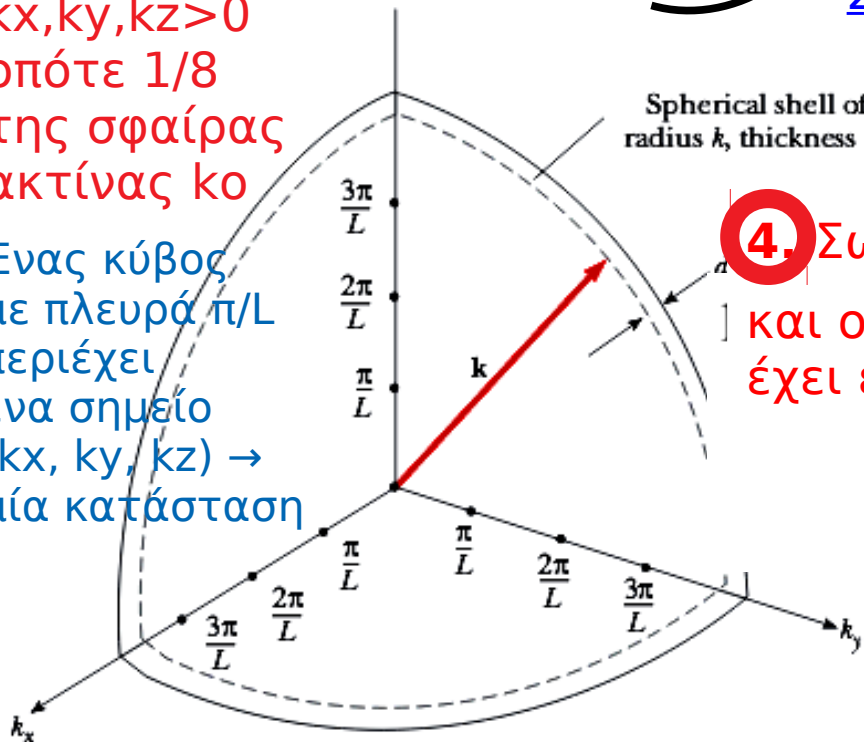
$$E = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$$

- $k_x, k_y, k_z > 0$. Για:**

$$k_0 < k < k_0 + dk_0$$

οι καταστάσεις είναι
σε όγκο: $\frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k_0^2 dk_0$

Spherical shell of
radius k , thickness dk



Αριθμός & Πυκνότητα καταστάσεων σε κουτί

- **Χώρος φάσεων:** οι άξονες είναι οι ορμές P_x , P_y , P_z ή (ισοδύναμα) οι κυματάριθμοι k_x , k_y , k_z

- 1. Αριθμός διακριτών σημείων (k_x, k_y, k_z) με $k < k_0 =$**
(όγκος στο χώρο των φάσεων) / (όγκος μίας κατάστασης)
όπου: κάθε κατάσταση (k_x, k_y, k_z) καταλαμβάνει όγκο $(\pi/L)^3$

$$= \frac{1}{8} \frac{4\pi k_0^3}{3} \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k_0^3}{3}$$

$k_x, k_y, k_z > 0$
οπότε 1/8
της σφαίρας
ακτίνας k_0

Ένας κύβος
με πλευρά π/L
περιέχει
ένα σημείο
 $(k_x, k_y, k_z) \rightarrow$
μία κατάσταση

$$L^3 = V$$

- 3. Αριθμός καταστάσεων N_0 με $k < k_0$**
Οι καταστάσεις επί 2 επειδή μπορούμε να έχουμε 2 προσανατολισμούς spin σε κάθε (k_x, k_y, k_z)

$$N_0 = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k_0^3}{3}, \quad \text{or} \quad k_0^3 = 3\pi^2 \frac{N_0}{V}$$

- 4. Σωματίδιο σε καθορισμένη κατάσταση (n_x, n_y, n_z)**
και οποιονδήποτε προσανατολισμό spin,
έχει ενέργεια:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$$

- 5. Οπότε, αριθμός καταστάσεων με $k < k_0$:**

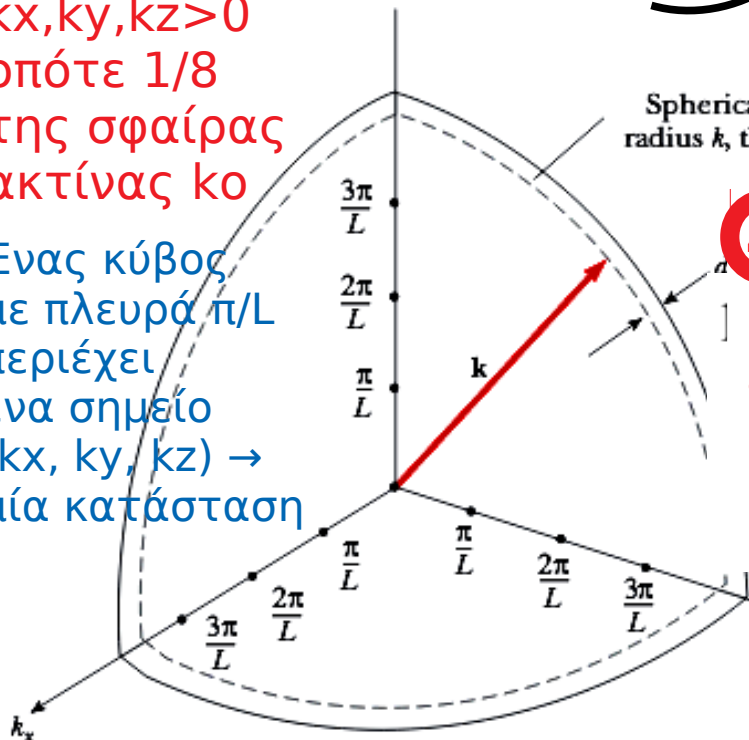
$$N(E) = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2mE}{\hbar^2} \right)^{3/2}$$

- 2. $k_x, k_y, k_z > 0$. Για:**

$$k_0 < k < k_0 + dk_0$$

οι καταστάσεις είναι
σε όγκο: $\frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k_0^2 dk_0$

Spherical shell of
radius k , thickness dk



Ενέργεια Fermi για το πηγάδι νετρονίων και πρωτονίων στον πυρήνα

Όγκος πυρήνα
που έχει ακτίνα R

$$V = 4\pi R^3/3$$

Οπότε, αριθμός N των καταστάσεων
που μπορούν να καταλάβουν τα νετρόνια
και τα πρωτόνια:

$$N \approx \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m_n E_n^F}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad Z \approx \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m_p (E_p^F - \bar{U})}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

E_n^F , E_p^F είναι οι ενέργειες Fermi για το πηγάδι των νετρονίων και των πρωτονίων
Και η κινητικές ενέργειές τους είναι E_n^F και $E_p^F - \bar{U}$ αντίστοιχα

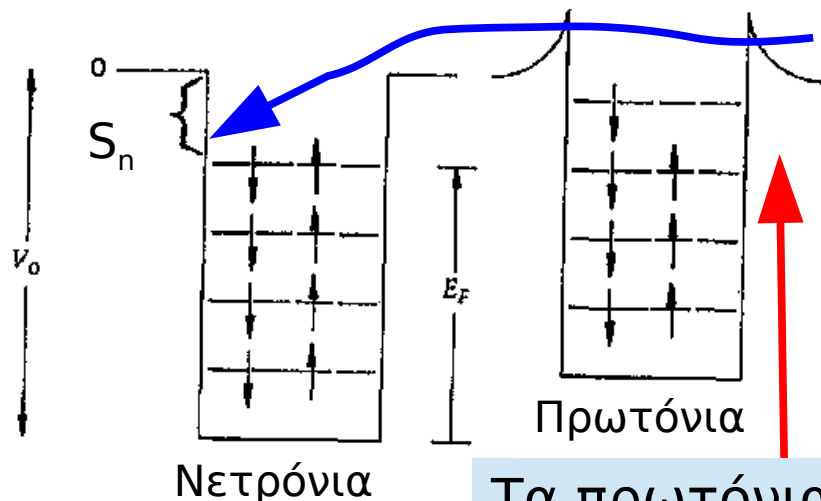
- Για $N=Z$ θα πρέπει N/V να είναι το μισό της αριθμητικής πυκνότητας της πυρηνικής ύλης (σχήμα 4.4 C&G και σελ. 21 μάθημα 6-7, δηλ: $0.17/2 = 0.085 \text{ fm}^{-3}$) → Οπότε: $E_n^F \sim 38 \text{ MeV}$

- Από την ενέργεια Fermi μέχρι $E=0$, μένει η **ενέργεια διαχωρισμού** $S_n(N,Z)$ ενός νετρονίου από έναν πυρήνα:

$$S_n(N,Z) = B(N,Z) - B(N-1,Z)$$

που είναι της τάξης της ενέργειας σύνδεσης ανά νουκλεόνιο: $\sim 8 \text{ MeV}$

- Οπότε, το βάθος δυναμικού νετρονίων είναι: $\sim 38 + 8 \text{ MeV} \sim 46 \text{ MeV}$



Τα πρωτόνια έχουν επιπλέον και το φράγμα Coulomb