

Σοιχεία Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων 5ο εξάμηνο 2018-19

Τμήμα Τ3: Χ. Πετρίδου

Μάθημα 6

Μοντέλο σταγόνας: Ημιεμπειρικός τύπος Weizsacker
Κοιλάδα β-σταθερότητας

Πετρίδου Χαρά
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Πυρηνική & Στοιχειώδη Ι, Αριστοτέλειο Παν. Θ/νίκης, 19 Οκτωβρίου 2018

Σήμερα

- **Ημιεμπειρικός τύπος μάζας πυρήνων και κοιλάδα β-σταθερότητας**
 - Βιβλίο C&G, Κεφ. 4, παρ. 4.5-4.7.
 - Βιβλίο Χ. Ελευθεριάδη, Κεφ. 4.3 και 4.4
 - Σημειώσεις Πυρηνικής, Κεφ. 3, παρ 3.2, 3.3
- **Ενέργεια σύνδεσης πυρήνων και “Q-values” από α-διάσπαση και σχάση**
 - Υπολογισμός από ημιεμπειρικό τύπο
 - Σύγκριση με πειραματικές τιμές για α-διάσπαση
 - Βιβλίο C&G, Κεφ. 4, παρ. 4.8 & Κεφ. 6, παρ. 6.1
- **Ιστοσελίδα:** <http://www.physics.auth.gr/course/show/125>

Ορισμοί με βάση τους: A, Z, N των πυρήνων

3

- **Ατομικός αριθμός Z**: Το πλήθος των πρωτονίων του πυρήνα (χαρακτηριστικό κάθε στοιχείου του περιοδικού πίνακα)
- **Αριθμός νετρονίων N**: Το πλήθος των νετρονίων του πυρήνα
- **Μαζικός Αριθμός A**: Το άθροισμα των πρωτονίων και νετρονίων του πυρήνα
 - ▶ $A = Z + N$
 - ▶ Οι πυρήνες συμβολίζονται: ${}^A_Z\text{EI}$ (EI: το σύμβολο του στοιχείου-element, A: ο μαζικός του αριθμός, Z: ο ατομικός αριθμός του στοιχείου)
- Χαρακτηρισμός των πυρήνων με βάση τις σχέσεις τους ως προς A, N, Z
 - ▶ **Ισότοποι πυρήνες**: έχουν ίδιο αριθμό πρωτονίων (Z) και διαφορετικό αριθμό νετρονίων (N) (άρα και διαφορετικό μαζικό αριθμό A)(ίδιο στοιχείο στον περιοδικό πίνακα)
 - ▶ **Ισοβαρείς πυρήνες**: έχουν ίδιο μαζικό αριθμό (A) και διαφορετικούς Z και $N \Rightarrow A = Z_1 + N_1 = Z_2 + N_2$ (ίδιο "βάρος")
 - ▶ **Ισότονοι**: έχουν ίδιο αριθμό νετρονίων (N) και διαφορετικούς μαζικό και ατομικό αριθμούς

Ενέργεια Σύνδεσης Πυρήνων

- **Ενέργεια σύνδεσης = $B(N,Z)$**

$$M \text{ πυρήνα} = \sum m (\text{ελεύθερα νουκλεόνια}) - B(N,Z)$$

Πίνακας 4.2

στο βιβλίο σας

Table 4.2. *Energies of some light nuclei*

Nucleus	Binding energy (MeV)	Binding energy of last nucleon (MeV)	Binding energy per nucleon (MeV)	Spin and parity
${}^2_1\text{H}$	2.22	2.2	1.1	1^+
${}^3_2\text{H}$	8.48	6.3	2.8	$\frac{1}{2}^+$
${}^4_2\text{He}$	28.30	19.8	7.1	0^+
${}^5_2\text{He}$	27.34	-1.0	5.5	$\frac{3}{2}^-$
${}^6_3\text{Li}$	31.99	4.7	5.3	1^+
${}^7_3\text{Li}$	39.25	7.3	5.6	$\frac{3}{2}^-$
${}^8_4\text{Be}$	56.50	17.3	7.1	0^+
${}^9_4\text{Be}$	58.16	1.7	6.5	$\frac{3}{2}^-$
${}^{10}_5\text{B}$	64.75	6.6	6.5	3^+
${}^{11}_5\text{B}$	76.21	11.5	6.9	$\frac{3}{2}^-$
${}^{12}_6\text{C}$	92.16	16.0	7.7	0^+
${}^{13}_6\text{C}$	97.11	5.0	7.5	$\frac{1}{2}^-$
${}^{14}_7\text{N}$	104.66	7.6	7.5	1^+
${}^{15}_7\text{N}$	115.49	10.8	7.7	$\frac{1}{2}^-$
${}^{16}_8\text{O}$	127.62	12.1	8.0	0^+
${}^{17}_8\text{O}$	131.76	4.1	7.8	$\frac{5}{2}^+$

Πειραματικές τιμές

Προσπάθεια εκτίμησης των ενεργειών σύνδεσης: **μοντέλο της σταγόνας**
 → **ημιεμπειρικός τύπος μάζας του Weizsacker**

Ενέργεια Σύνδεσης: Συμπεριφορά στα Συνάρτηση του A (Μετρήσεις)

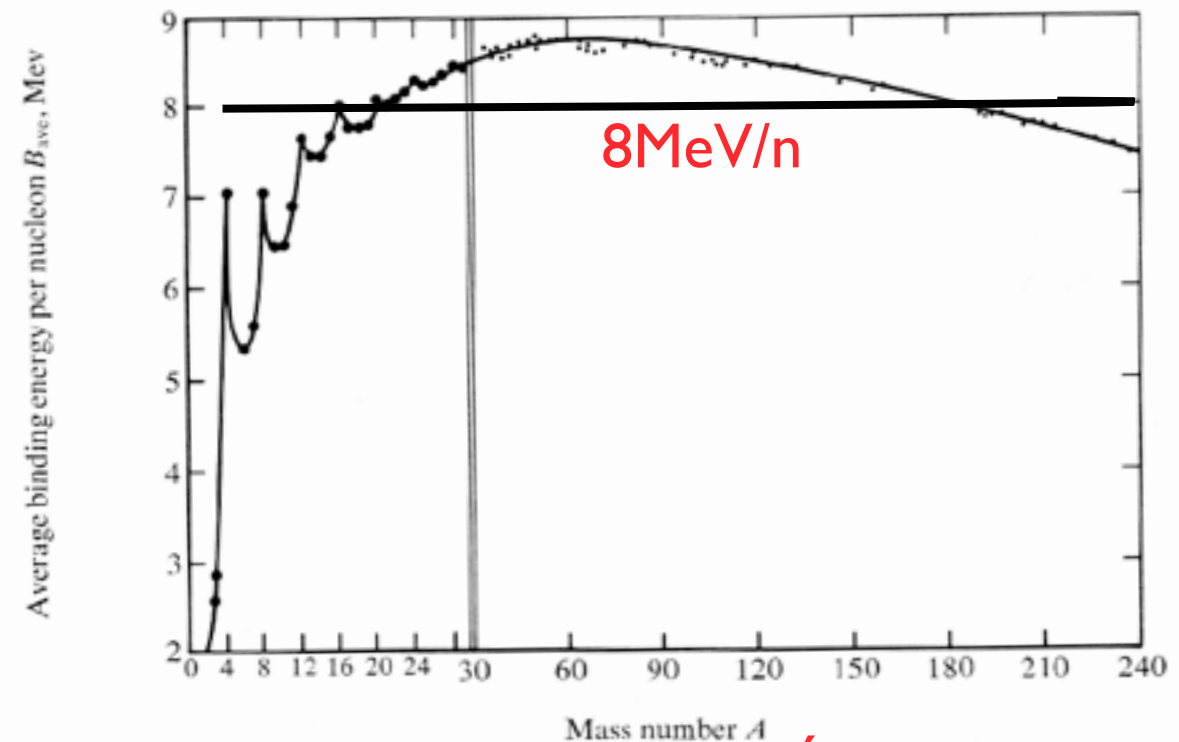
5

Χαρακτηριστικά της ενέργειας Σύνδεσης-Περιγραφή

- Η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο αυξάνει στα συνάρτηση του A μέχρι τον σίδηρο ^{56}Fe και σταθεροποιείται στα $\sim 8\text{MeV/n}$ (νουκλεόνιο) $\rightarrow$ **Προσεγγυστικά:**

- ▶ Σταθερή ανά νουκλεόνιο
- ▶ $\sim 8\text{MeV/n}$
- ▶ Η ολική ενέργεια σύνδεσης των πυρήνων είναι ανάλογη της μάζας τους

- Για τους ελαφρείς πυρήνες (A μικρό) είναι χαμηλή με εξαιρέσεις στους άρτιους-άρτιους πυρήνες: ^4_2He , ^8_4Be , $^{12}_6\text{C}$, $^{16}_8\text{O}$ -συσσωματώματα/πολλαπλάσια πυρήνων He : α -σωμ.
- Η μέγιστη ενέργεια σύνδεσης παρατηρείται για τα στοιχεία με A : 50-60 (Fe , Co , Ni ..) τα πλέον σταθερά στη φύση.



Προσοχή !

Αλλαγή κλίμακας στον άξονα x

- Για $A > 180$ παρατηρείται μικρή μείωση στην ενέργεια σύνδεσης
- Οι αυξομειώσεις στην ενέργεια σύνδεσης στα μικρά και μεγάλα A συνεπάγονται τις ραδιενεργές διασπάσεις, τη σχάση και την σύντηξη

Ημιεμπειρικός τύπος μάζας πυρήνων

- **Ενέργεια σύνδεσης πυρήνα = $B(N,Z)$**
 - **συνάρτηση και του Z και του N**
 - και τα δύο είδη νουκλεονίων (n , p) παίζουν ρόλο
 - όχι όπως στα άτομα που φτάνει μόνο το Z γιατί έχουμε να κάνουμε μόνο με ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις

Ενέργεια Σύνδεσης: Συνάρτηση του A Ημιαμπειρικός τύπος

7

Περιγραφή της ενέργειας Σύνδεσης - “Ημιαμπειρικός τύπος μάζας” Weizsacker

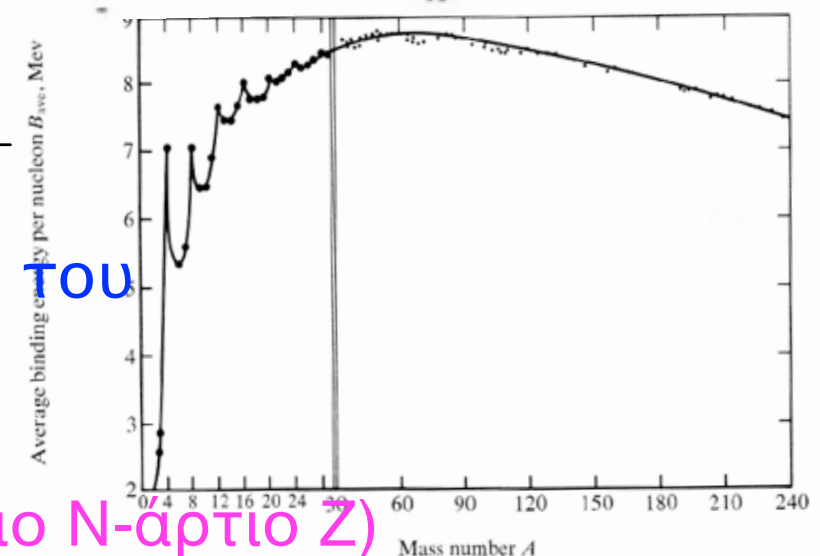
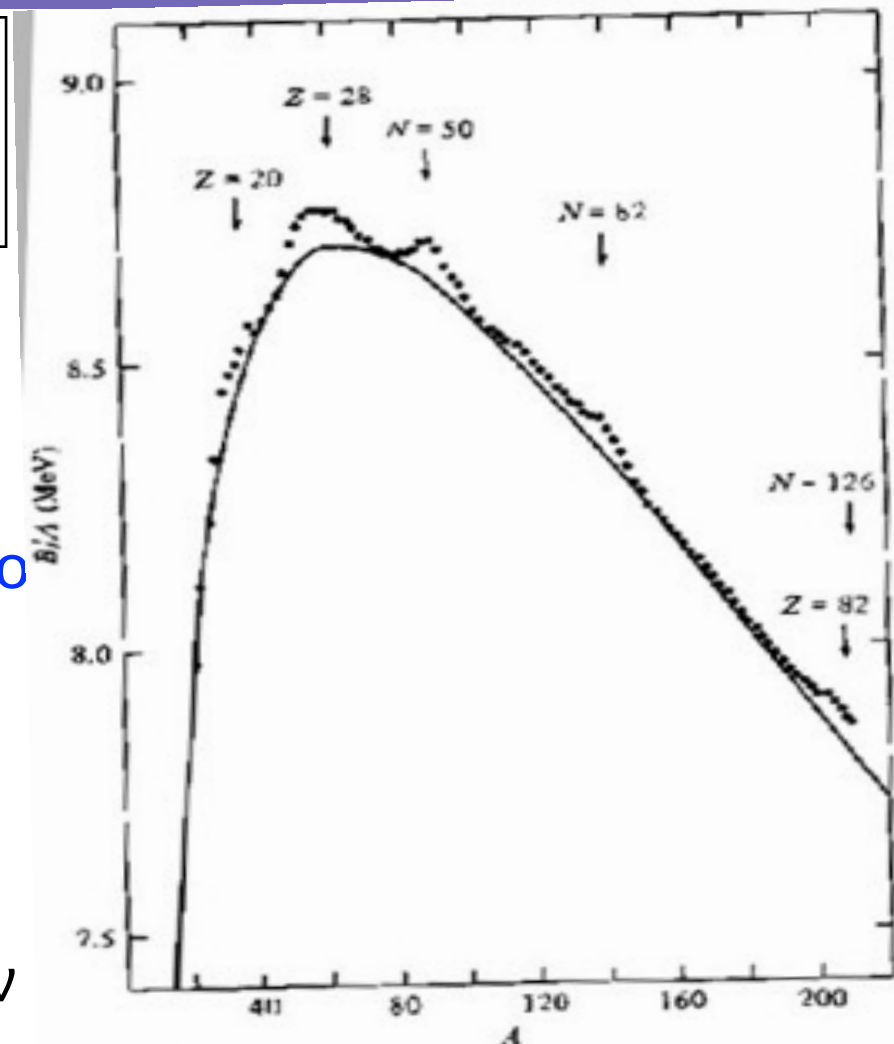
- Έχουμε δει ότι η πυκνότητα της πυρηνικής ύλης είναι προσεγγυστικά σταθερή
 - ▶ Οι πυρήνες παρουσιάζουν ένα καλά καθορισμένο εξωτερικό φλοιό → Ο πυρήνας συμπεριφέρεται σα μία σταγόνα υγρού!
- Η αναλογία αυτή χρησιμοποιείται στον “ημιαμπειρικό τύπο μάζας”
- Φαινομενολογική περιγραφή των δεδομένων με ακρίβεια ~1%

$$B(N, Z) = aA - bA^{2/3} - s \frac{(N - Z)^2}{A} - d \frac{Z^2}{A^{1/3}} - \frac{\delta}{A^{1/2}}$$

Οι παράμετροι a, b, s, d, δ υπολογίζονται με προσαρμογή του τύπου στις μετρημένες ενέργειες σύνδεσης

$a=15.8\text{MeV}$ $b=18.33\text{MeV}$, $s=23.20\text{MeV}$, $d=0.71\text{MeV}$,

$\delta=+11.2$ (περιττόN-περιττόZ) 0 (άρτιοZ/N-περιττόN/Z) -11.2 (άρτιο N-άρτιο Z)



Ενέργεια σύνδεσης - ημιεμπειρικός τύπος

$$B(Z,N) =$$

$$\begin{aligned} & a A && (\text{όγκου}) \\ & - b A^{2/3} && (\text{επιφάνειας}) \\ & - s (N-Z)^2 / A && (\text{ασυμμετρίας}) \\ & - d Z^2 / A^{1/3} && (\text{Coulomb}) \\ & - \delta / A^{1/2} && (\text{ζευγαρώματος}) \end{aligned}$$

$$a=15.835 \text{ MeV} , \quad b=18.33 \text{ MeV}$$

$$s=23.20 \text{ MeV} , \quad d=0.714 \text{ MeV}$$

$$\delta = \begin{cases} +11.2 \text{ MeV} & \text{περιτοί-περιτοί (Z περιττό και N περιττό)} \\ 0 & \text{περιτοί-άρτιοι (π.χ: Z άρτιο και N περιττό)} \\ -11.2 \text{ MeV} & \text{άρτιοι-άρτιοι (Z άρτιο και N άρτιο)} \end{cases}$$

Ενέργεια σύνδεσης - ημιεμπειρικός τύπος

$$B(Z,N) =$$

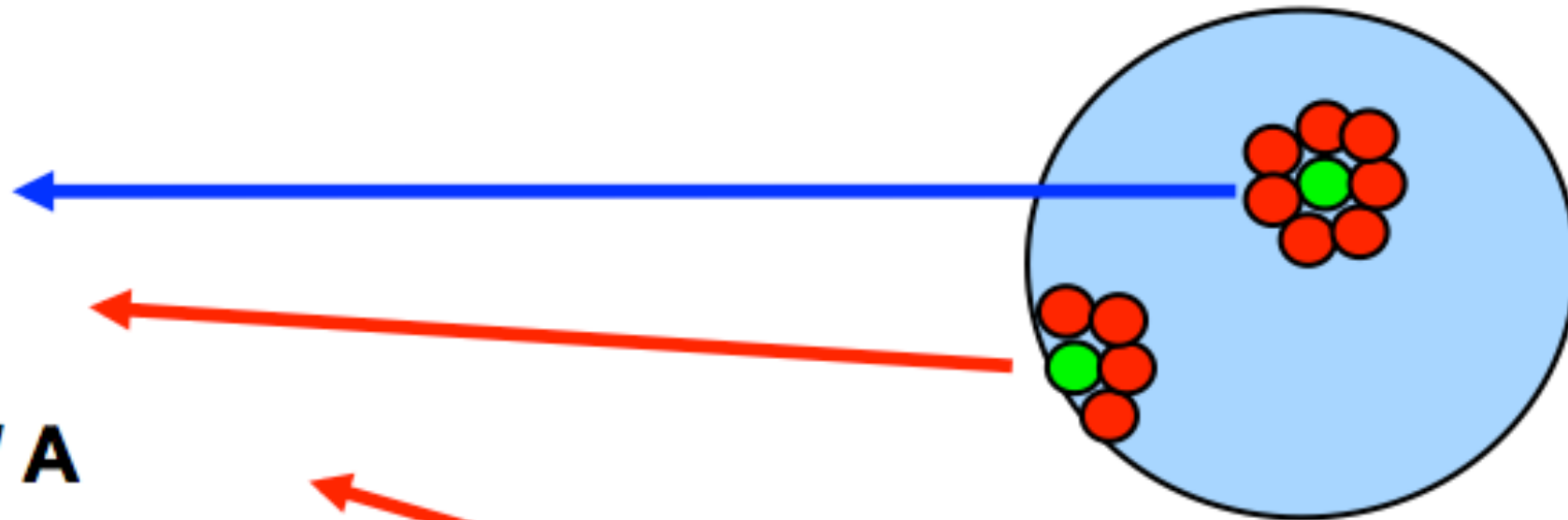
$$a A$$

$$- b A^{2/3}$$

$$- s (N-Z)^2 / A$$

$$- d Z^2 / A^{1/3}$$

$$- \delta / A^{1/2}$$



Ευνοούνται τα ζεύγη p-n
(μεγαλύτερη ενέργεια σύνδεσης
όταν $Z=N$)

Η άπωση Coulomb μεταξύ των
πρωτονίων έχει διαλυτικές τάσεις

$$a=15.835 \text{ MeV} , \quad b=18.33 \text{ MeV}$$

$$s=23.20 \text{ MeV} , \quad d=0.714 \text{ MeV}$$

$$\delta = \begin{cases} +1.2 \text{ MeV} & \text{περιτοί-περιτοί (Z περιττό και N περιττό)} \\ 0 & \text{περιτοί-άρτιοι (π.χ: Z άρτιο και N περιττό)} \\ -1.2 \text{ MeV} & \text{άρτιοι-άρτιοι (Z άρτιο και N άρτιο)} \end{cases}$$

Ενέργεια Σύνδεσης: Οι όροι στον Ημιεμπειρικό τύπο - Ερμηνεία (I)

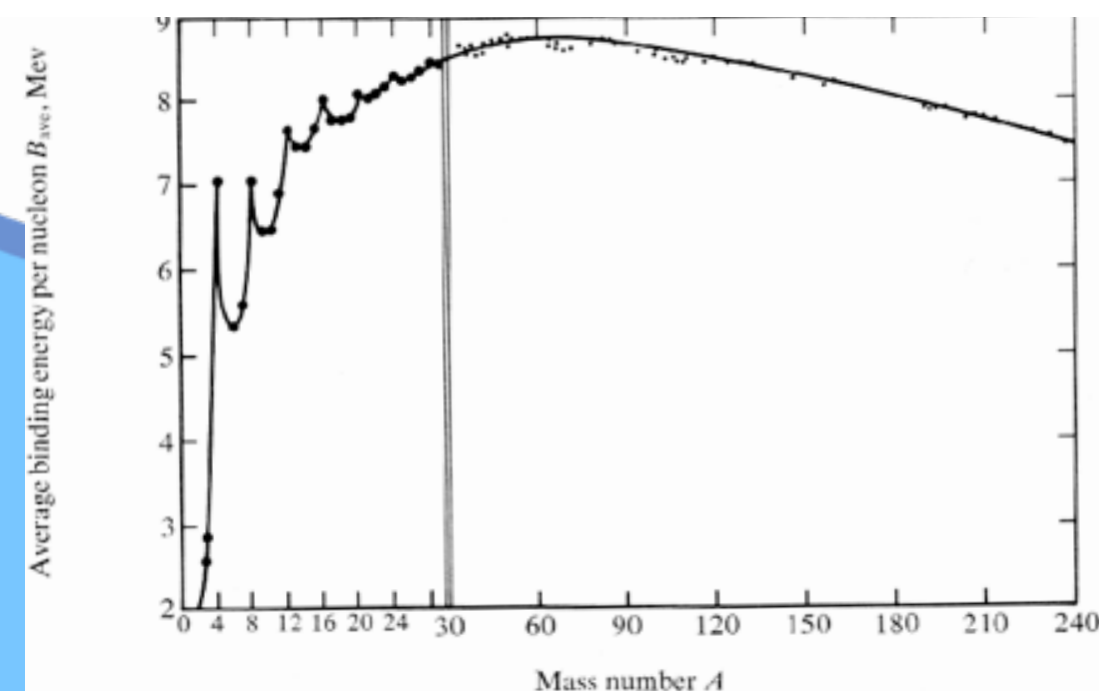
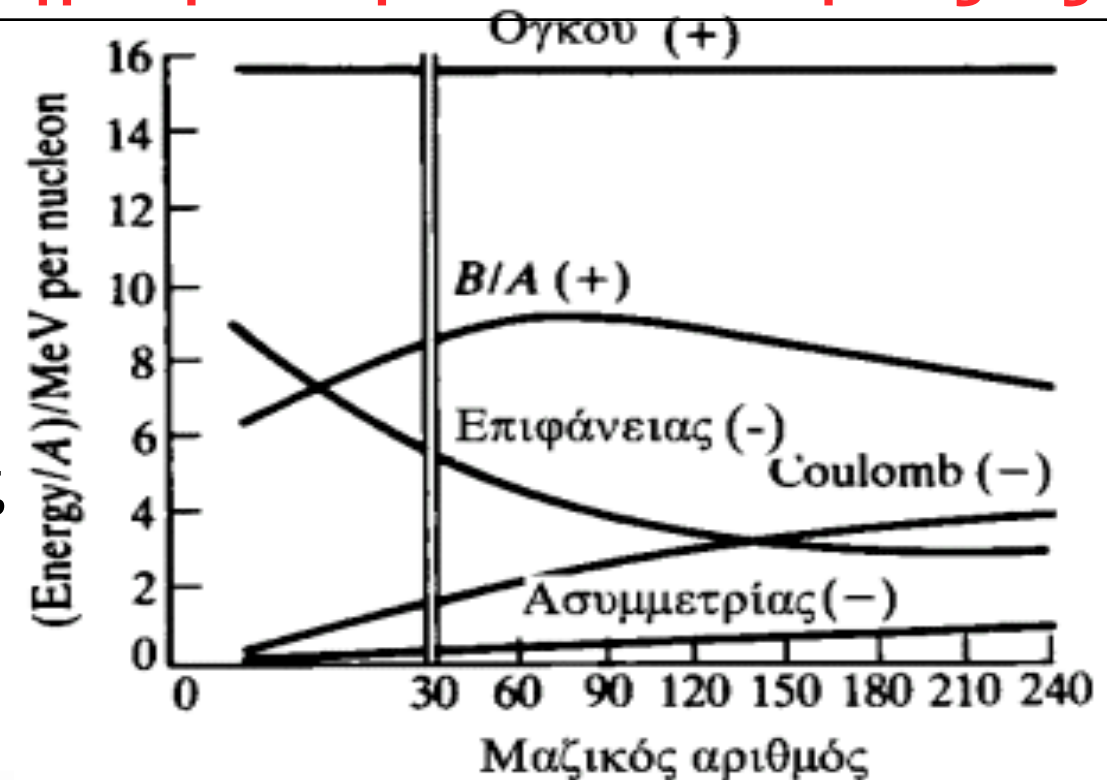
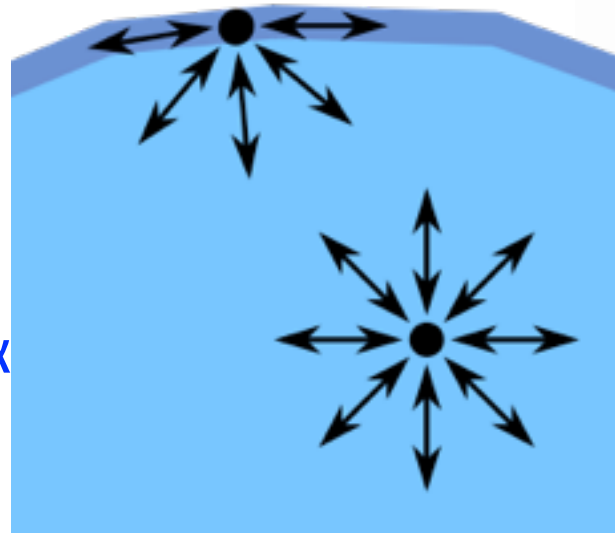
10

Οι όροι όγκου και επιφάνειας στον “ημιεμπειρικό τύπο μάζας”

- Ο όρος όγκου aA : αντιστοιχεί στη σταθερή ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο (ενέργεια όγκου στα υγρά)
- ο όρος επιφάνειας $bA^{2/3}$: αντιστοιχεί στην επιφανειακή ενέργεια μιας σφαίρας (για σταθερή πυκν. νουκλεονίων (n) $\Rightarrow$ ανάλογη της επιφάνειας $A^{2/3} \Leftrightarrow R^2$)

- ▶ ο όρος επιφάνειας αφαιρείται από την ενέργεια όγκου (όπως και στα υγρά -τα σωμάτια στη επιφάνεια δεν περιβάλλονται πλήρως από ελκτικό περιβάλλον, όπως τα σωμάτια στο εσωτερικό)

- ▶ στα υγρά ο όρος αυτός αντιστοιχεί στην επιφανειακή τάση-οι σταγόνες είναι σχεδόν σφαιρικές αν η βαρύτητα θεωρηθεί αμελητέα; οι πυρήνες τείνουν να είναι σφαιρικοί



Ενέργεια Σύνδεσης: Οι όροι στον Ημιεμπειρικό τύπο μάζας - Ερμηνεία (II)

II

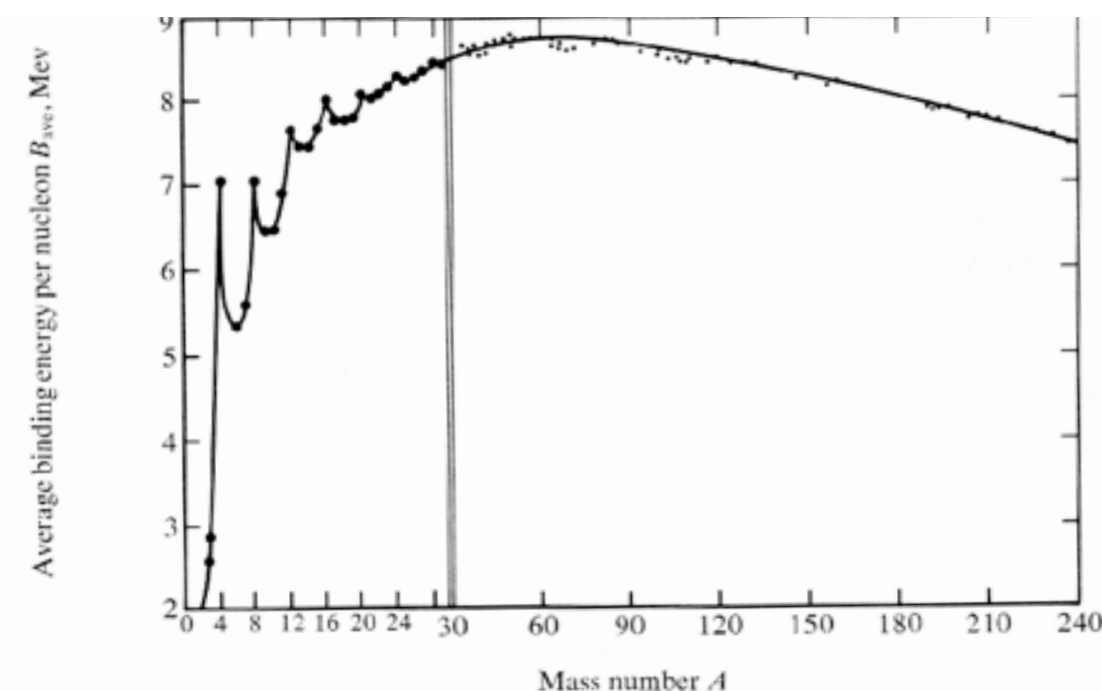
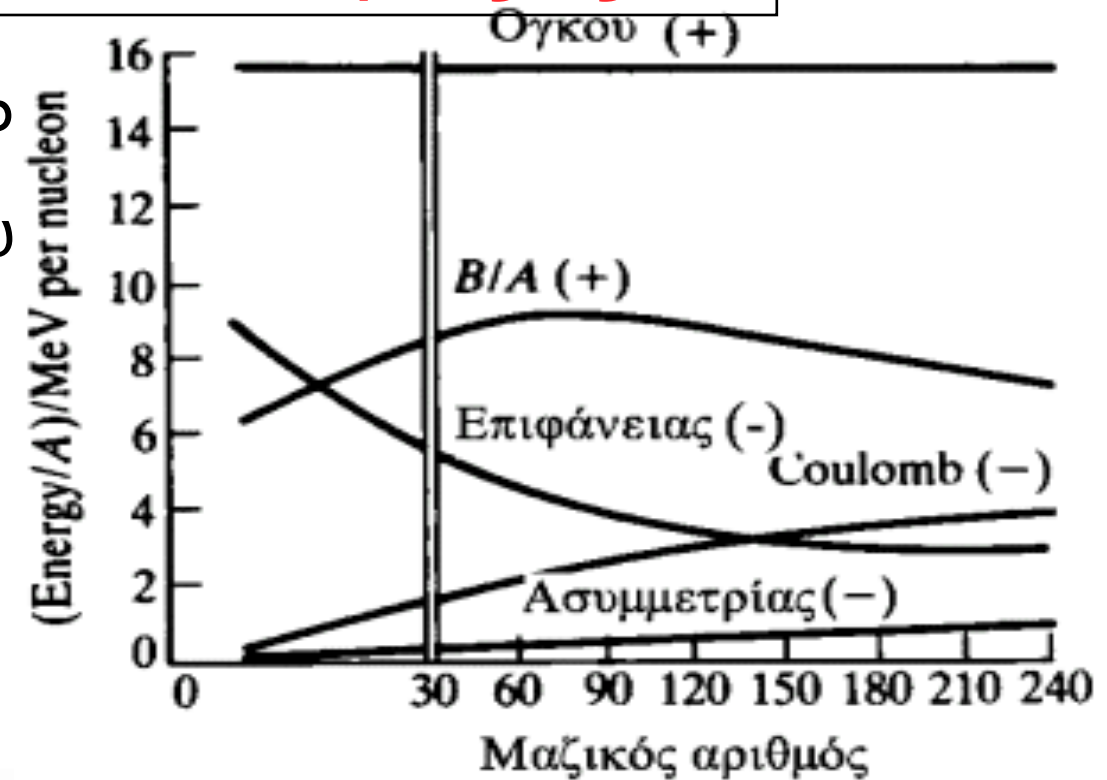
Ο όρος Coulomb στον “ημιεμπειρικό τύπο μάζας”

- Ο όρος $d Z^2/A^{1/3}$: λέγεται και όρος Coulomb και αντιστοιχεί στην ηλεκτροστατική ενέργεια της κατανομής του φορτίου του πυρήνα

- ▶ αν ο πυρήνας ήταν μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα ακτίνας $R=R_0A^{1/3}$ και φορτίου Ze θα είχε ενέργεια:

$$E = \int_0^R \frac{3(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{r^5}{R^6} dr = (3/5) \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

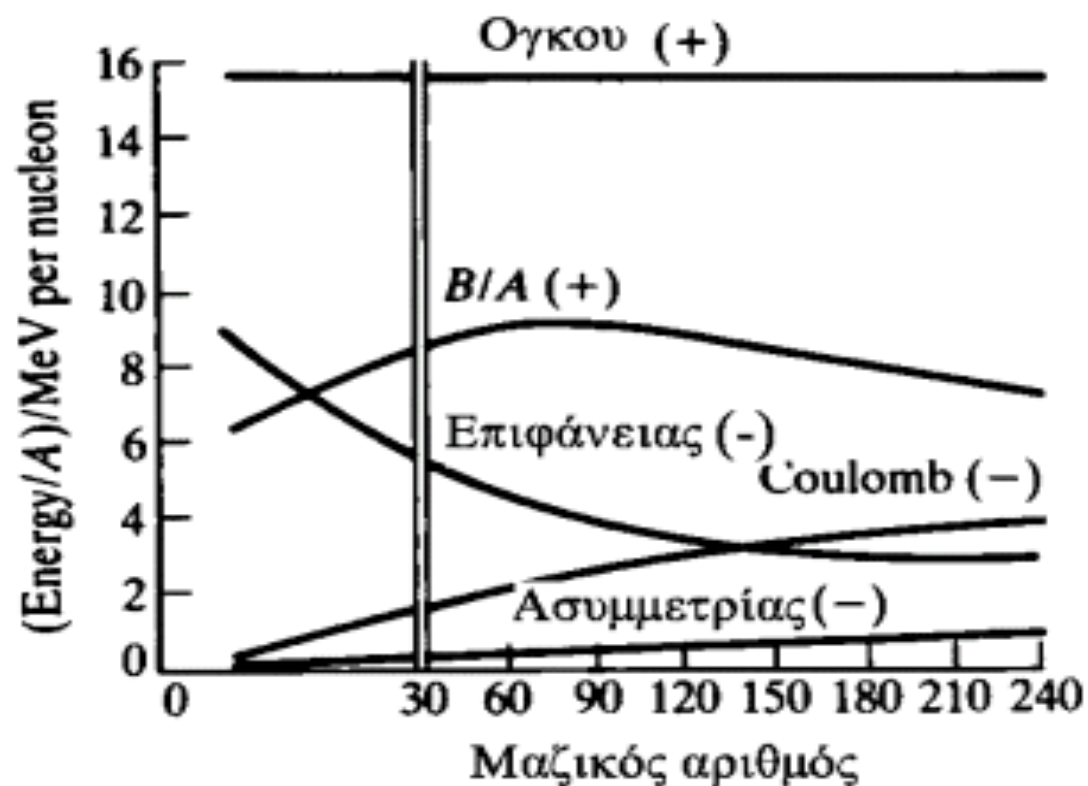
- ▶ ο όρος Coulomb τείνει να μειώσει την ολική ενέργεια σύνδεσης και άρα επίσης αφαιρείται; η συμβολή του αυξάνει όσο αυξάνει το Z και άρα και το A



Ενέργεια Σύνδεσης: Οι όροι στον Ημιεμπειρικό τύπο μάζας - Ερμηνεία (II)

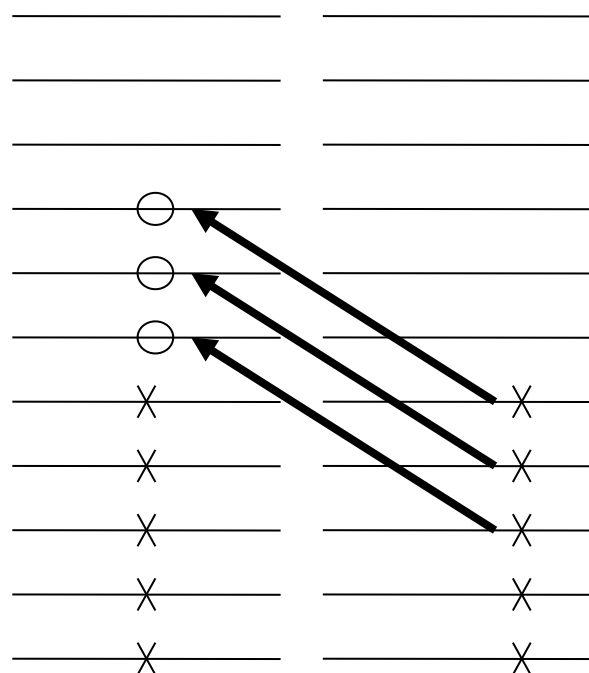
12

Ο όρος Ασυμμετρίας στον “ημιεμπειρικό τύπο μάζας”



- Ο όρος $s(N-Z)^2/A$: λέγεται και όρος Ασυμμετρίας. Για πυρήνες “συμμετρικούς” ($Z=N$) και δεδομένο A : η ενέργεια σύνδεσης μεγιστοποιείται.

► Οι δυνάμεις στον πυρήνα που συγκρατούν πρωτόνια και νετρόνια είναι ίδιες για pp , nn και np (αν εξαιρέσουμε τις απωστικές δυνάμεις Coulomb μεταξύ pp και την ελάχιστη διαφορά μάζας μεταξύ n και p) και **αν τα np , nn , pp βρίσκονται στην ίδια κβαντική κατάσταση!**



Σχηματικά

- Οι σταθμες των πρωτονίων και νετρονίων έχουν την ίδια ενεργειακή απόσταση Δ .
- Αν $3p$ μετατραπούν σε $3n$ η επιπλέον ενέργεια που απαιτείται είναι: $3 \times 3 \Delta$
- Για $Z-N$ επιπλέον p η ενέργεια είναι $((Z-N)/2)^2 \Delta$ σε σχέση με την $Z=N$ κατάσταση

- έλξη μεταξύ πρωτονίου-νετρονίου είναι μεγαλύτερη (απόρροια της απαγορευτικής αρχής του Pauli):

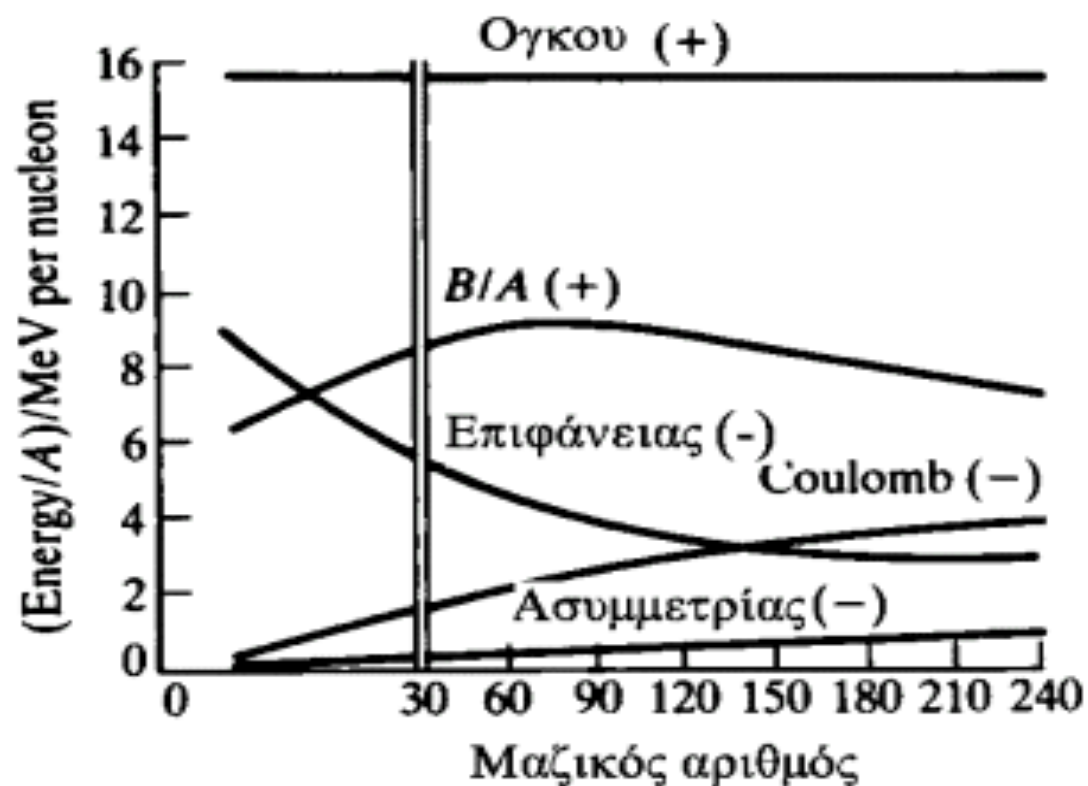
- Πρωτόνια και νετρόνια είναι φερμιόνια με $spin \ 1/2$

- Για δεδομένο A ευνοείται ενεργειακά η μεγιστοποίηση των ζευγών νετρονίου-πρωτονίου - np -που μπορούν να αλληλεπιδράσουν

Ενέργεια Σύνδεσης: Οι όροι στον Ημιεμπειρικό τύπο μάζας - Ερμηνεία (II)

13

Ο όρος Ασυμμετρίας στον “ημιεμπειρικό τύπο μάζας”



- Ο όρος $c(N-Z)^2/A$: λέγεται και όρος Ασυμμετρίας. Για πυρήνες “συμμετρικούς” ($Z=N$) και δεδομένο A : η ενέργεια σύνδεσης μεγιστοποιείται.

► Οι δυνάμεις στον πυρήνα που συγκρατούν πρωτόνια και νετρόνια είναι ίδιες για pp , nn και np (αν εξαιρέσουμε τις απωστικές δυνάμεις Coulomb μεταξύ pp και την ελάχιστη διαφορά μάζας μεταξύ n και p) και **αν τα np , nn , pp βρίσκονται στην ίδια κβαντική κατάσταση!**

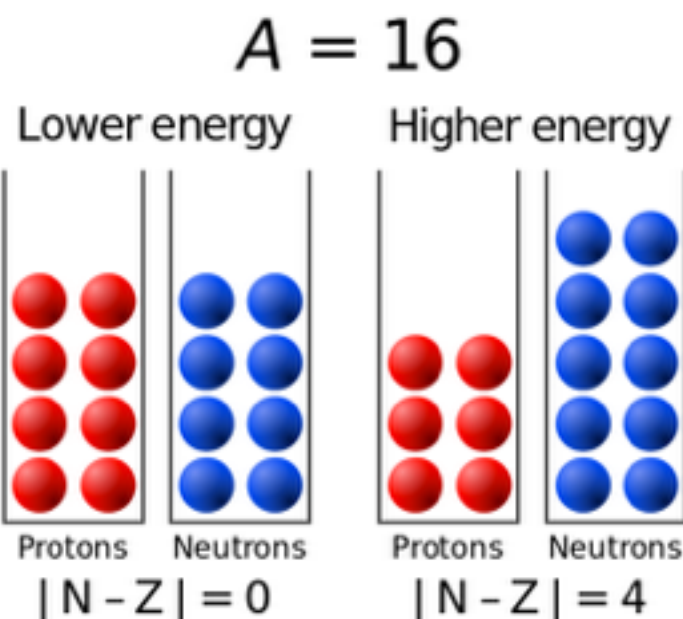
- έλξη μεταξύ πρωτονίου-νετρονίου είναι μεγαλύτερη (απόρροια της απαγορευτικής αρχής του Pauli):

- Πρωτόνια και νετρόνια είναι φερμιόνια με $spin\ 1/2$

- Για δεδομένο A ευνοείται ενεργειακά η μεγιστοποίηση των ζευγών νετρονίου-πρωτονίου - np -που μπορούν να αλληλεπιδράσουν

Σχηματικά

- Οι σταθμες των πρωτονίων και νετρονίων έχουν την ίδια ενεργειακή απόσταση Δ .
- Αν $3p$ μετατραπούν σε $3n$ η επιπλέον ενέργεια που απαιτείται είναι: $3 \times 3 \Delta$
- Για $Z-N$ επιπλέον p η ενέργεια είναι $((Z-N)/2)^2 \Delta$ σε σχέση με την $Z=N$ κατάσταση

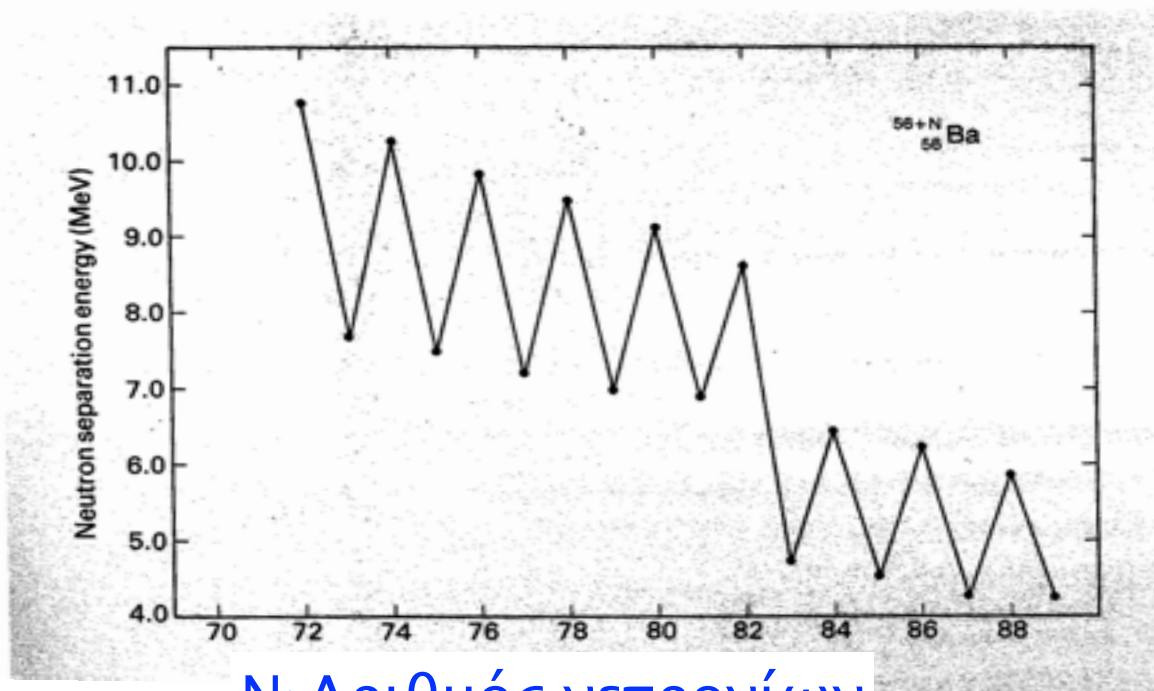


Ενέργεια Σύνδεσης: Οι όροι στον Ημιεμπειρικό τύπο μάζας - Ερμηνεία (III)

14

Ο όρος Ζευγαρώματος στον “ημιεμπειρικό τύπο μάζας”

Ενέργεια Διαχωρισμού των νετρονίων στο Ba



N: Αριθμός νετρονίων

	-δ
α-α	+ θετικό
α-π	0
π-π	- αρνητικό

- Ο όρος $-\delta/A^{1/2}$: λέγεται και όρος Ζευγαρώματος. (Προσοχή στο αρνητικό πρόσημο!)
- Πυρήνες με άρτιο αριθμό νετρονίων ή πρωτονίων είναι πιο ισχυρά συνδεδεμένοι (σχήμα)
 - ▶ Η συναρτησιακή αυτή σχέση του A περιγράφει τα δεδομένα φαινομενολογικά. Η εξάρτηση $A^{1/2}$ είναι εμπειρική
- Η συμβολή του είναι ελάχιστη στην ενέργεια σύνδεσης
- είναι 0 για πυρήνες με A περιττό (Ζάρτιο-Nπεριττό ή αντίστροφα)
- είναι θετική για πυρήνες με Z και N άρτιους
- είναι αρνητική για πυρήνες με Z και N περιττούς
- Μονο 4 σταθεροί περιττοί-περιττοί πυρήνες και 155 άρτιοι-άρτιοι !

- Ο “Ημιεμπειρικός Τύπος της Μάζας” : μας βοηθά να :

- ▶ περιγράψουμε και να κατανοήσουμε τις ενέργειες σύνδεσης των πυρήνων
- ▶ να κατανοήσουμε τις μάζες των διαφόρων χημικών στοιχείων και
- ▶ να εξηγήσουμε την ύπαρξη του περιορισμένου αριθμού σταθερών ατόμων/πυρήνων στη φύση

Οι τιμές των παραμέτρων από fit σε MeV

a	15.56
b	17.23
s	23.285
d	0.697
δ	+12 (π-π)
δ	0 (π-α)
δ	-12 (α-α)

- Η προσαρμογή στα δεδομένα καλή (~1%) Οι κύριοι όροι του:

$$B(N, Z) = aA - bA^{2/3} - s \frac{(N - Z)^2}{A} - d \frac{Z^2}{A^{1/3}} - \frac{\delta}{A^{1/2}}$$

- Εξηγεί την κοιλάδα σταθερότητας των πυρήνων (επόμενο)
- Εξηγεί τις ενέργειες στις ραδιενεργές διασπάσεις, τη σχάση και τη σύντηξη



Ενέργεια σύνδεσης - ημιεμπειρικός τύπος

Υπολογισμός από ημιεμπειρικό τύπο:

- $B(^4_2\text{He}) = B(Z=2, N=2) = 20.95 \text{ MeV}$
- $B(^8_4\text{Be}) = B(Z=4, N=4) = 51.6 \text{ MeV}$
- $B(^{12}_6\text{O}) = B(Z=6, N=6) = 121.64 \text{ MeV}$

Πειραματική τιμή (πίνακας 4.2)

(28.30 MeV)

(56.5 MeV)

(127.62 MeV)

Υπολογισμός από ημιεμπειρικό τύπο

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η περιγραφή είναι γενικά καλή αλλά όχι τέλεια!

Δεν φτάνει μόνο ο ημιεμπειρικός τύπος.

Ο πυρήνας δέν είναι μια υγρή σταγόνα. Υπάρχουν κι άλλα πράγματα που πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν μας (“φλοιώδη” δομή των πυρήνων). Όχι μόνο απλά τον αριθμό πρωτονίων και νετρονίων.

Ενέργεια σύνδεσης ανά νουλεόνιο: B/A

$$B(Z,N) / A =$$

a

$$- b / A^{1/3}$$

$$- s (N-Z)^2 / A^2$$

$$- d Z^2 / A^{4/3}$$

$$+ \delta / A^{3/2}$$

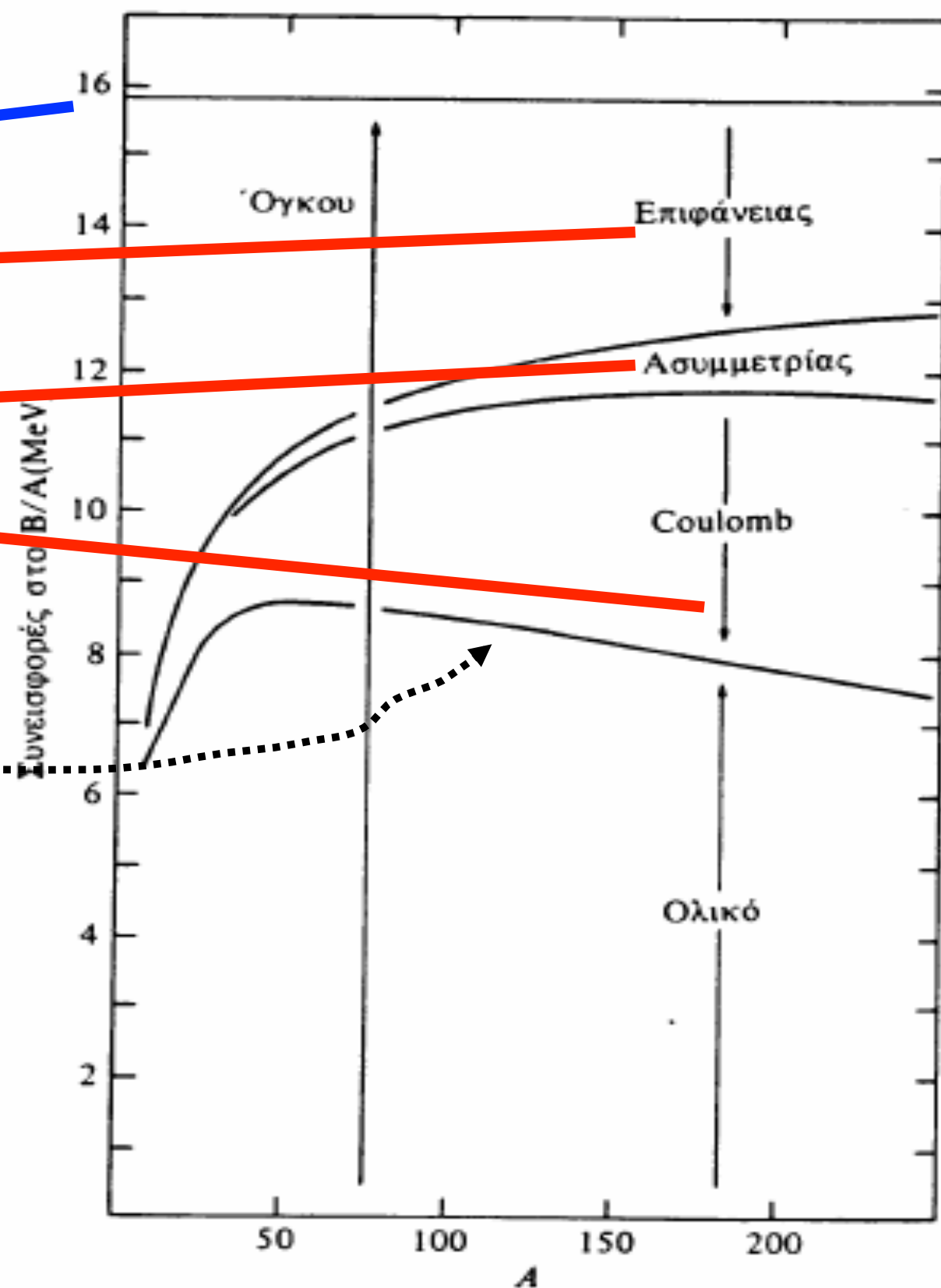
$$a = 15.835 \text{ MeV} , \quad b = 18.33 \text{ MeV}$$

$$s = 23.20 \text{ MeV} , \quad d = 0.714 \text{ MeV}$$

$$+ 11.2 \text{ MeV} \text{ περιτοί-περιτοί}$$

$$\delta = 0 \text{ περιτοί-άρτιοι}$$

$$- 11.2 \text{ MeV} \text{ άρτιοι-άρτιοι}$$



Ενέργεια σύνδεσης ανά νουλεόνιο: B/A

$$B(Z,N) / A =$$

a

$$- b / A^{1/3}$$

$$- s (N-Z)^2 / A^2$$

$$- d Z^2 / A^{4/3}$$

$$- \delta / A^{3/2}$$

$$a=15.835 \text{ MeV} , \quad b=18.33 \text{ MeV}$$

$$s=23.20 \text{ MeV} , \quad d=0.714 \text{ MeV}$$

$$+11.2 \text{ MeV} \text{ περιτοί-περιτοί}$$

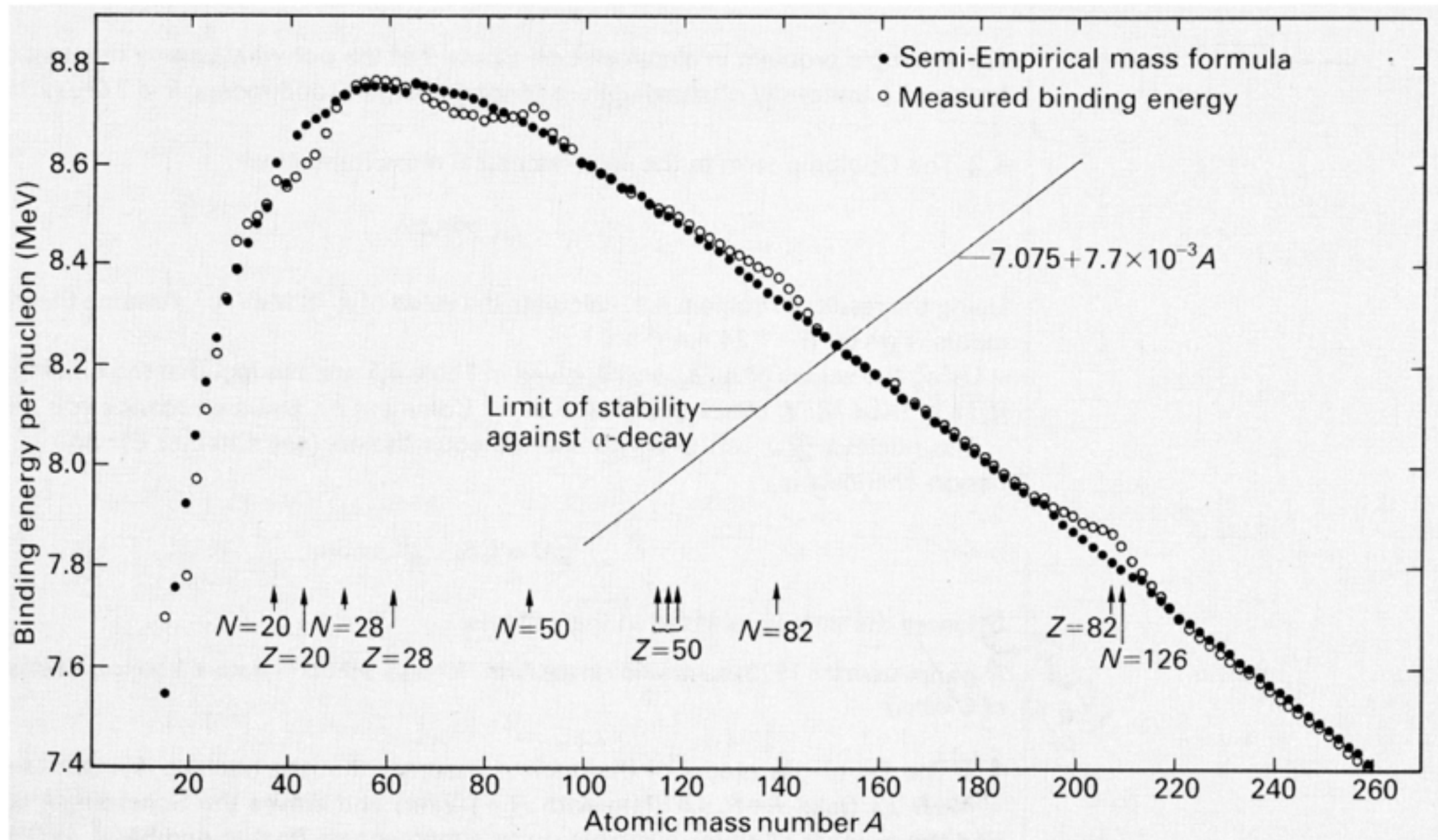
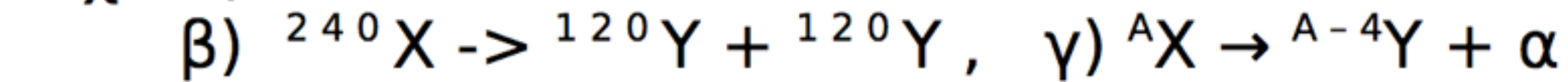
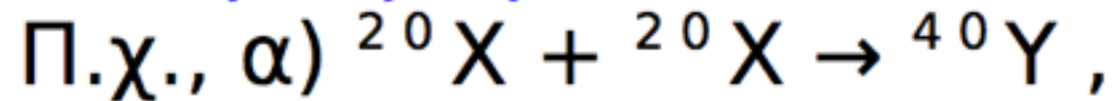
$$\delta = 0 \quad \text{περιτοί-άρτιοι}$$

$$-11.2 \text{ MeV} \text{ άρτιοι-άρτιοι}$$



Ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο (B/A) - μεταβάλλοντας το A

Τι κερδίζουμε συνθέτοντας και αποσυνθέτοντας πυρήνες?



Ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο (B/A) - μεταβάλλοντας το A

$$B(Z,N) / A =$$

a

$$- \mathbf{b} / A^{1/3}$$

$$- \mathbf{s} (N-Z)^2 / A^2$$

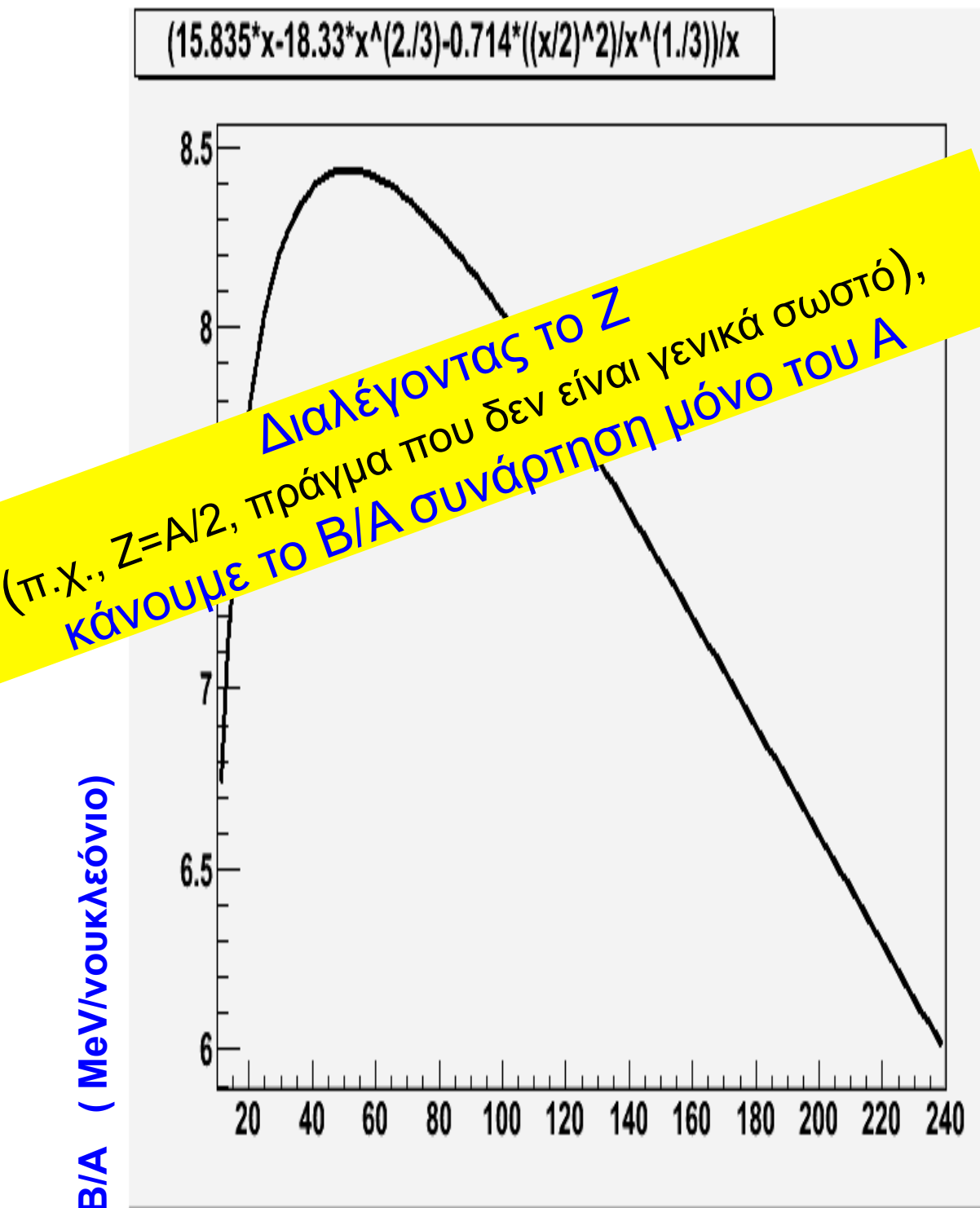
$$- \mathbf{d} Z^2 / A^{4/3}$$

$$- \mathbf{\delta} / A^{3/2}$$

$$\mathbf{a}=15.835 \text{ MeV} , \mathbf{b}=18.33 \text{ MeV}$$

$$\mathbf{s}=23.20 \text{ MeV} , \mathbf{d}=0.714 \text{ MeV}$$

$$\mathbf{\delta} = \begin{cases} +11.2 \text{ MeV} & \text{περιτοί-περιτοί} \\ 0 & \text{περιτοί-άρτιοι} \\ -11.2 \text{ MeV} & \text{άρτιοι-άρτιοι} \end{cases}$$



← Άρτιο Z, άρτιο N

Ενέργεια σύνδεσης - συνάρτηση του A μόνο (2);

$$\underline{B(Z,N)} / \underline{A} =$$

a

$$- \underline{b} / A^{1/3}$$

$$- \underline{s} (N-Z)^2 / A^2$$

$$- \underline{d} Z^2 / A^{4/3}$$

$$- \underline{\delta} / A^{3/2}$$

$$\underline{a} = 15.835 \text{ MeV} , \quad \underline{b} = 18.33 \text{ MeV}$$

$$\underline{s} = 23.20 \text{ MeV} , \quad \underline{d} = 0.714 \text{ MeV}$$

$$\underline{\delta} = \begin{cases} +11.2 \text{ MeV} & \text{περιτοί-περιτοί} \\ 0 & \text{περιτοί-άρτιοι} \\ -11.2 \text{ MeV} & \text{άρτιοι-άρτιοι} \end{cases}$$

← Άρτιο Z, άρτιο N



Κοιλάδα β-σταθερότητας

Το σταθερότερο Z για κάθε A

Αν μας έλεγαν

“φτιάξτε πυρήνες με μόνο περιορισμό το άθροισμα πρωτονίων και νετρονίων να είναι A ”,

ποιό Z να διαλέξουμε ως το “καλύτερο”;

Το $Z=0$, το $Z=A$, το $Z=A/2$, ποιό;

Κοιλάδα β-σταθερότητας: Για κάθε A, ποιο Z δίνει το σταθερότερο στοιχείο;

- Ενέργεια σύνδεσης πυρήνα:

$$B(Z,N) = a A - b A^{2/3} - s (N-Z)^2 / A - d Z^2 / A^{1/3} - \delta / A^{1/2}$$

Κοιλάδα β-σταθερότητας: Για κάθε A, ποιο Z δίνει το σταθερότερο στοιχείο;

- Ενέργεια σύνδεσης πυρήνα:

$$B(Z,N) = a A - b A^{2/3} - s (N-Z)^2 / A - d Z^2 / A^{1/3} - \delta / A^{1/2}$$

Αντικαθιστώντας $N=A-Z$, έχουμε $B(A,Z)$ αντί για $B(Z,N)$:

$$B(A,Z) = a A - b A^{2/3} - s (A-2Z)^2 / A - d Z^2 / A^{1/3} - \delta / A^{1/2}$$

Κοιλάδα β-σταθερότητας: Για κάθε A , ποιό Z δίνει το σταθερότερο στοιχείο;

- Ενέργεια σύνδεσης πυρήνα:

$$B(Z,N) = a A - b A^{2/3} - s (N-Z)^2 / A - d Z^2 / A^{1/3} - \delta / A^{1/2}$$

Αντικαθιστώντας $N=A-Z$, έχουμε $B(A,Z)$ αντί για $B(Z,N)$:

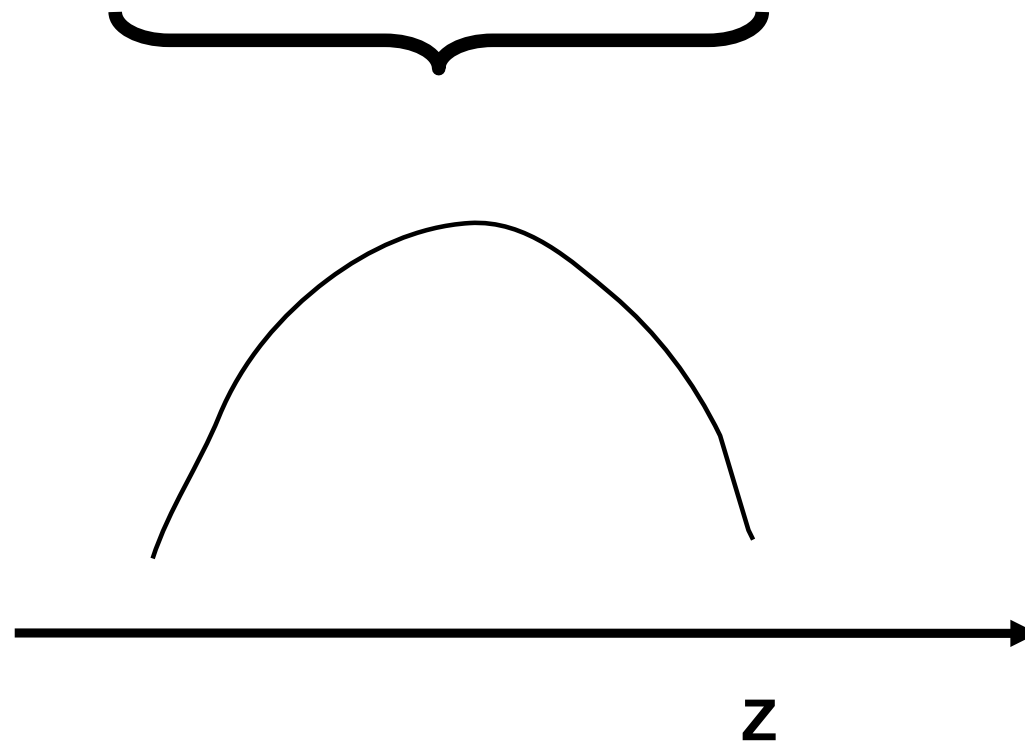
$$B(A,Z) = a A - b A^{2/3} - s (A-2Z)^2 / A - d Z^2 / A^{1/3} - \delta / A^{1/2}$$

$$\rightarrow B(A,Z) = c_1 + c_2 * Z + c_3 * Z^2 = \text{παραβολή (για } A=\text{σταθ.)}$$

$B(Z \mid A=\text{σταθ.})$

↑

“Το B ως συνάρτηση του Z , για $A=\text{σταθ.}$ ”



β-σταθερό, το σταθερότερο Z σε κάθε A: μέγιστη ενέργεια σύνδεσης

- Μέγιστο $B(A,Z)$, για κάθε A=σταθερό:

$$\frac{\partial B(A,Z)}{\partial Z} = 0 \Rightarrow \frac{-2dZ}{A^{1/3}} - \frac{2s(A-2Z) \cdot (-2)}{A} = 0 \Rightarrow \frac{4s(A-2Z)}{A} = \frac{2dZ}{A^{1/3}}$$

$$\Rightarrow 2s(A-2Z) = dZA^{2/3} \Rightarrow Z(4s + dA^{2/3}) = 2sA \Rightarrow Z = \frac{2sA}{4s + dA^{2/3}}$$

- Άρα το Z που δίνει το μέγιστο $B(A,Z)$, για κάθε A είναι:

$$Z = \frac{A}{2 + (d/2s) A^{2/3}}$$

$$s = 23.20 \text{ MeV} \quad , \quad d = 0.714 \text{ MeV}$$

$$Z = \frac{A}{2 + 0.0154 A^{2/3}}$$

$$Z < A/2$$

Κοιλάδα β-σταθερότητας: Για κάθε A, ποιο Z δίνει το σταθερότερο στοιχείο;

- Αν λάβουμε υπ' όψιν το άτομο ως σύνολο, με μάζα $M(A,Z)$:

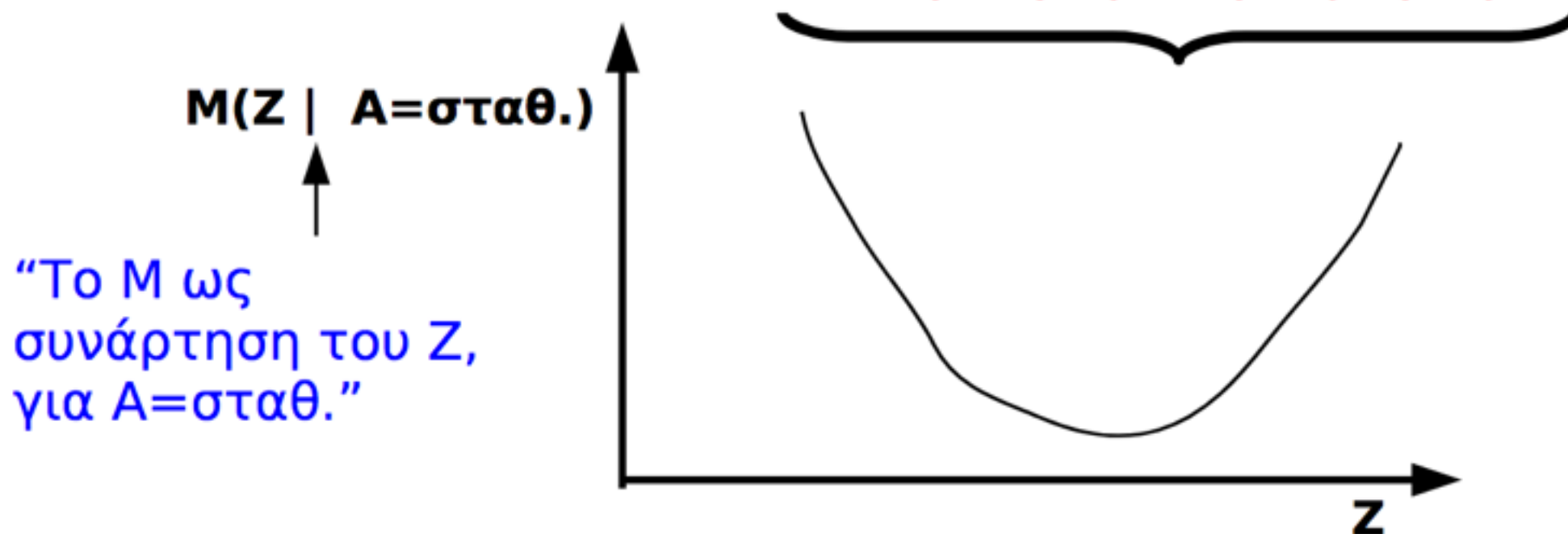
$$M(A,Z) = \Sigma m - B(A,Z) - B(\text{Coulomb} \rightarrow^0 \text{ηλεκτρονίων})$$

- $B(\text{Coulomb ηλεκτρονίων}) \sim 0$ (τάξη μεγέθους eV, ενώ στον πυρήνα έχουμε MeV)

$$\Rightarrow M(A,Z) = Z m_p + Z m_e + (A-Z) m_n -$$

$$[a A - b A^{2/3} - s (A-2Z)^2 / A - d Z^2 / A^{1/3} - \delta / A^{1/2}]$$

→ $M(A,Z)$ = άλλη παραβολή ως προς Z για A=σταθ.



β-σταθερό = το σταθερότερο Z σε κάθε A: ελάχιστη μάζα (ενέργεια) ατόμου

- Ελάχιστη μάζα $M(A,Z)$ για κάθε A=σταθερό:

Για συγκεκριμένο A και δ (π.χ., δ=0), το Z που δίνει ελάχιστη μάζα είναι:

$$Z = \beta/2\gamma = \frac{(4s + (m_n - m_p - m_e)c^2)A}{2(4s + dA^{2/3})}.$$

(4.9)

Στο
βιβλίο
σας

- Άρα το Z που δίνει την ελάχιστη $M(A,Z)$, για κάθε A είναι:

$$m(n) = 939.57 \text{ MeV} / c^2$$

$$m(p) = 938.27 \text{ MeV} / c^2$$

$$m(e) = 0.511 \text{ MeV} / c^2$$

$$s = 23.20 \text{ MeV}, \quad d = 0.714 \text{ MeV}$$

$$Z = \frac{A}{1.983 + 0.0153 A^{2/3}}$$

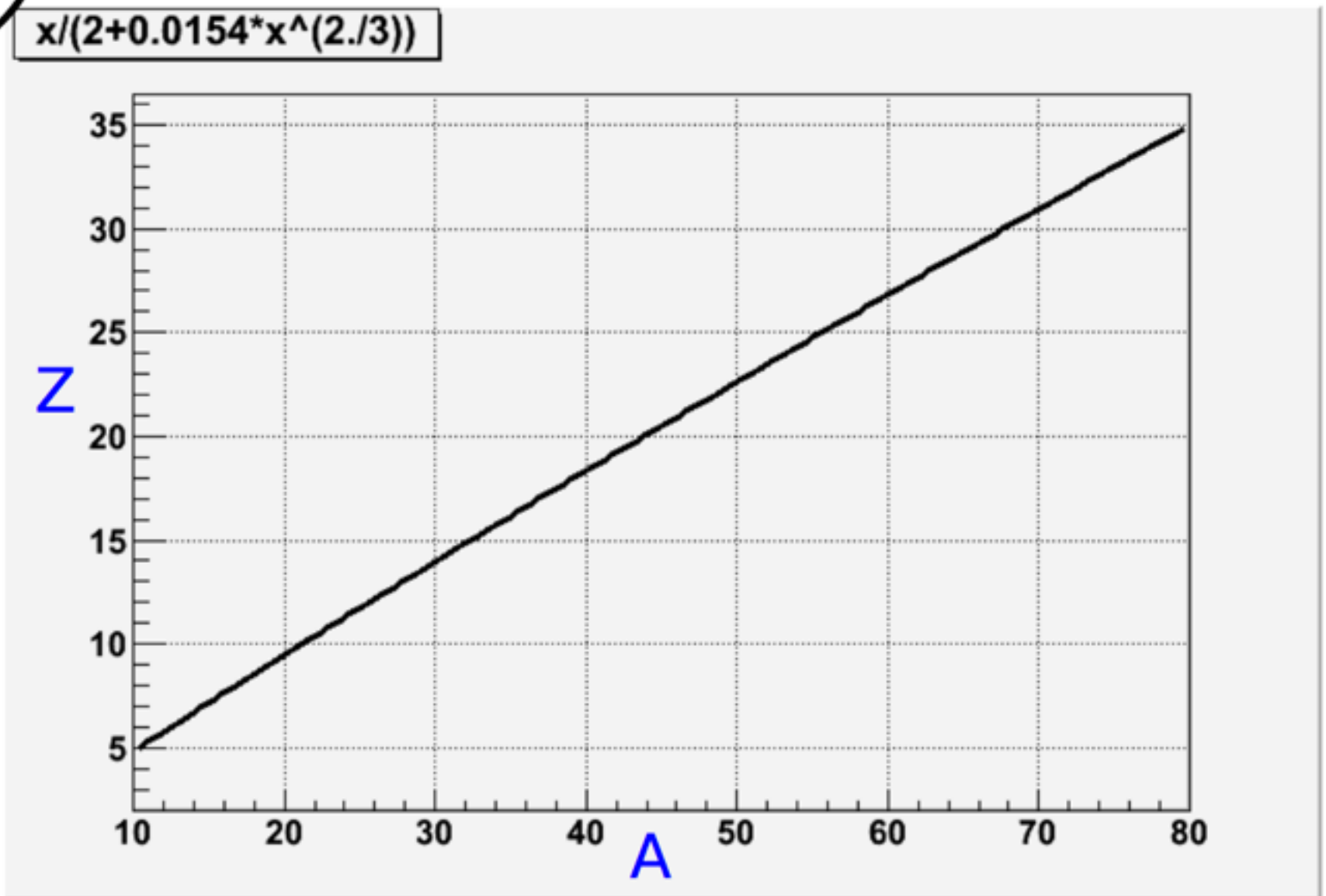
$$Z < A/2$$

β-σταθερό = το σταθερότερο Z σε κάθε A: ελάχιστη μάζα (ενέργεια) ατόμου

$$Z = \frac{A}{1.983 + 0.0153 A^{2/3}}$$

Όντως, σε κάθε A, είναι $Z < A/2$:

$$Z < A/2$$



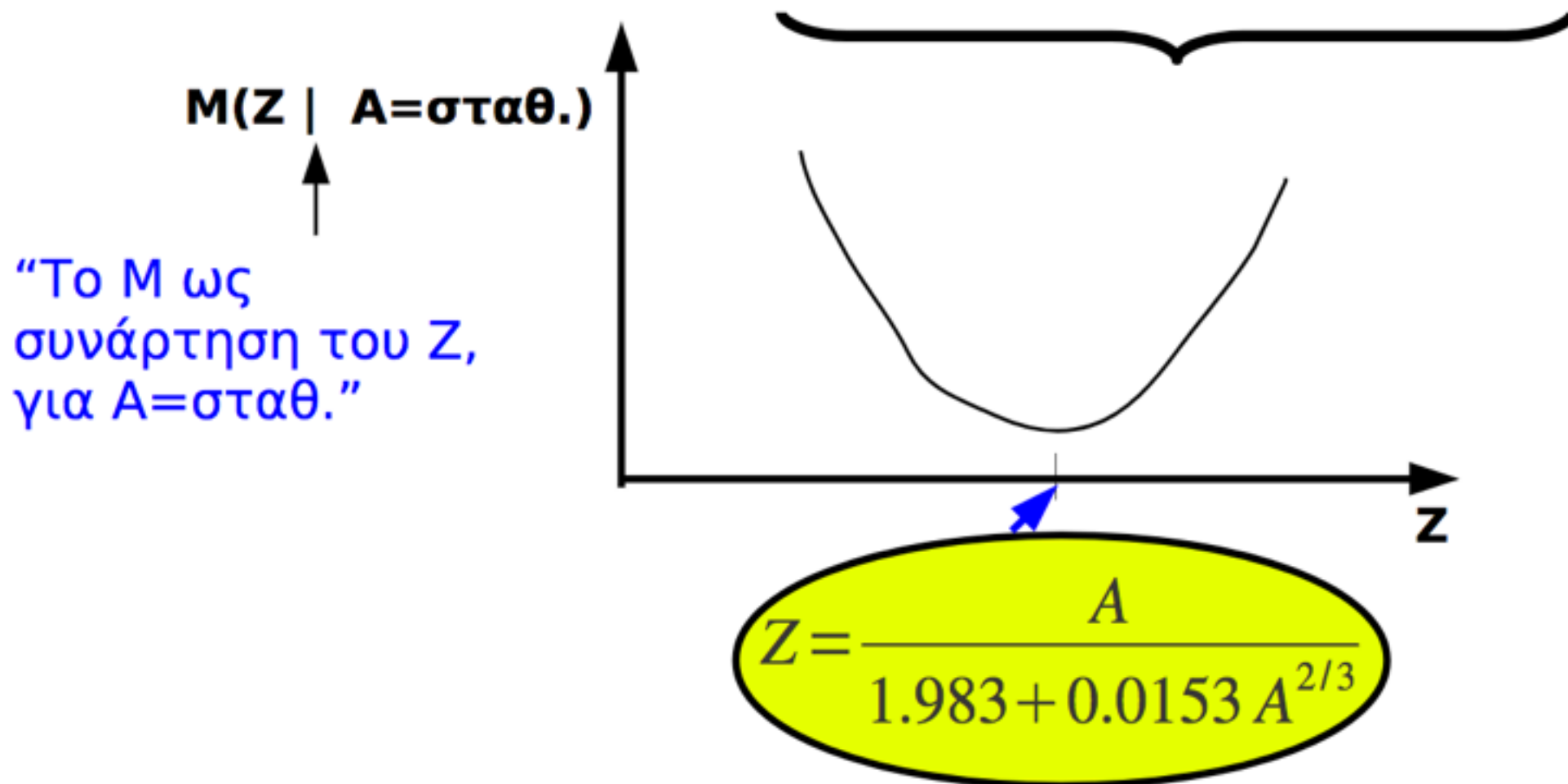
Κοιλάδα β-σταθερότητας: Για κάθε A, ποιο Z δίνει το σταθερότερο στοιχείο;

- Αν λάβουμε υπ' όψιν το άτομο ως σύνολο, με μάζα $M(A,Z)$:

$$M(A,Z) = Z m_p + Z m_e + (A-Z) m_n - B(\text{Coulomb} \text{ ηλεκτρονίων})$$

$$- [a A - b A^{2/3} - s (A-2Z)^2 / A - d Z^2 / A^{1/3} - \delta / A^{1/2}]$$

→ $M(A,Z)$ = άλλη παραβολή ως προς Z για A=σταθ.



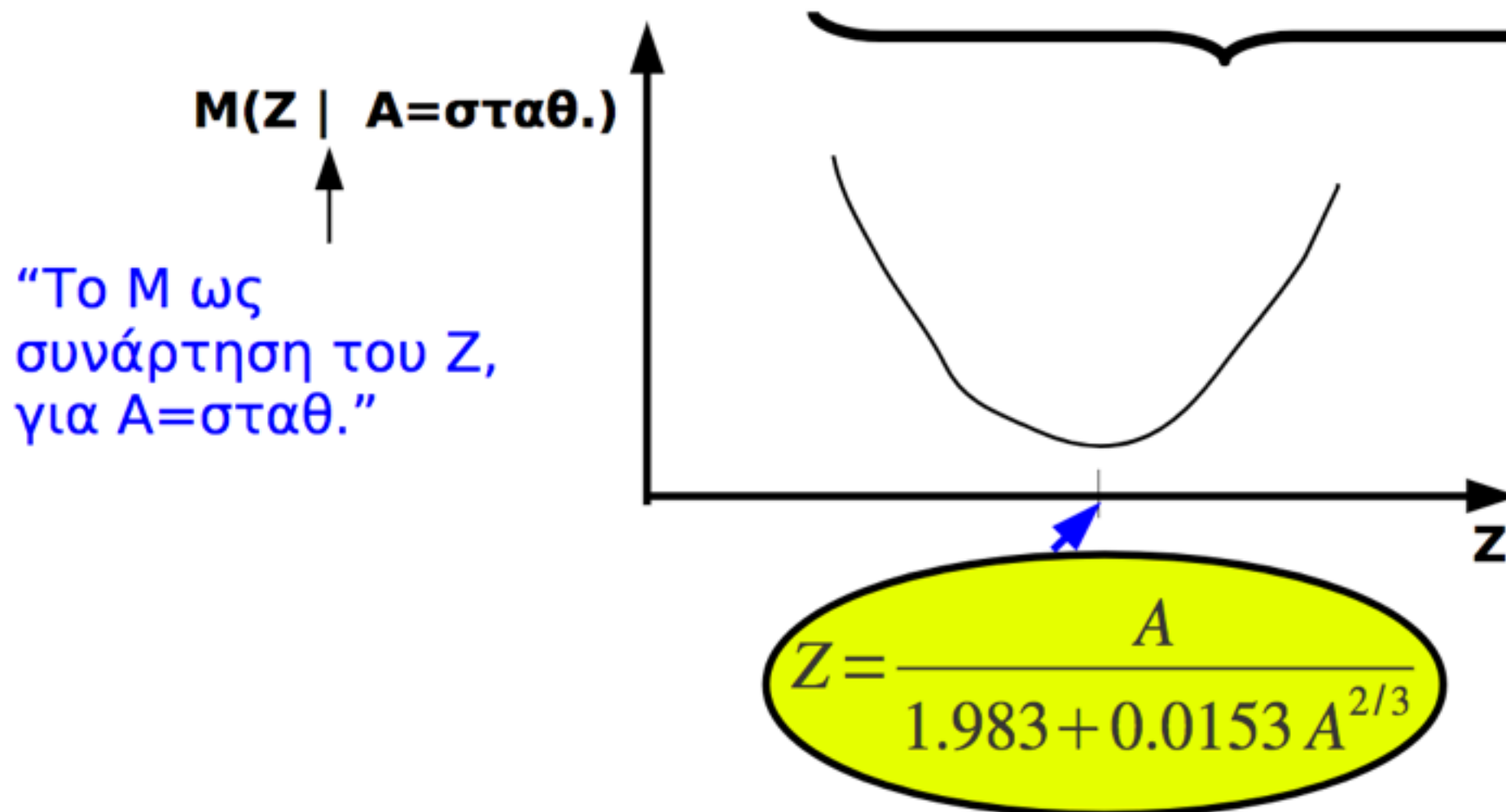
Κοιλάδα β-σταθερότητας: Για κάθε A, ποιο Z δίνει το σταθερότερο στοιχείο;

- Αν λάβουμε υπ'όψιν το άτομο ως σύνολο, με μάζα $M(A,Z)$:

$$M(A,Z) = Z m_p + Z m_e + (A-Z) m_n -$$

$$[a A - b A^{2/3} - s (A-2Z)^2 / A - d Z^2 / A^{1/3} - \delta / A^{1/2}]$$

→ $M(A,Z)$ = άλλη παραβολή ως προς Z για A=σταθ.



Για A= περιτό, το δ έχει μία τιμή (δ=0) → μία καμπύλη μάζας.

Αλλά για A=άρτιο, μπορεί να πάρει δύο τιμές → δύο καμπύλες μάζας

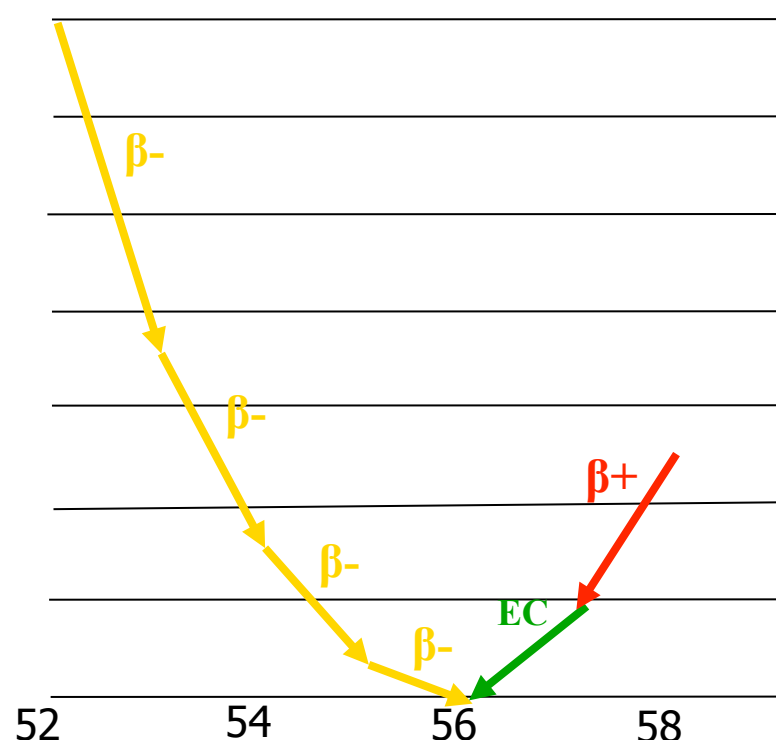
Ο Ημιεμπειρικός τύπος μάζας: Οι συνέπειες - Η κοιλάδα β-σταθερότητας

32

Α περιττός αριθμός

Odd A. A=135

Single parabola
even-odd and odd-even



- Αν υπάρχει $Z < Z_{\min}$ διασπάται με $\beta^{(-)}$ -διάσπαση: $(A, Z) \rightarrow (A, Z+1)$ και
 - $M(A, Z) > M(A, Z+1)$
- Αν $Z > Z_{\min}$ θα διασπασθεί με $\beta^{(+)}$ -διάσπαση: $(A, Z) \rightarrow (A, Z-1)$ και
 - $M(A, Z) > M(A, Z-1)$

- Από τον ορισμό της ενέργειας σύνδεσης:
 $M(N, Z) = Z (M_p + M_e) + N M_n - B(N, Z)/c^2$ και από τον ημιεμπειρικό τύπο μάζας:

$$B(N, Z) = aA - bA^{2/3} - s \frac{(N - Z)^2}{A} - d \frac{Z^2}{A^{1/3}} - \frac{\delta}{A^{1/2}}$$

- ▶ αντικαθιστούμε τα $B(N, Z)$ & $N = A - Z$ και παίρνουμε την εξίσωση για τη μάζα του πυρήνα $M(A, Z)$:

- ▶ $M(A, Z)c^2 = \alpha - \beta Z + \gamma Z^2$ (εξίσωση 2ου βαθμού ως προς Z για ορισμένο A - A περιττό $\Rightarrow \delta = 0$)

- $\Rightarrow$ παραβολή με ελάχιστο στο $Z = \beta/2\gamma = [4s + (M_n - M_p - M_e)c^2]A / [2(4c + dA^{2/3})]$

- αντικαθιστώντας τις τιμές από τις παραμέτρους: $Z_{\min} \leq A/2 \Rightarrow N \geq Z$
- Το $Z_{\min}$ αντιστοιχεί σε Μη διασπώμενο-Σταθερό-πυρήνα πάνω στην παραβολή των ισοβαρών
- σε κάθε περιττό A αντιστοιχεί ένα μόνο σταθερό ισοβαρές

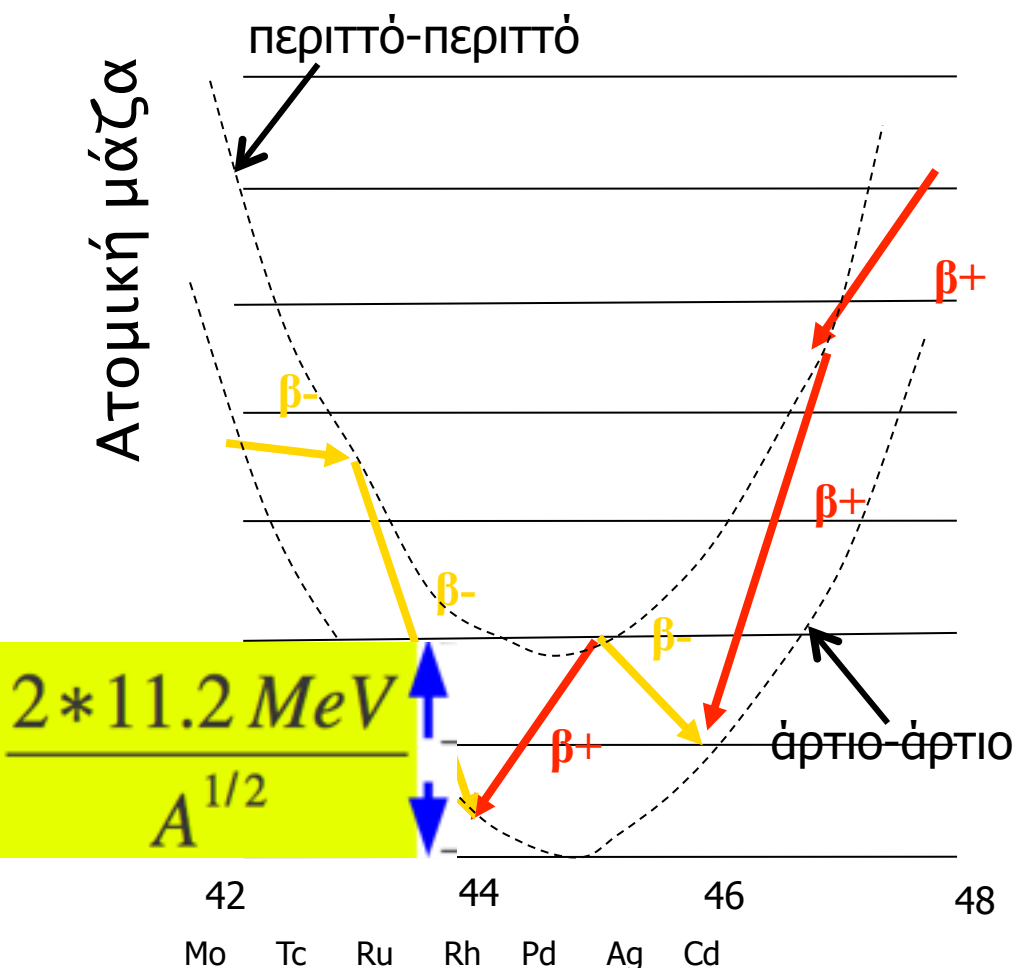
Ο Ημιεμπειρικός τύπος μάζας: Οι συνέπειες - Η κοιλάδα β-σταθερότητας

33

Α άρτιος αριθμός

Even A. A=102

Two parabolae separated by 2δ ,
odd-odd and even-even



- Σχεδόν όλοι οι **περιττοί - περιττοί** πυρήνες μπορούν να διασπασθούν με β-διάσπαση σε άρτιους-άρτιους που να είναι σταθεροί

- Πυρήνες με **άρτιο A** μπορούν να έχουν Z, N άρτιους ή Z & N περιττούς

- Από τον ημιεμπειρικό τύπο της μάζας οι: άρτιοι-άρτιοι πυρήνες έχουν μεγαλύτερη ενέργεια σύνδεσης κατά $(2\delta A^{-1/2})$ (**άρα χαμηλότερη ενέργεια - μικρότερη ατομική μάζα**) από τους αντίστοιχους (ισοβαρείς) με Z-N περιττό-περιττό

► Υπάρχουν επομένως δύο παραβολές της μορφής $M(A,Z)c^2 = \alpha - \beta Z + \gamma Z^2$ με τα ελάχιστα μετατοπισμένα κατά $2\delta A^{-1/2}$ που κυμαίνονται μεταξύ 5 MeV (για A=20) μέχρι 1.4 MeV για A=250

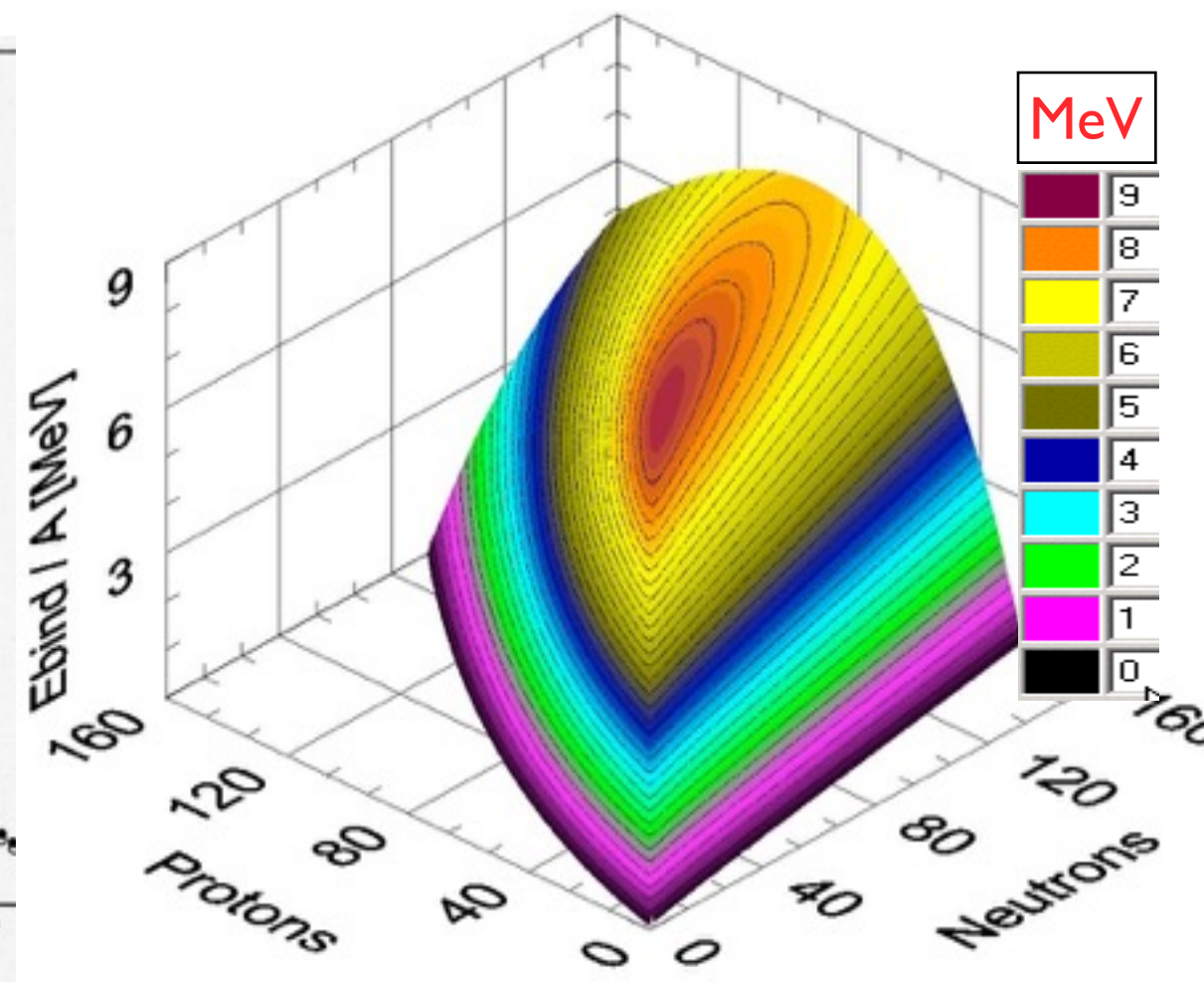
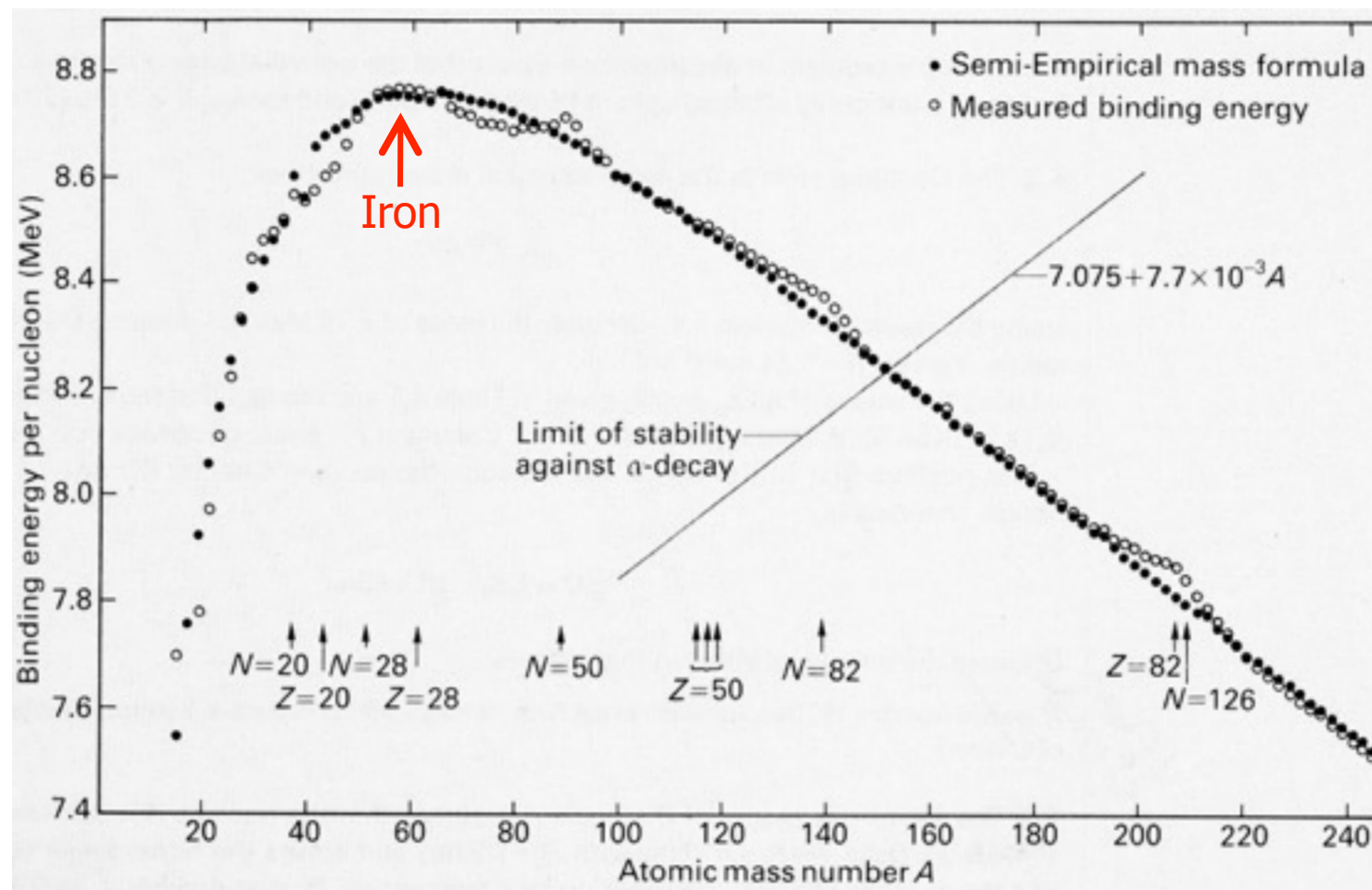
- Ο πυρήνας με $Z_{\min}$ στη περίπτωση περιττός-περιττός (Z-N) έχει συνήθως δύο δυνατότητες β-διάσπασης (β^+ και β^-) καταλήγοντας σε δύο διαφορετικού Z (άρτιο) σταθερούς πυρήνες

- Οι μοναδικοί περιττοί-περιττοί πυρήνες που είναι **σταθεροί** είναι οι τεσσereiς ελαφρύτεροι: ${}^2_1\text{H}$, ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$, ${}^{14}_7\text{N}$

Ενέργεια Σύνδεσης: Οι συνέπειες - "The Iron Mountain"

34

- * Ο Ημιαμπειρικός τύπος της μάζας περιγράφει ικανοποιητικά τις μετρήσεις ενέργειας σύνδεσης των πυρήνων στην **περιοχή μεγίστου του σιδήρου**
- * Αποκλίσεις ~1% μπορούν να εξηγηθούν με την **"φλοιώδη δομή"** του πυρήνα



Κοιλάδα β-σταθερότητας

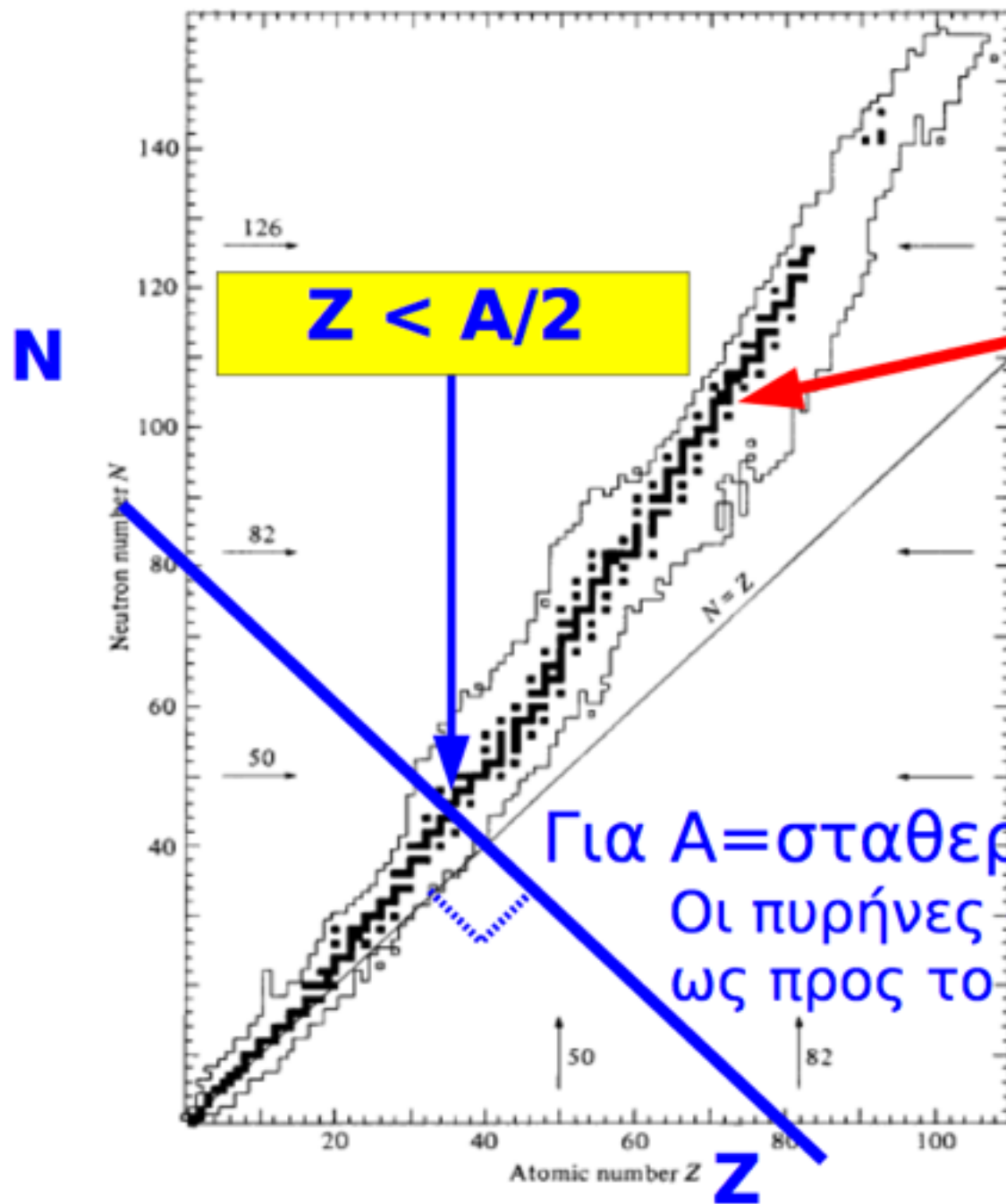
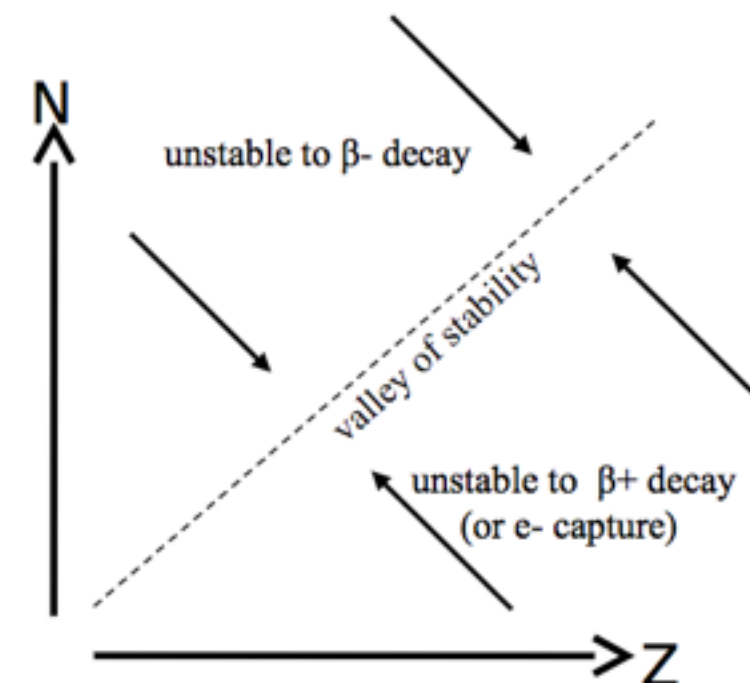


Fig. 4.6 The β -stability valley. Filled squares denote the stable nuclei and long-lived nuclei occurring in nature. Neighbouring nuclei are unstable. Those for which data on masses and mean lives are known fill the area bounded by the lines. For the most part these unstable nuclei have been made artificially. (Data taken from *Chart of the Nuclides* (1977), Schenectady: General Electric Company.)

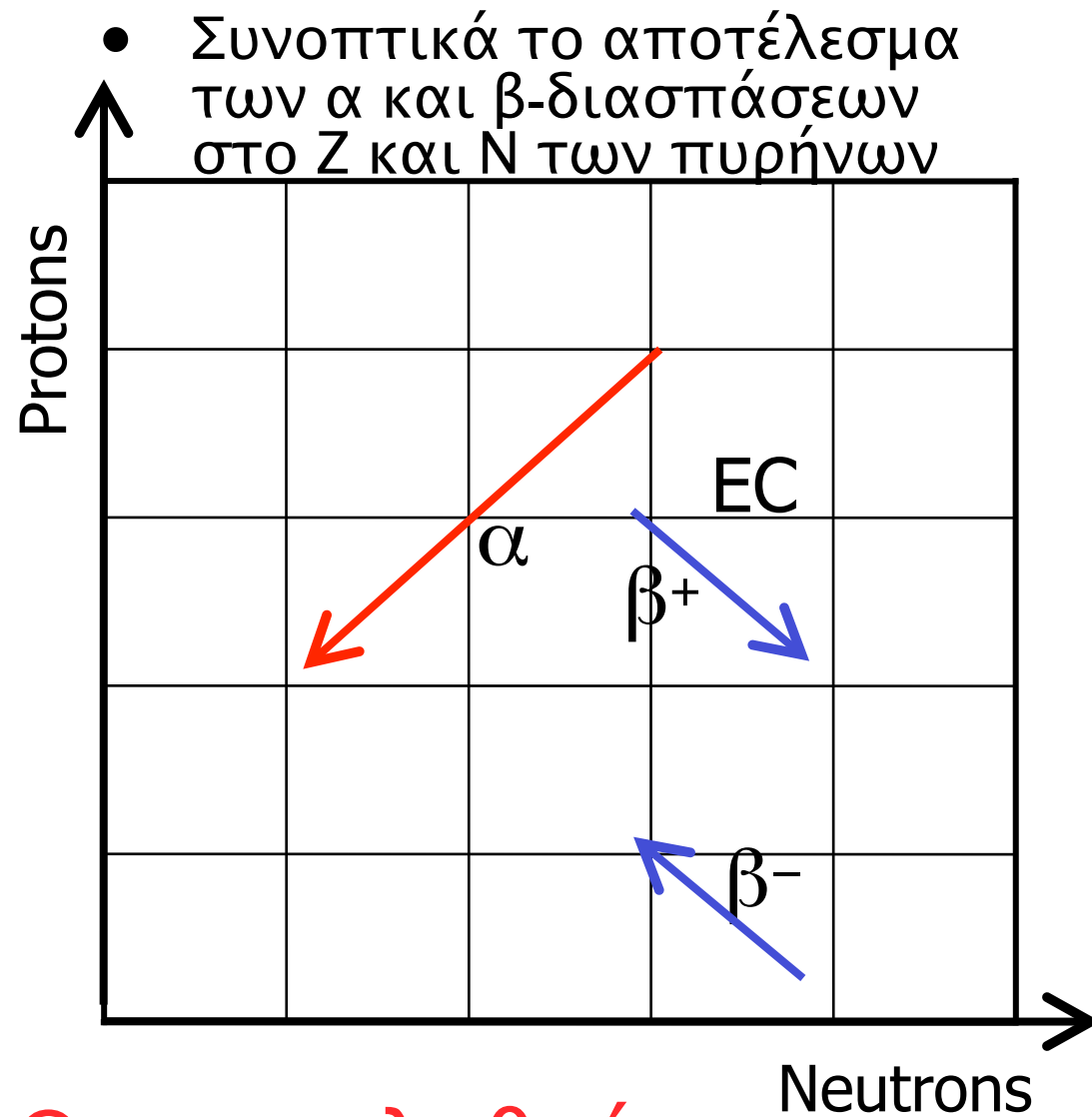
Σχήμα 4.6 στο βιβλίο σας

- Για κάθε A , τα β -σταθερά νουκλίδια είναι στη μαύρη ζώνη ("κοιλάδα σταθερότητας" - "valley of stability"). Αυτά που είναι μακριά απ'την κοιλάδα, πάνε προς αυτήν με διασπάσεις β^+ ($= e^+$) ή β^- ($= e^-$)



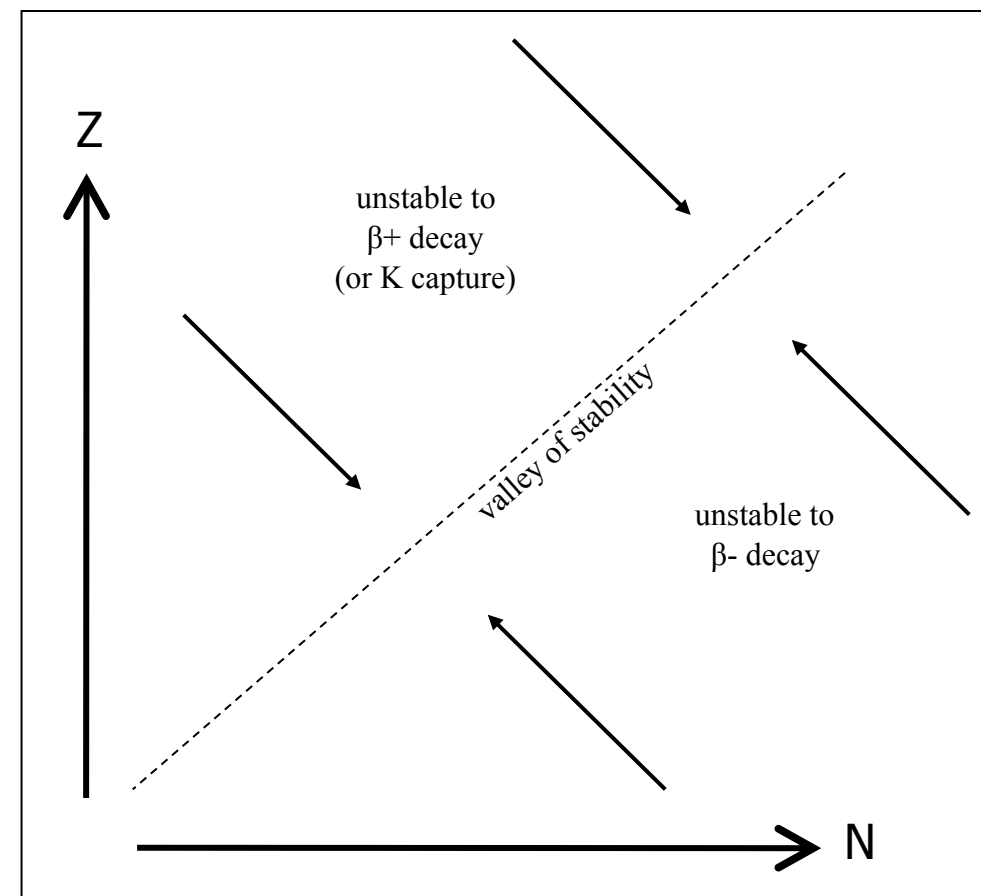
Συνοψίζοντας: για την κοιλάδα σταθερότητας και τις β -διασπάσεις

36



Θα ασχοληθούμε
με τις πυρηνικές
διασπάσεις σε
επόμενα
μαθήματα

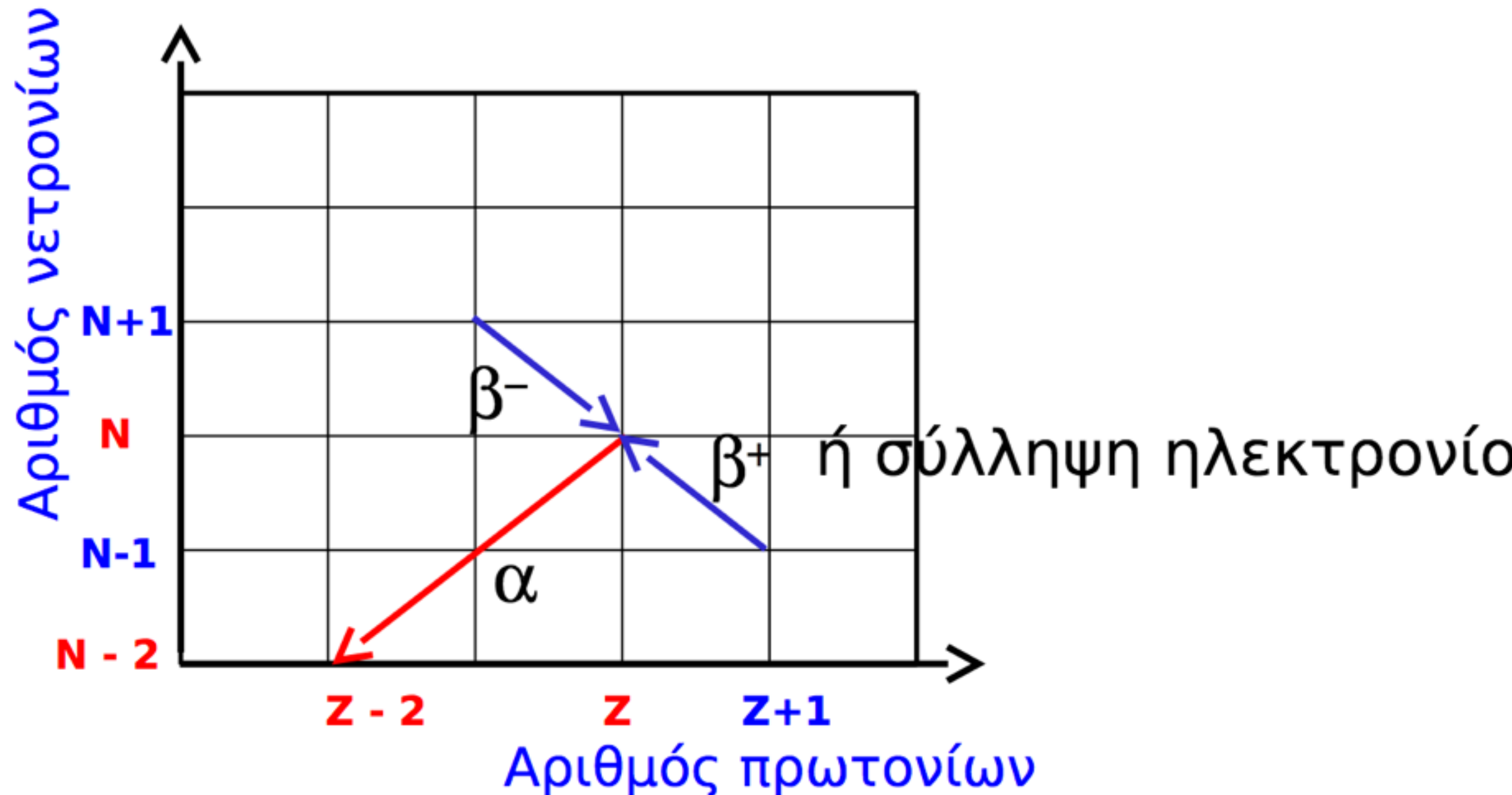
- Η β -διάσπαση μας μεταφέρει προς την κοιλάδα σταθερότητας για τα αντίστοιχα ισοβάρη



α και β διάσπαση: οι πυρήνες αλλάζουν

Η α διάσπαση μας μεταφέρει πάνω-κάτω στην κοιλάδα σταθερότητας

Η β διάσπαση μας μεταφέρει προς την κοιλάδα σταθερότητας



Διάσπαση άλφα (“α διάσπαση”)

- **α-διάσπαση:**

$$m(A,Z) \rightarrow m(A-4, Z-2) + \alpha + Q$$

(Μητρικός πυρήνας $\rightarrow$ θυγατρικός πυρήνας + α + Q)

- Οπότε:

$$Z m_p + N m_n - B(A,Z) =$$
$$(Z-2) m_p + (N-2) m_n - B(A-4, Z-2)$$
$$+ 2 m_p + 2 m_n - B(^4\text{He})$$
$$+ Q$$

- Κι έτσι:

$$Q = B(A-4, Z-2) + 28.3 \text{ MeV} - B(A, Z)$$

“βήτα διάσπαση” (“β διάσπαση”)

“βήτα διασπάσεις” ονομάζονται οι διαδικασίες με τις οποίες οι πυρήνες αλλάζουν τον αριθμό πρωτονίων τους κατά ένα, διατηρώντας το μαζικό αριθμό A σταθερό. Τρεις είναι οι τρόποι:

β^- : εκπέμπονται ηλεκτρόνια (e^-)

β^+ : εκπέμπονται ποζιτρόνια (e^+)

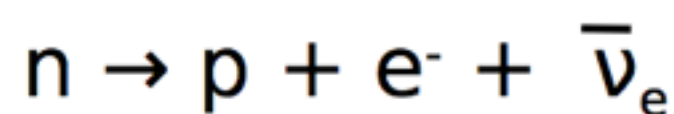
EC: “Electron Capture” = “Σύλληψη ηλεκτρονίου” ή “αρπαγή ηλεκτρονίου”

Κοιτώντας τους πυρήνες βλέπουμε:

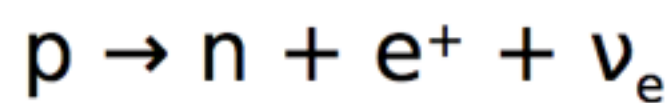
Διάσπαση β^-



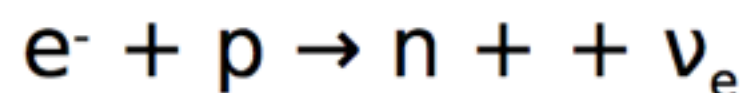
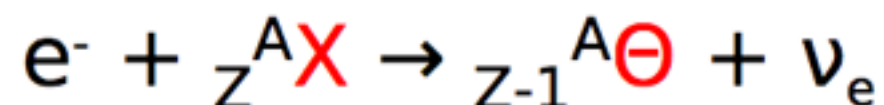
Αυτό που γίνεται μέσα στον πυρήνα είναι:



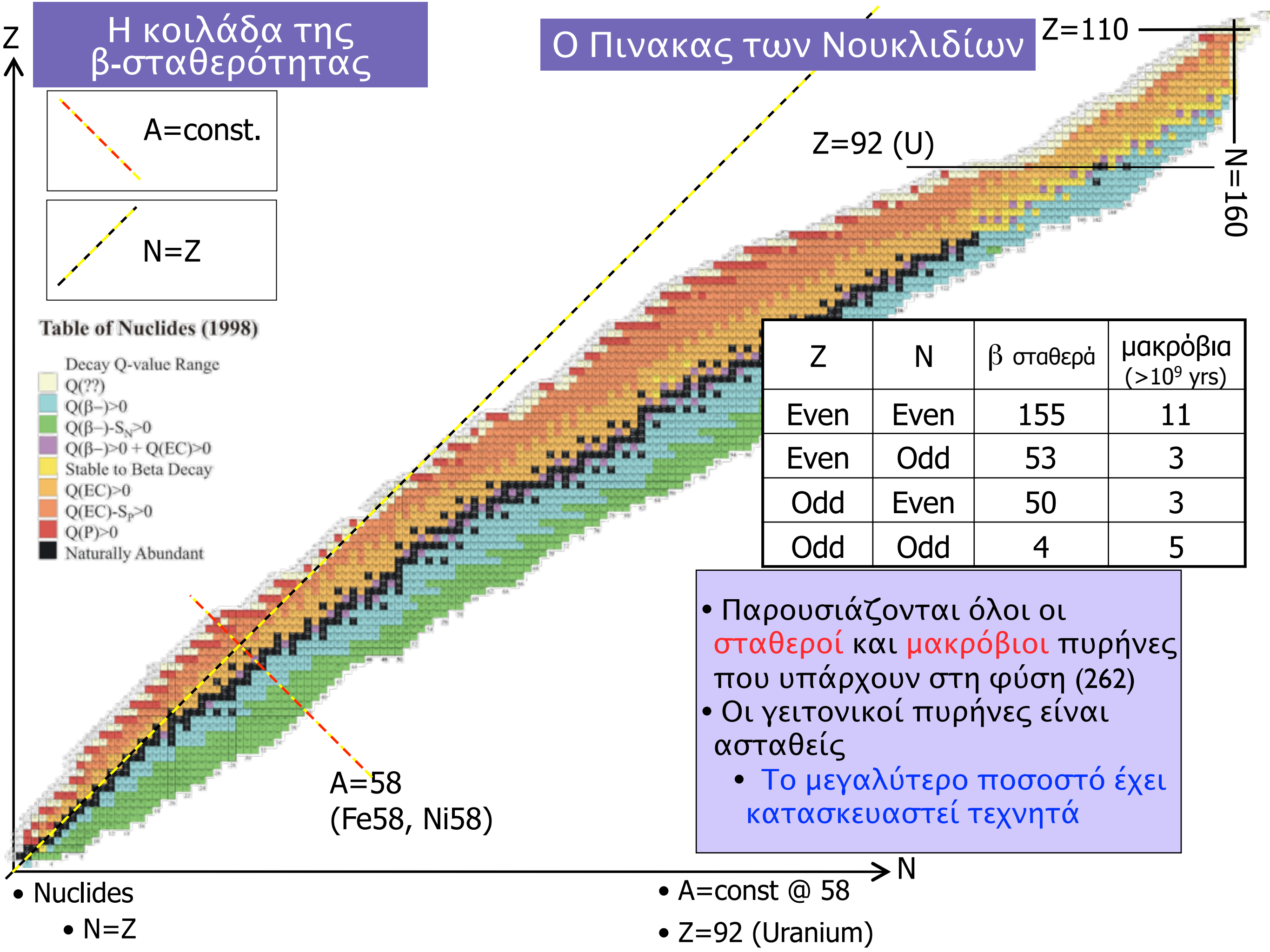
Διάσπαση β^+



Σύλληψη ηλεκτρονίου



Πολλές φορές θα δείτε την
κοιλάδα β-σταθερότητας με αντεστραμένους
άξονες



Συνοψίζοντας:

για τις Μάζες και την Ενέργεια Σύνδεσης των πυρήνων

42

- Η ενέργεια σύνδεσης του πυρήνα καθορίζει και την σταθερότητά του
- **Σταθερούς** χαρακτηρίζουμε τους πυρήνες που έχουν χρόνο ζωής συγκρίσιμο με την ηλικία της Γης ($\sim 10^9$ χρόνια)
- Ο “Ημιεμπειρικός τύπος της Μάζας” περιγράφει ικανοποιητικά τις μετρήσεις Ενέργειας Σύνδεσης των πυρήνων για πυρήνες με $A > 20$
 - ▶ Οι δύο κύριοι όροι στον τύπο: όρος όγκου και όρος επιφάνειας είναι απόρροια του Προτύπου της Υγρής Σταγόνας
 - ▶ Ο όρος Coulomb είναι αποτέλεσμα του φορτίου του πυρήνα και
 - ▶ Οι δύο όροι της Ασυμμετρίας και του Ζευγαρώματος είναι αποτέλεσμα της φλοιώδους δομής του πυρήνα
- Ο όρος του Ζευγαρώματος είναι αυτός που διαφοροποιεί τους β-σταθερούς πυρήνες από αυτούς που διασπώνται με β-διάσπαση
 - είναι θετικός για άρτιους-άρτιους (Z-N) πυρήνες και
 - αρνητικός για περιττούς-περιττούς

* Η ύπαρξη μέγιστης τιμής στην ενέργεια σύνδεσης ΔEN εμποδίζει άλλες μορφές διάσπασης για βαρείς πυρήνες οι οποίοι είναι σταθεροί ως προς τη β-διάσπαση

* Με την σταδιακή μείωση του B/A όταν το A αυξάνει, συμφέρει ενεργειακά σε ένα βαρύ πυρήνα να διασπαστεί σε δύο μικρότερους που συνολικά θα έχουν μεγαλύτερη ενέργεια σύνδεσης **$B(A,Z) < B(A-4, Z-2) + 28.3 \text{ MeV}$ (ενέργεια σύνδεσης του ${}^4_2\text{He}$)**

