

Στοιχειώδη Σωματίδια

Μάθημα 10ο
Πετρίδου Χαρά

Τμήμα Τ3: Χ. Πετρίδου

Φερμιόνια & Μποζόνια

Συμπεριφορά της
Κυματοσυνάρτησης δύο ταυτόσημων σωματίων
κάτω από την εναλλαγή τους στο χώρο

Φερμιόνια

- Σωματίδια με ημιακέραιο spin $\left(\frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar, \frac{5}{2}\hbar \dots\right)$
- Ακολουθούν στατιστική Fermi-Dirac

Μποζόνια

- Σωματίδια με ακέραιο spin $(0\hbar, 1\hbar, 2\hbar \dots)$
- Ακολουθούν στατιστική Bose-Einstein

Η κυματοσυνάρτηση **δύο ταυτόσημων φερμιονίων** κάτω από την εναλλαγή τους στο χώρο:

- Έστω κυματοσυνάρτηση δύο ταυτόσημων σωματίων : $\Psi(1,2)$
- Η πιθανότητα $|\Psi(1,2)|^2 = |\Psi(2,1)|^2$ **ΔΕΝ** μεταβάλλεται αν **εναλλάξουμε** τα δύο σωματία στο χώρο $1 \longleftrightarrow 2$
- $\Psi(1,2) = - \Psi(2,1)$: **αντισυμμετρική** αν **εναλλάξουμε** τα δύο **ταυτόσημα φερμιόνια** στο χώρο

Η κυματοσυνάρτηση **δύο ταυτόσημων μποζονίων** κάτω από την εναλλαγή τους στο χώρο:

- Έστω κυματοσυνάρτηση δύο ταυτόσημων σωματίων : $\Psi(1,2)$
- Η πιθανότητα $|\Psi(1,2)|^2 = |\Psi(2,1)|^2$ **ΔΕΝ** μεταβάλλεται αν **εναλλάξουμε** τα δύο σωματία στο χώρο $1 \longleftrightarrow 2$
- $\Psi(1,2) = + \Psi(2,1)$: **συμμετρική** αν **εναλλάξουμε** τα δύο **ταυτόσημα μποζόνια** στο χώρο

Η **ολική** κυματοσυνάρτηση ενός ή περισσότερων σωματίων είναι **γινόμενο** των **συναρτήσεων** του **χώρου** και του **σπιν** και... (ισοτοπικό σπίν)

$$\Psi = \Psi_{\alpha}(\text{χώρου}) * \Psi_{\beta}(\text{σπιν})$$

Γενικά ισχύει:

$$\Psi_{\alpha}(\text{χώρου}) = \Psi_{\alpha}(r, \theta, \varphi) = \Psi_{\alpha}(|r|) * Y^m_l(\theta, \varphi)$$

όπου $Y^m_l(\theta, \varphi)$: σφαιρικές αρμονικές

Αν έχουμε σωματΙΑ (1) & (2):

l είναι η σχετική στροφορμή των (1), (2)

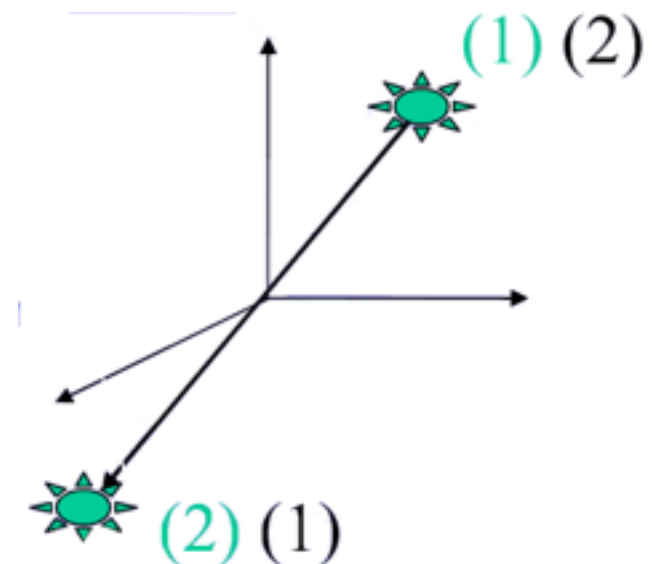
όταν $1 \leftrightarrow 2$: $\theta \rightarrow \pi - \theta$

$\varphi \rightarrow \pi + \varphi$

Η $Y^m_l(\theta, \varphi)(1,2) \rightarrow Y^m_l(\theta, \varphi)(2,1) \equiv Y^m_l(\pi - \theta, \pi + \varphi)(1,2) = (-1)^l Y^m_l(\theta, \varphi)(1,2)$ (ισοδυναμεί με αντιστροφή του χώρου)

αν l = άρτιος η $Y^m_l(\theta, \varphi)(1,2)$ συμμετρική στην εναλλαγή (1,2)

αν l = περιττός η $Y^m_l(\theta, \varphi)$ αντισυμμετρική στην εναλλαγή (1,2)



Παράδειγμα $Y^m_l(\theta, \varphi)$ για
 $l=1, m=0$
 $Y^0_1(\theta, \varphi) = \sqrt{3/4\pi} \cos\theta$
 και $l=1, m=1$
 $Y^1_1(\theta, \varphi) = \sqrt{3/8\pi} \sin\theta e^{i\varphi}$

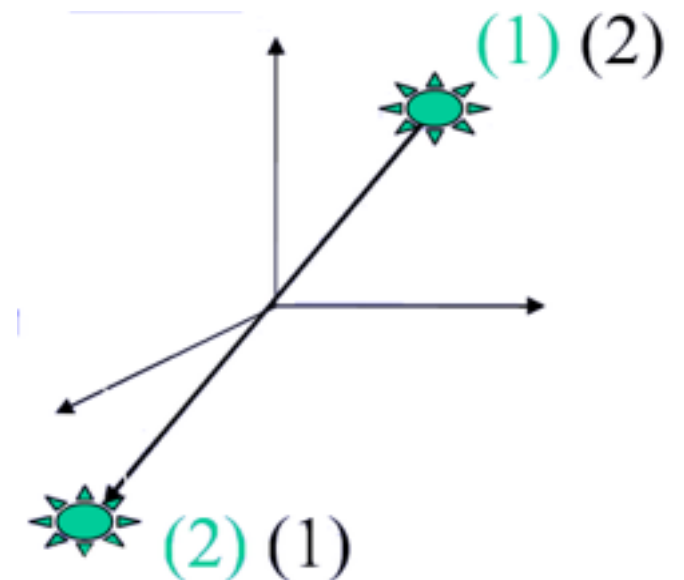
Η κυματοσυνάρτηση του **χώρου** δύο ταυτόσημων σωματίων

$$\Psi_\alpha = \Psi_\alpha(\text{χώρου})(1,2)$$

Η κυματοσυνάρτηση: $\Psi_\alpha(\text{χώρου})(1,2) = \Psi_\alpha(|r|)(1,2) * Y^m_l(\theta, \phi)(1,2)$

- Η $\Psi_\alpha(|r|)(1,2) = \Psi_\alpha(|r|)(2,1)$ (Συμμετρική)
- Η $Y^m_l(\theta, \phi)(2,1) = Y^m_l(\pi-\theta, \pi+\phi)(1,2) = (-1)^l Y^m_l(\theta, \phi)(1,2)$

ΑΡΑ: αν $l =$ **αρτιος** η Y^m_l **συμμετρική**
αν $l =$ **περιττός** η Y^m_l **αντισυμμετρική**



Η κυματοσυνάρτηση του **σπιν** δύο ταυτόσημων σωματίων

$$\Psi_{\beta} = \Psi_{\beta}(\text{σπιν})(1,2)$$

Αν σπιν ομοπαράλληλα $\uparrow\uparrow \Psi_{\beta(\text{σπιν})}(1,2) = \Psi_{\beta(\text{σπιν})}(1,2)$ **συμμετρική**

Αν σπιν αντιπαράλληλα $\uparrow\downarrow \Psi_{\beta(\text{σπιν})}(1,2) = \Psi_{\beta(\text{σπιν})}(1,2)$ **αντισυμμετρική**

$$\Psi = \Psi_{\alpha}(\text{χώρου}) * \Psi_{\beta}(\text{σπιν})$$

⇒ Για ταυτόσημα:

Μποζόνια

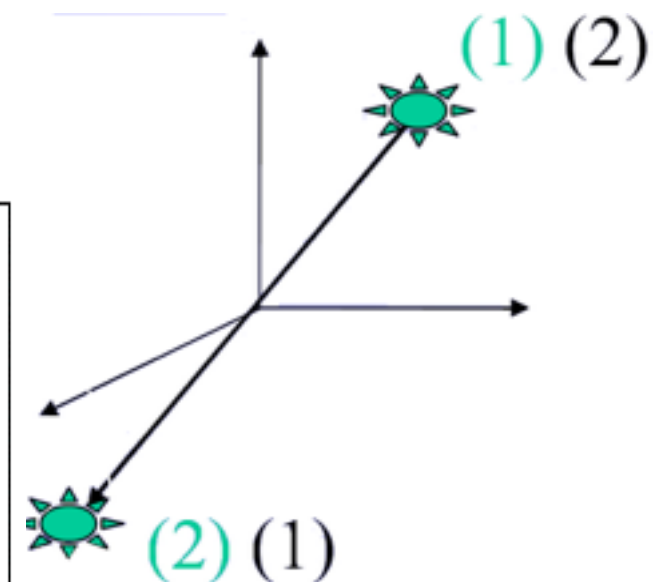
$| = \text{άρτιο} \rightarrow \text{ομοπαράλληλα}$

$| = \text{περιττό} \rightarrow \text{αντιπαράλληλα}$

Φερμιόνια

$| = \text{άρτιο} \rightarrow \text{αντιπαράλληλα}$

$| = \text{περιττό} \rightarrow \text{παράλληλα}$



Εφαρμογή της ιδιότητας της **συμμετρίας** της κυματοσυνάρτησης **δύο ταυτόσημων** **μποζονίων**

- Παράδειγμα : η διάσπαση του μεσονίου $\rho^0 \rightarrow 2\pi^0$

$$\rho^0 : \text{σπιν} = 1, l=0 \Rightarrow J=1$$

$$\pi^0 : \text{σπιν} = 0, l=0 \Rightarrow J=0 \Rightarrow \text{ταυτόσημα μποζόνια}$$

$$J \text{ διατηρείται} \Rightarrow l_{\text{σχετ}} [(\pi^0_1) + (\pi^0_2)] = 1 = J(\rho^0) = 1$$

Η $\Psi_{\beta(\text{σπιν})} (1,2)$ **συμμετρική** $\Rightarrow \Psi_{\alpha(\text{χώρου})} (1,2)$ **πρέπει να**
είναι συμμετρική $\Rightarrow l$ **αρτίο** $\Rightarrow J \neq 1 \Rightarrow$ **Μη διατήρηση της**
ολικής στροφορμής

$\Rightarrow$ Η διάσπαση $\rho^0 \rightarrow 2\pi^0$ **απαγορεύεται**

Ενώ η διάσπαση $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \rightarrow$ **μη ταυτόσημα σωμάτια**
επιτρέπεται

Η απαγορευτική αρχή του Pauli

- Στην Κβαντομηχανική οι τροχιές του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα είναι 'κβαντισμένες' Μόνον ορισμένες τροχιές (που χαρακτηρίζονται με ακέραιους κβαντικούς αριθμούς) είναι επιτρεπτές
- Σε άτομα με $Z > 2$ μόνο δύο ηλεκτρόνια υπάρχουν στην 'βαθύτερη' στιβάδα- **Γιατί?**

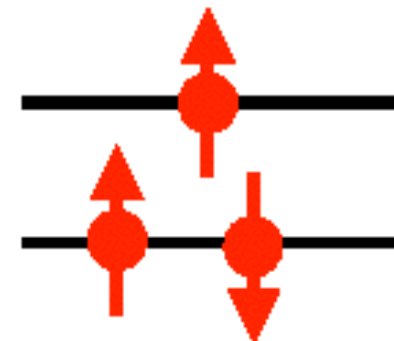
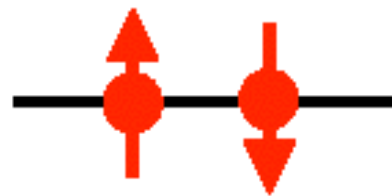
ANSWER (Pauli, 1925): two electrons (spin = $\frac{1}{2}$) can never be in the same physical state

Hydrogen ($Z = 1$)

Helium ($Z = 2$)

Lithium ($Z = 3$)

Lowest
energy
state →



Wolfgang Pauli

Η απαγορευτική αρχή του Pauli ισχύει για **όλα** τα σωματίδια με **ημιακέραιο spin: Φερμιόνια**

Σωμάτια & Αντισωμάτια
Κουάρκ & Λεπτόνια
Αδρόνια &
Διατήρηση κβαντικών αριθμών

- Η ύπαρξη των αντισωματίων προτάθηκε από τον P.A.M. Dirac (1928)
- Η εξίσωση Dirac: Σχετικιστική Κυματική εξίσωση για το ηλεκτρόνιο που συμπεριελάμβανε και το spin
- Η λύση της: κυματοσυνάρτηση με 4-συνιστώσες (Dirac field)

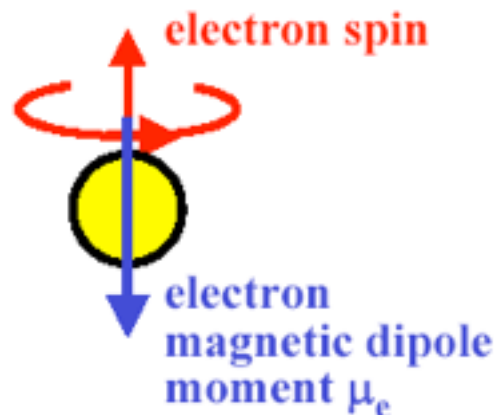


P.A.M. Dirac

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi = -i\hbar c \sum_i \alpha_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + \beta mc^2 \Psi,$$

$$(i\hbar \gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi = 0$$

- Δύο οι προβλέψεις της εξίσωσης Dirac:
 - Ύπαρξη εσωτερικής μαγνητικής διπολικής ροπής του ηλεκτρονίου με κατεύθυνση αντίθετη του spin



$$\mu_e = \frac{e\hbar}{2m_e} \approx 5.79 \times 10^{-5} [\text{eV/T}]$$

- Για κάθε λύση της εξίσωσης για ηλεκτρόνιο με $E > 0$ υπάρχει μια ακόμη λύση με $E < 0$ **Ποιά είναι η φυσική ερμηνεία των λύσεων “αρνητικής ενέργειας”?**



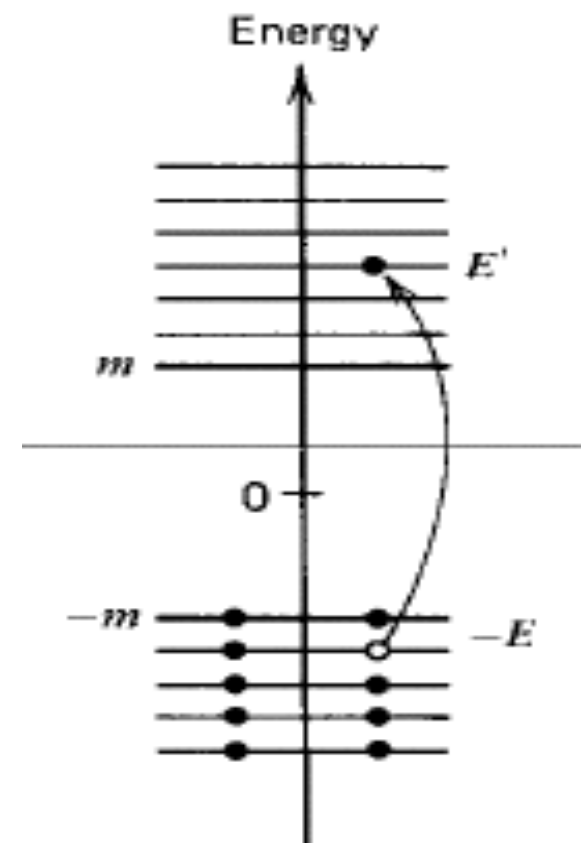
P.A.M. Dirac

Η γενικευμένη λύση της εξίσωσης Dirac: μιγαδική κυματοσυνάρτηση $\Psi(r,t)$.
Παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, για κάθε λύση “αρνητικής ενέργειας”
η συζυγής μιγαδική κυματοσυνάρτηση Ψ^* είναι η λύση “θετικής ενέργειας”
στην εξίσωση Dirac, για ένα ‘ηλεκτρόνιο’ με θετικό φορτίο

Οι υποθέσεις του Dirac :

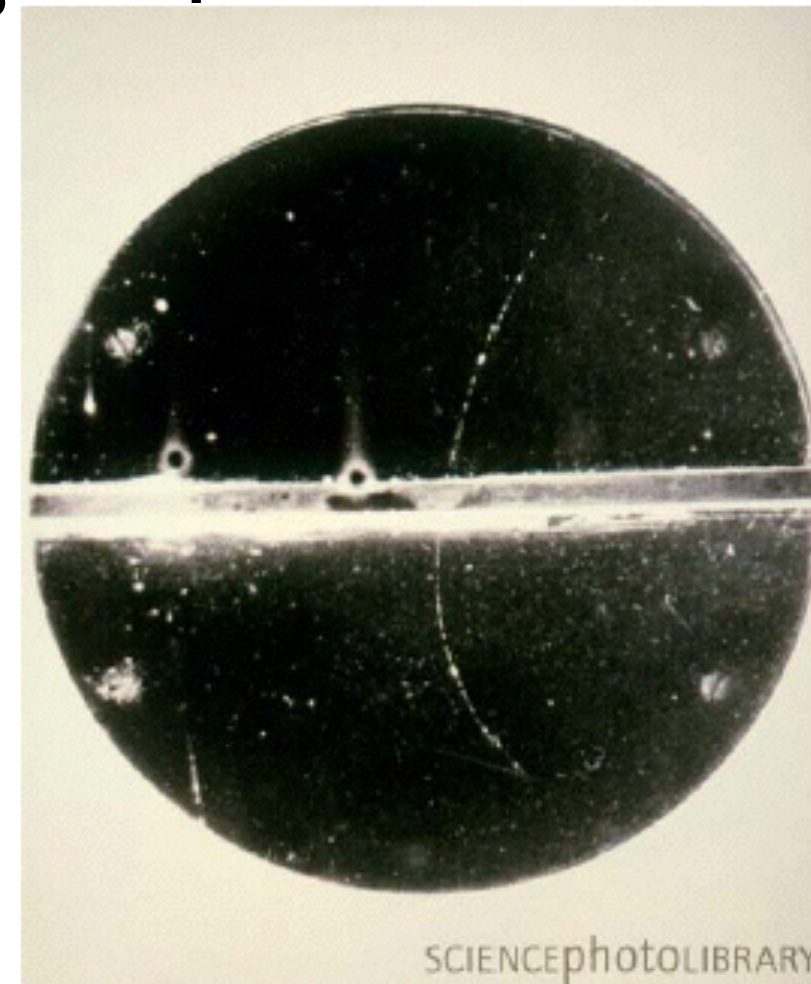
- Η μετάπτωση ηλεκτρονίου από στάθμη με θετική ενέργεια σε κατειλημμένη στάθμη αρνητικής ενέργειας απαγορεύεται από την αρχή του Pauli
- Μεταπτώσεις ηλεκτρονίων από θετική ενέργεια σε κενή αρνητική στάθμη είναι επιτρεπτές => εξαφάνιση του ηλεκτρονίου. Για να διατηρηθεί το φορτίο ένα θετικό ηλεκτρόνιο πρέπει να εξαφανιστεί => e^+e^- **εξαύλωση**
- Μεταπτώσεις ηλεκτρονίων από αρνητική ενέργεια σε κενή θετική στάθμη είναι επιτρεπτές => εμφάνιση του ηλεκτρονίου. Για να διατηρηθεί το φορτίο ένα θετικό ηλεκτρόνιο πρέπει να εμφανιστεί=> **δημιουργία ζεύγους e^+e^-**

=> κενή αρνητική ενέργεια ηλεκτρονίου περιγράφει
θετική ενέργεια ποζιτρονίου



Το τελειο κενό του Dirac είναι η περιοχή που όλες οι θετικής ενέργειας
στάθμες είναι κενές και όλες οι αρνητικής κατειλημμένες

- Οι καταστάσεις αρνητικής ενέργειας στην εξίσωση Dirac για το ηλεκτρόνιο ερμηνεύονται σαν καταστάσεις ενός **αντισωματίου** του **ποζιτρονίου**



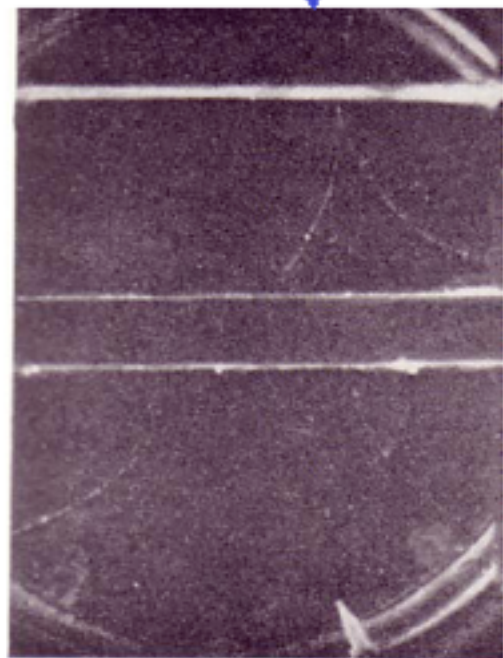
- Το **ποζιτρόνιο** παρατηρήθηκε από τον Anderson το 1932 στην κοσμική ακτινοβολία σε πείραμα με θάλαμο φυσαλίδων

Σωματία & Αντισωματία

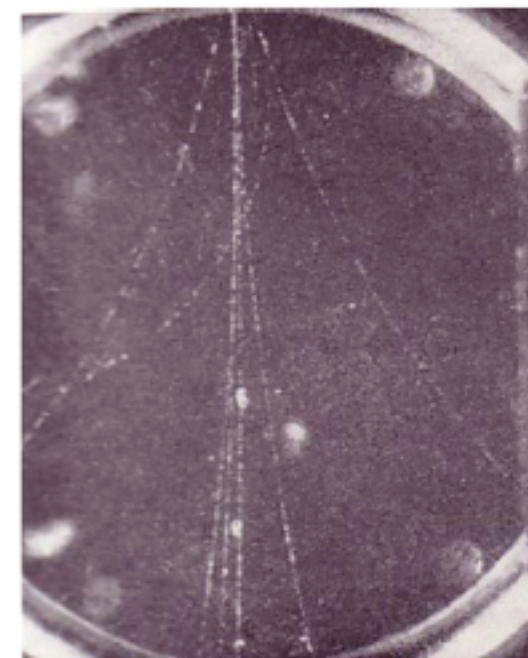
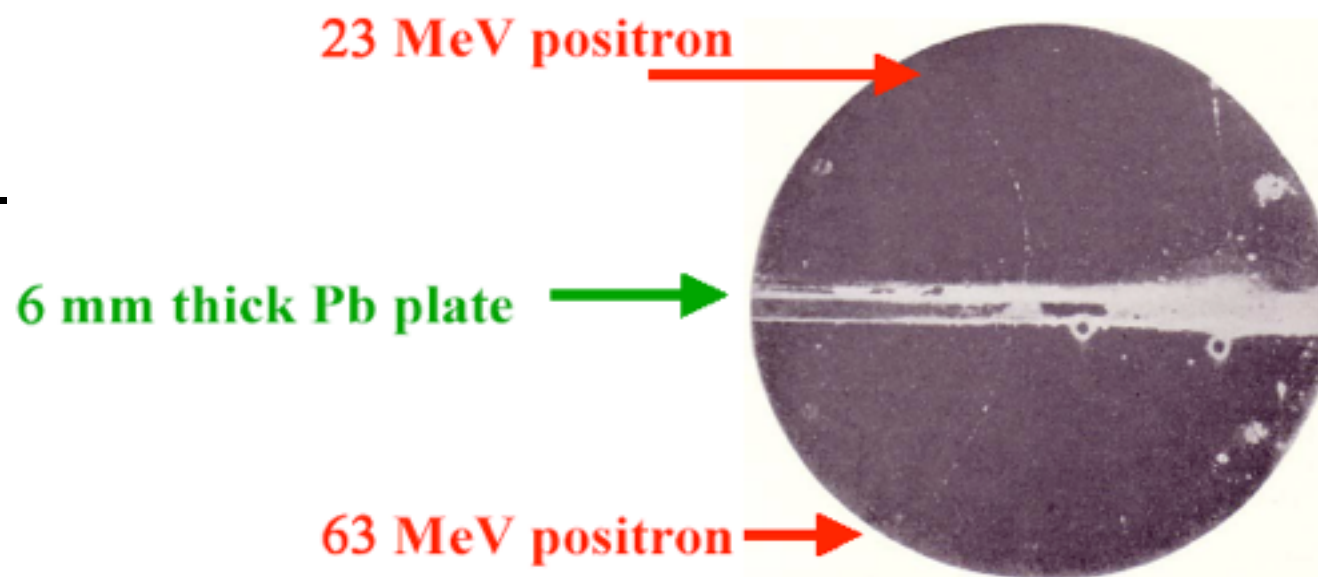
15

Πρώτη πειραματική
παρατήρηση Ποζιτρονίου-
Αντιύλης 1932

direction of
high-energy photon



Production of an
electron-positron pair
by a high-energy photon
in a Pb plate

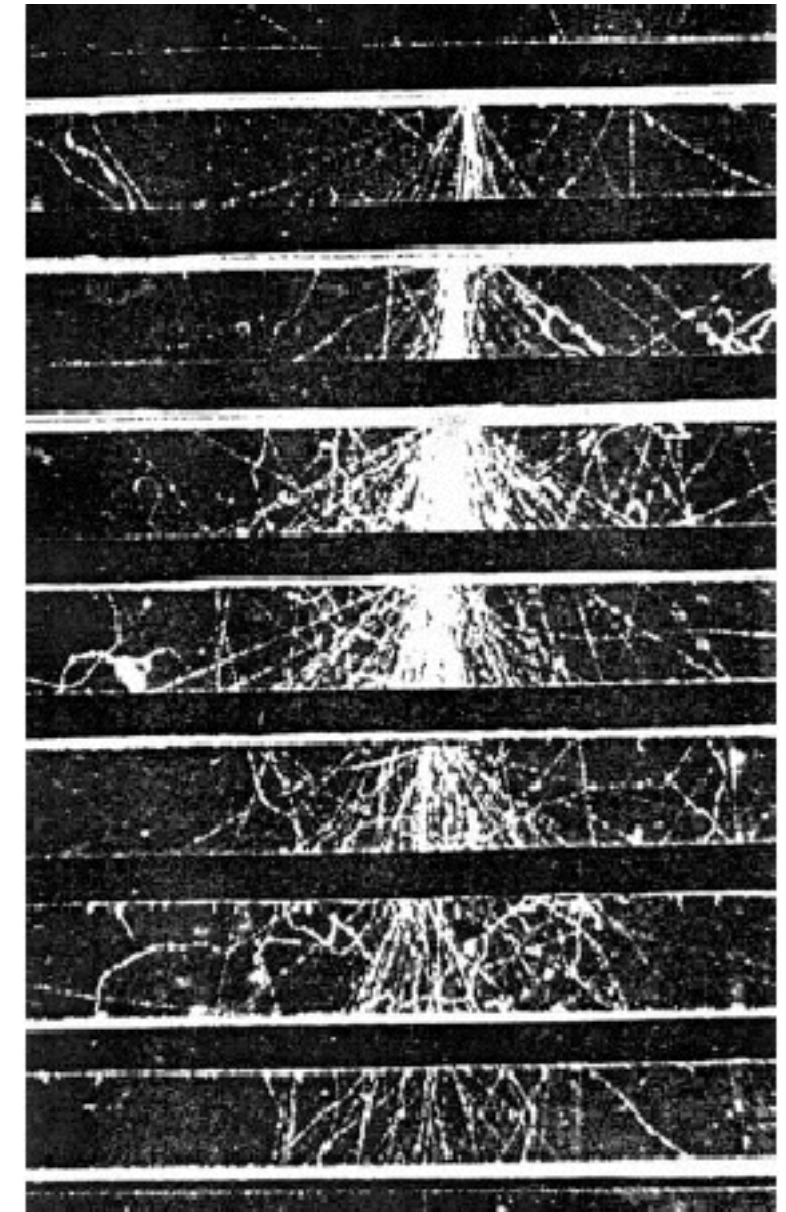


Cosmic-ray "shower"
containing several $e^+ e^-$ pairs

Πειραματική παρατήρηση Ποζιτρονίων (αντιϋλης)
στους ηλεκτρομαγνητικούς καταιγισμούς

Ηλεκτρομαγνητικοί καταιγισμοί
προερχόμενοι κυρίως από φωτόνια ή
ηλεκτρόνια/ποζιτρόνια της κοσμικής
ακτινοβολίας

- Εικόνα καταιγισμού σε
θάλαμο φουσαλίδων



$\gamma + \text{nucleus} \rightarrow e^+e^- + \text{nucleus}$ (pair production);
 $e^\pm + \text{nucleus} \rightarrow e^\pm + \gamma + \text{nucleus}$ (“bremsstrahlung”)

Γενικευμένη Ιδιότητα φερμιονίων & μποζονίων:

Σε κάθε σωματρία αντιστοιχεί ένα αντισωματρία, το οποίο έχει:

- **ίδια μάζα** με το σωματρία,
- **ίδιο σπιν** με το σωματρία,
- **αντίθετο φορτίο** και επομένως
- **αντίθετη μαγνητική ροπή**.

Φερμιόνιο	⬤	Φερμιονικός Αριθμός +1
Αντιφερμιόνιο	⬤	Φερμιονικός Αριθμός -1

Φερμιόνια και αντιφερμιόνια δημιουργούνται και καταστρέφονται σε ζεύγη

Ο Φερμιονικός Αριθμός διατηρείται!

$$\begin{array}{rcl} \gamma & \rightarrow & e^+ + e^- \\ 0 & \rightarrow & (-1) + (+1) \end{array}$$

Για τα μποζόνια δεν υπάρχει αντίστοιχος νόμος διατήρησης.