

Στοιχεία Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων (5ου εξαμήνου)

Τμήμα Τ2: Κ. Κορδάς & Δ. Σαμψωνίδης
Μάθημα 11

Κβαντικοί αριθμοί και ομοτιμία (parity) – ουσιαστικά
σημεία με βάση το άτομο του υδρογόνου

Αυτό το μάθημα ΔΕΝ είναι προς εξέταση.
Είναι μια επανάληψη από έννοιες που χρειαζόμαστε
παρακάτω και είδατε στη Γενική Φυσική V

Κώστας Κορδάς

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Πυρηνική & Στοιχειώδη, Αριστοτέλειο Παν. Θ/νίκης

Σήμερα

- **Κβαντικοί αριθμοί και ομοτιμία (parity)**
- **Πυρηνικό δυναμικό - δυναμικό Yukawa, σύστημα δευτερίου**
 - Βιβλίο C&G, Κεφ. 1 όλο, Κε. 2 (παρ. 2.4-2.6), Κεφ. 3 (παρ. 3.3 και 3.4), Παράρτημα Γ (κυρίως Γ.2,3,4).
 - Βιβλίο Χ. Ελευθεριάδη: κεφ. 6, παρ 6.1, 6.2
 - Σημειώσεις Πυρηνικής, Κεφ. 6
- **Ιστοσελίδα:** <http://www.physics.auth.gr/course/show/125>

Είδαμε ότι ο πυρήνας είναι δέσμιο σύστημα νουκλεονίων

- Και είδαμε ένα ημιεμπειρικό μοντέλο για να εξηγούμε την ενέργεια σύνδεσης των νουκλεονίων στον πυρήνα
- Τα νουκλεόνια βρίσκονται “παγιδευμένα” μέσα στον πυρήνα γιατί βρίσκονται μέσα σε ένα πηγάδι δυναμικού
 - Κατ' αναλογία με το ηλεκτρόνιο που είναι παγιδευμένο στο άτομο του υδρογόνου, γιατί βρίσκεται μέσα στο πηγάδι του δυναμικού Coulomb που δημιουργεί ο πυρήνας (δηλ. το πρωτόνιο).
 - Στον πυρήνα, τι πηγάδι δυναμικού να χρησιμοποιήσουμε;
 - Ας δούμε πρώτα το άτομο του υδρογόνου (το είδατε στην Γενική Φυσική V και θα ξαναφτάσετε εκεί αργότερα στην κβαντομηχανική)

1. Αναλογία με ένα πρότυπο δέσμιου συστήματος: το άτομο

(όπου ξέρουμε ότι έχουμε ηλεκτρομαγνητική
δύναμη μεταξύ πυρήνα και ηλεκτρονίων →
δυναμικό Coulomb)

1α.
Εξίσωση Schroedinger,
κυματοσυναρτήσεις, στροφορμή, σπίν

Το σωματίδιο ως κύμα - κυματοσυνάρτηση

- De Broglie:**

$$E = h f \rightarrow E = \hbar \omega \rightarrow \omega = \frac{E}{\hbar}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \rightarrow p = \hbar k \rightarrow k = \frac{p}{\hbar}$$

- Ένα κύμα μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα επίπεδων κυμάτων σαν κι αυτό:

$$\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} = e^{i(px - Et)/\hbar}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \psi \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = E \psi$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{ip}{\hbar} \psi \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi = p \psi$$

“Τελεστής” ενέργειας

= μια “πράξη” πάνω στην κυματοσυνάρτηση ψ , που δίνει πάλι την ψ , αλλά πολλαπλασιασμένη με την ενέργεια E .

Η E είναι μια ιδιοτιμή της ενέργειας, και η ψ είναι μια ιδιο-συνάρτηση του τελεστή της ενέργειας.

“Τελεστής” ορμής

Περιγραφή ενός συστήματος με κυματοσυναρτήσεις

Έστω ψ μια κυματοσυνάρτηση που περιγράφει ένα σύστημα.

$$A \psi = \alpha \psi$$

“Τελεστής”

= μια “πράξη” πάνω στην κυματοσυνάρτηση ψ που αν δίνει πάλι την ψ , αλλά πολλαπλασιασμένη με μια σταθερά α , τότε λέμε ότι

Το α είναι μια ιδιοτιμή του τελεστή A , και η ψ είναι μια ιδιοσυνάρτηση του τελεστή A

Παράδειγμα:

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = E \psi$$

“Τελεστής” ενέργειας

Η E είναι μια ιδιοτιμή του τελεστή ενέργειας, και η ψ είναι μια ιδιοσυνάρτηση του τελεστή της ενέργειας.

$$-i \hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi = p \psi$$

“Τελεστής” ορμής

Εξισώσεις Schroedinger

- Schroedinger: ψάχνει κυματική εξίσωση που ικανοποιεί:

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (\text{όπου } p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

$$E \psi = \frac{p^2}{2m} \psi \rightarrow i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$

**Χρονοεξαρτώμενη
Εξίσωση Schroedinger.**
την εφαρμόζουμε σε
οποιαδήποτε συνάρτηση ψ

Όπου: $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv$ ο Λαπλασιανός τελεστής $\equiv$ η Λαπλασιανή

$|\psi|^2$ = πυκνότητα πιθανότητας = πιθανότητα ανά μονάδα όγκου
να βρούμε το σωματίδιο σε μία περιοχή του χώρου

* Για να βρούμε την ενέργεια E, δεν βαζουμε τον τελεστή της ενέργειας, κι έτσι λύνουμε τη **χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schroedinger**:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) \rightarrow E \psi = \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi \rightarrow \nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(\vec{r})) \psi = 0$$

$$H \psi = E \psi, \text{ όπου } H \equiv \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \equiv \text{ο Χαμιλτονιανός τελεστής} \equiv \text{η Χαμιλτονιανή}$$

$$H \equiv T + V = \text{κινητική} + \text{δυναμική ενέργεια}$$

Ιδιοσυναρτήσεις και ιδιοτιμές ενέργειας από την εξίσωση Schroedinger

- Λύνουμε πρώτα τη χρονοανεξάρτητη εξίσωση του Schroedinger, και βρίσκουμε τις ιδιοτιμές ενέργειας E_i και τις ιδιοσυναρτήσεις $\psi_i(x)$ του συστήματος:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) \rightarrow E \psi = \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi \rightarrow \nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(\vec{r})) \psi = 0$$

- Κατόπιν βάζουμε και τη χρονική εξάρτηση κάθε ιδιοσυνάρτησης ως εξής:

$$\psi_i(x, t) = \psi_i(x) e^{-iE_i t / \hbar}$$

- Μετά, οποιαδήποτε κυματοσυνάρτηση ψ που περιγράφει το σύστημά μας, μπορούμε να τη γράφουμε σαν γραμμικό συνδυασμό των ιδιοσυναρτήσεων ψ_i

$$\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + c_3 \psi_3 + \dots$$

Εξίσωση Schroedinger για κεντρικά δυναμικά

- Η εξίσωση Schroedinger

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(\vec{r})) \psi = 0$$

με κεντρικό δυναμικό $V(\vec{r}) = V(r)$ [π.χ., το δυναμικό Coulomb $-e^2/r$],
όπου χωρίζουμε ακτινικό και γωνιακό μέρος κυματοσυνάρτησης:

$$\psi(\vec{r}) = R(r) Y(\theta, \varphi), \text{ και } y = r R(r)$$

γίνεται:
$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} y + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_l(r)) y = 0$$

Οπότε έχουμε να λύσουμε την πιο πάνω μονοδιάστατη εξίσωση του Schroedinger, όπου το “ενεργό δυναμικό” είναι ίσο με το άθροισμα του κεντρικού δυναμικού **κι ενός όρου στροφορμής**

$$V_l(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_e r^2}$$

Άτομο υδρογόνου με εξ. Schroedinger

- Λύση της εξίσωσης Schroedinger $\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(\vec{r})) \psi = 0$

Δυναμικό Coulomb: είναι ένα “κεντρικό δυναμικό,
δηλ, ΔΕΝ έχει εξάρτηση από θ , ϕ , αλλά μόνο από το r

Με το δυναμικό Coulomb: $V(\vec{r}) = V(r) = \frac{q_1 q_2}{r} = e \frac{(-e)}{r} = \frac{-e^2}{r}$

και $\psi(\vec{r}) = R(r) Y(\theta, \phi)$

- Βρίσκουμε:

συναρτήσεις $R(r)$ και $Y(\theta, \phi)$, όπου $\psi = R(r) Y(\theta, \phi)$ είναι **ιδιοσυναρτήσεις**

α) της Χαμιλτονιανής, με ιδιοτιμές ενέργειας

$$E = \left(\frac{1}{2} a^2 m c^2 \right) \frac{1}{n^2}$$

β) του τελεστή L^2 της τροχιακής στροφορμής με ιδιοτιμές:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (-i\hbar \nabla)$$

$$\text{όπου } \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

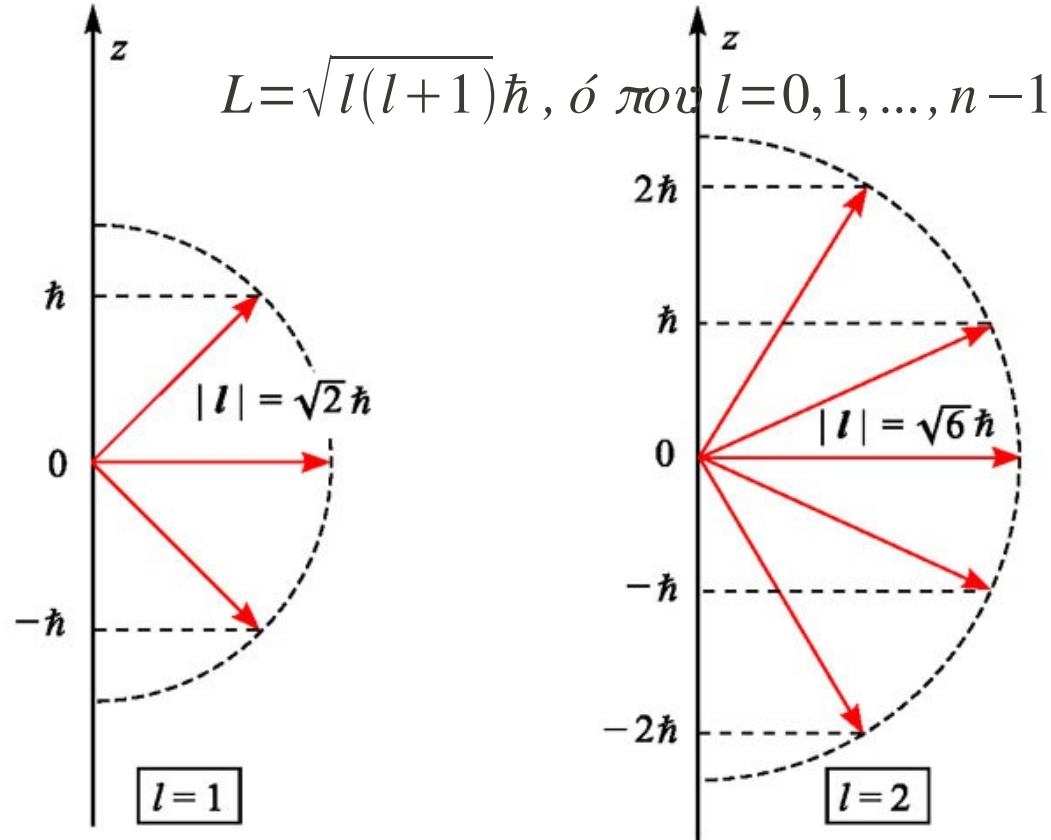
$$L^2 Y_{lm} = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}, \text{ όπου } l=0, 1, \dots, n-1$$

γ) του τελεστή L_z , προβολής της L σ'έναν άξονα, με ιδιοτιμές:

$$L_z Y_{lm} = m_l \hbar Y_{lm}, \text{ όπου } m_l = -l, \dots, 0, \dots, l$$

Ίδιες Y_{lm} , l , και m_l λύσεις για
ΟΛΑ τα κεντρικά δυναμικά

Κβάντωση στροφορμής



Ο κβαντικός αριθμός l , ορίζει το μήκος του διανύσματος της στροφορμής.

Το διάνυσμα της στροφορμής μπορεί να έχει μόνο συγκεκριμένους προσανατολισμούς: όσους δίνουν κάποια από τις επιτρεπόμενες προβολές στον άξονα z

ΣΧΗΜΑ 9.9: Το κβαντωμένο διάνυσμα της στροφορμής για $\ell=1$ και $\ell=2$. Λόγω της κβάντωσης της προβολής του πάνω σε έναν άξονα, το «διάνυσμα» της στροφορμής –αν η σχεδίασή του ως διανύσματος έχει νόημα– μπορεί να έχει μόνο ορισμένους διάκριτους προσανατολισμούς στον χώρο. Φαινόμενο που αποδίδεται με τον όρο «κβάντωση προσανατολισμού» ή «κβάντωση χώρου». Σημειώστε επίσης –γιατί αυτό είναι το πιο προκλητικό από όλα– ότι το διάνυσμα ℓ ουδέποτε ευθυγραμμίζεται με τον άξονα z . Ακόμα και στην κατάσταση μέγιστης προβολής του σε αυτόν τον άξονα σχηματίζει γωνία μαζί του αφού είναι πάντα $(\ell_z)_{\max} = \hbar\ell < |\ell| = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$.

Υδρογόνο: Ακτινικές ιδιοσυναρτήσεις $R_{n\ell}(r)$

ΠΙΝΑΚΑΣ 9.3. Οι ακτινικές συναρτήσεις $R_{n\ell}$ μέχρι $n = 3$

	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$
$n = 1$	$R_{10} = 2e^{-r}$		
$n = 2$	$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{r}{2}\right) e^{-r/2}$	$R_{21} = \frac{r}{2\sqrt{6}} e^{-r/2}$	
$n = 3$	$R_{30} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(1 - \frac{2r}{3} + \frac{2r^2}{27}\right) e^{-r/3}$	$R_{31} = \frac{8r}{27\sqrt{6}} \left(1 - \frac{r}{6}\right) e^{-r/3}$	$R_{32} = \frac{4r^2}{81\sqrt{30}} e^{-r/3}$

Υδρογόνο: Γωνιακές ιδιοσυναρτήσεις $Y(\theta, \phi)$

ΠΙΝΑΚΑΣ 9.2. Οι σφαιρικές αρμονικές μέχρι $\ell = 2$

	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$
$m = 2$			$Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$
$m = 1$		$Y_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$	$Y_{21} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{i\phi}$
$m = 0$	$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$	$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$
$m = -1$		$Y_{1,-1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}$	$Y_{2,-1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{-i\phi}$
$m = -2$			$Y_{2,-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\phi}$

Άτομο υδρογόνου με ενέργεια και στροφορμή

E, L^2, L_z είναι τελεστές που αντιμετωπίζονται με τη Χαμιλτονιανή, άρα τα αντίστοιχα φυσικά μεγέθη διατηρούνται, άρα οι αριθμοί n, l, m_l χαρακτηρίζουν την κατάσταση του συστήματος
→ είναι καλοί κβαντικοί αριθμοί

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \text{ όπου } l = 0, 1, \dots, n-1$$

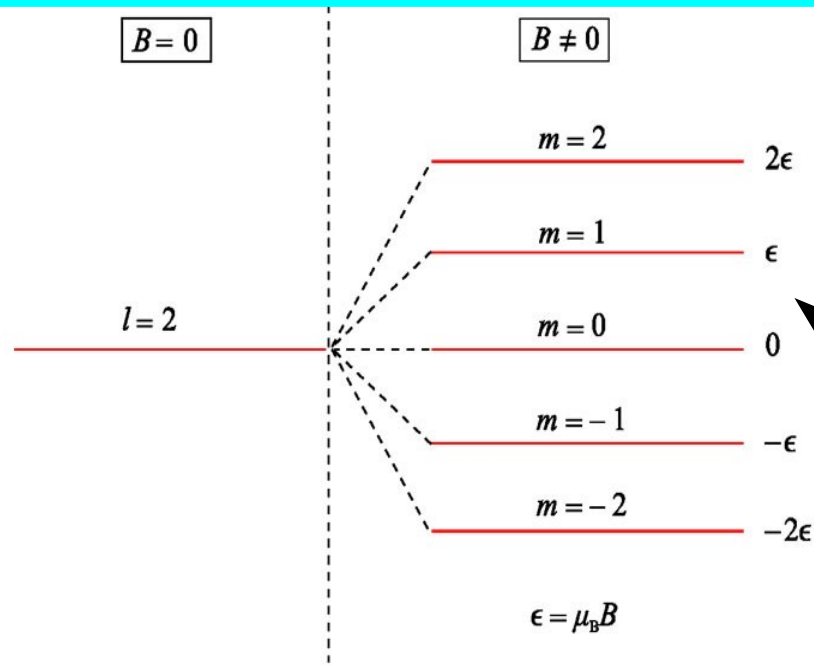
Συμβολισμός καταστάσεων:

$ns, np, nd, nf, \dots$ Π.χ, $2p: (n=2, l=1)$
 $s: l=0; p: l=1; d: l=2; f: l=3, \dots$

Διαφορετικές καταστάσεις $\{n, l, m_l\}$ με ίδια ενέργεια:
εκφυλισμένες καταστάσεις

Κάτω όμως από ποιές συνθήκες, μπορώ να αποκαλύψω ότι έχουμε διαφορετικές καταστάσεις;
(και έτσι να διαπιστώσω ότι δεν είναι απλά μιά μαθηματική υπόθεση;)

Τροχ. Στροφορμή: διαχωρισμός εκφυλισμένων ενεργειακών σταθμών H σε μαγνητικό πεδίο



Ενέργεια λόγω αλληλεπίδρασης του ηλεκτρονίου (της **τροχιακής μαγνητικής ροπής** του, μ) με το μαγνητικό πεδίο B :

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad \vec{B} = B \hat{z}$$

Το ηλεκτρόνιο συμπεριφέρεται σαν μαγνήτης με διπολική μαγνητική ροπή:

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m_e c} \vec{L} = \frac{-e}{2m_e c} \vec{L}$$

$$\mu = \frac{-e}{2m_e c} \hbar \sqrt{l(l+1)}$$

Μαγνητόνη του Bohr, μ_B : $\mu_B \equiv \frac{e \hbar}{2m_e c}$

$$\mu = -\mu_B \sqrt{l(l+1)}$$

$$\mu_z = -\mu_B m_l$$

$$U = m_l (\mu_B B)$$

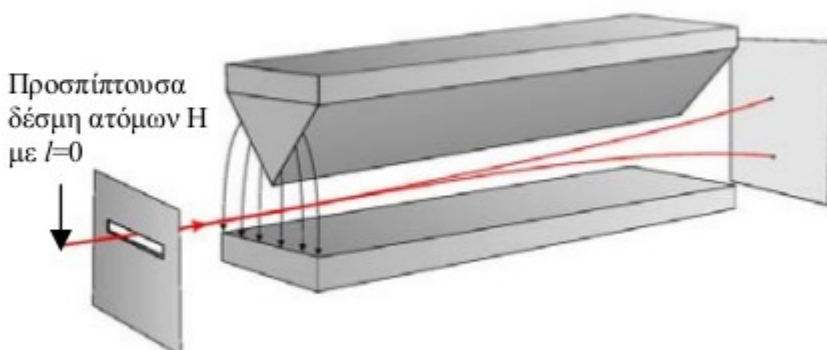
ΣΧΗΜΑ 10.4: Ο διαχωρισμός Zeeman για μια στάθμη με $l = 2$. Η τοποθέτηση του ατόμου σε ένα μαγνητικό πεδίο προκαλεί άρση του περιστροφικού εκφυλισμού μιας στάθμης με κβαντικό αριθμό l , και δημιουργία $2l + 1$ νέων σταθμών συμμετρικά διατεταγμένων ως προς την αρχική και με σταθερή μεταξύ τους απόσταση ίση με $\epsilon = \mu_B B$.

Από τον προκαλούμενο διαχωρισμό των ενεργειακών επιπέδων, μπορούμε π.χ να μετρήσουμε το μαγνητικό πεδίο ενός αστεριού

Η ανάδυση του σπιν (spin): μια “εσωτερική στροφορμή”, “ιδιοστροφορμή”

Το σπιν: Μια καθαρά κβαντική στροφορμή

Οι πειραματικές ενδείξεις για την ύπαρξη μιας εσωτερικής στροφορμής του ηλεκτρονίου

Πείραμα Stern-Gerlach με άτομα Υδρογόνου στη θεμελιώδη τους κατάσταση  Προσπίπτουσα δέσμη ατόμων H με $l=0$ Πειραματικό αποτέλεσμα: Ο αριθμός των κηλίδων στο πέτασμα είναι ίσος με <u>δύο</u>. Η προσπίπτουσα δέσμη χωρίζεται πάντα σε <u>δύο</u>.	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Ο μόνος τρόπος να εξηγηθεί το πειραματικό αποτέλεσμα είναι να υποθεθεί ότι το ηλεκτρόνιο είναι φορέας και μιας εσωτερικής στροφορμής ($\equiv$ <u>σπιν</u>) με παρόμοιες ιδιότητες και πειραματικές εκδηλώσεις όπως η τροχιακή στροφορμή αλλά με τιμή του κβαντικού αριθμού s (το ανάλογο του ℓ) ίση με $\frac{1}{2}$.
---	---

ΜΕΛΕΤΗ: Σ. Τραχανά, *Κβαντομηχανική I*, σελ. 428-437.

Μαγνητική ροπή λόγω ιδιοστροφορμής (spin) και συνεισφορά στην ενέργεια όταν σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B \hat{z}$

- Πρίν λίγο είδαμε τη μαγνητική ροπή που έχει το ηλεκτρόνιο λόγω περιστροφής γύρω από τον πυρήνα (λόγω τροχιακής στροφορμής, l).
- Το ηλεκτρόνιο έχει όμως και μια εσωτερική στροφορμή, μια ιδιοστροφορμή (= spin = σπίν) ανεξάρτητα από το αν κινείται ή όχι. Το σπίν είναι μια ιδιότητα του ηλεκτρονίου, όπως το φορτίο που έχει

$$S = \sqrt{s(s+1)} \hbar, \text{ } \acute{o} \text{ } \pi o v \text{ } s = 1/2$$

$$S_z = m_s \hbar, \text{ } \acute{o} \text{ } \pi o v \text{ } m_s = -1/2, +1/2$$

Λόγω του σπίν, το υδρογόνο έχει μια μαγνητική ροπή μ_s :

$$\vec{\mu}_s = g_e \left(\frac{q}{2 m_e c} \right) \vec{S} = g_e \frac{-e}{2 m_e c} \vec{S} = -g_e \mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar}$$

Το ηλεκτρόνιο είναι στοιχειώδες $\rightarrow g_e = 2$

$$\mu_B \equiv \frac{e \hbar}{2 m_e c} \quad \mu_s = -g_e \mu_B \sqrt{s(s+1)} \quad \mu_{s,z} = -g_e \mu_B m_s$$

Δυναμική ενέργεια λόγω σπιν: $U_s = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} \rightarrow U_s = \pm \mu_B B, \text{ } \gamma\alpha \text{ } m_s = \mp 1/2$

Ολική στροφορμή (J) = τροχιακή (L) + σπίν (S) = “το σπίν” του συστήματος (π.χ., του ατόμου)

- Κάθε ιδιοκατάσταση της ενέργειας, στροφορμής κ' σπιν στο άτομο χαρακτηρίζεται από 5 κβαντικούς αριθμούς $\{n, \ell, s, m_\ell, m_s\}$
 - Για κάθε συγκεκριμένο ℓ , υπάρχουν $(2\ell + 1) * (2s + 1)$ ανεξάρτητες καταστάσεις, Y_{lm}

Ολική στροφορμή J ενός σωματιδίου: άθροισμα τροχιακής στροφορμής και σπίν $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, και $J_z = L_z + S_z$, όπου: $J_z^{max} = \ell + s$

- Η ολική στροφορμή J χαρακτηρίζεται από τον κβαντικό αριθμό j , και η προβολή της κατά τον άξονα z (J_z) από τον κβαντικό αριθμό m_j . Τα J^2 και J_z μπορούν να έχουν ιδιοκαταστάσεις ίδιες με L^2 και S^2 , οπότε μπορώ να χαρακτηρίζω μία κατάσταση από τους εξής κβαντικούς αριθμούς:

$$\{n, \ell, s, j, m_j\}$$

$$J^2 Y_{lm} = j(j+1) \hbar^2 Y_{lm}, \text{ ό που } j = \ell \pm 1/2$$

$$J_z Y_{lm} = m_j \hbar Y_{lm}, \text{ ό που } m_j = -j, \dots, 0, \dots, j$$

Άθροισμα κβαντικών στροφορμών

Ο κανόνας άθροισής τους είναι πάντα ο ίδιος:

- Οι συνειστώσες z απλά προστίθονται (όπως και στα απλά διανύσματα)
- Ο κβαντικός αριθμός της ολικής στροφορμής μπορεί να πάρει τις εξής τιμές:

* από τη διαφορά μέχρι το άθροισμα (με βήμα μονάδα)
των δύο κβαντικών αριθμών των στροφορμών που προστίθονται
(αναλογία με αυτό που γίνεται με το μήκος των απλών διανυσματων)

Άθροισμα τροχιακών στροφορμών: $\vec{L}_{1+2} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$

$$m_{l(1+2)} = m_{l(1)} + m_{l(2)} \text{ και } |l_1 - l_2| \leq l_{1+2} \leq |l_1 + l_2|$$

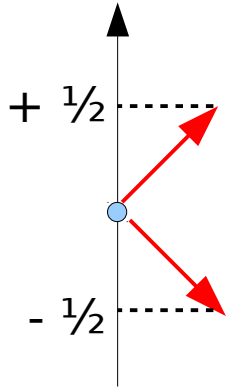
Άθροισμα ιδιοστροφορμών (σπιν): $\vec{S}_{1+2} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$

$$m_{s(1+2)} = m_{s(1)} + m_{s(2)} \text{ και } |s_1 - s_2| \leq s_{1+2} \leq |s_1 + s_2|$$

Άθροισμα τροχιακής στροφορμής και ιδιοστροφορμής: $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

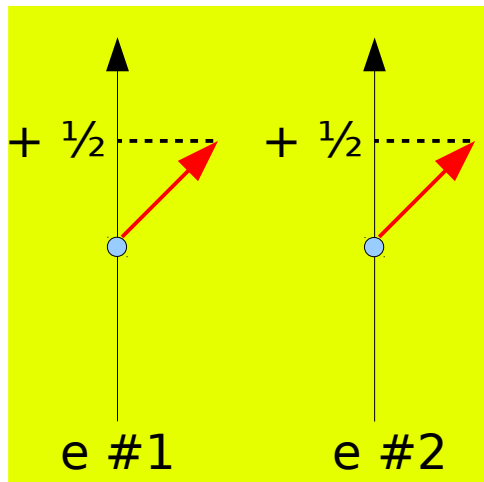
$$m_j = m_l + m_s \text{ και } |l - s| \leq j \leq |l + s|$$

Π.χ: άθροισμα σπιν δύο σωματιδίων με σπιν $\frac{1}{2}$ το καθένα

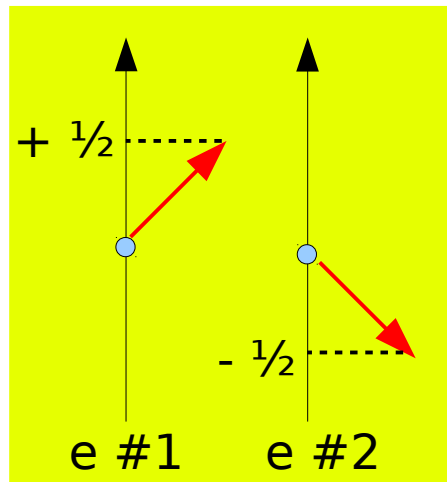


- * Όταν λέμε ότι ένα ηλεκτρόνιο (e) έχει “σπιν $\frac{1}{2}$ ”, εννοούμε ότι ο κβαντικός αριθμός του σπιν, είναι $\frac{1}{2}$, δηλαδή $s = \frac{1}{2}$.
- * Το διάνυσμα του σπιν μπορεί να έχει τους εξής προσανατολισμούς κατά τον άξονα των z: από $-\frac{1}{2}$ έως $+\frac{1}{2}$ με βήμα μονάδα, Δηλαδή, η προβολή μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές $-\frac{1}{2}$ ή $+\frac{1}{2}$

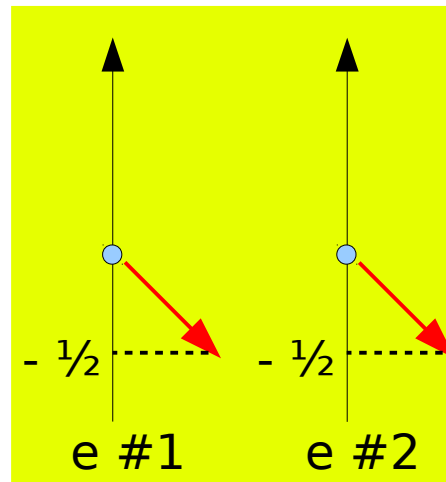
Το ολικό σπιν ενός συστήματος δύο ηλεκτρονίων μπορεί να πάρει τις τιμές:



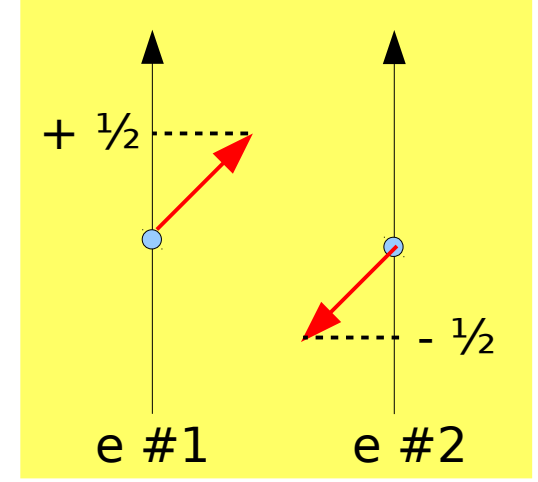
$$m_{s(1+2)} = +1$$



$$m_{s(1+2)} = 0$$



$$m_{s(1+2)} = -1$$



$$m_{s(1+2)} = 0$$

Και στις τρεις αυτές περιπτώσεις το ολικό σπιν έχει μήκος διάφορο του μηδενός:

$$S_{1+2} = 1$$

$$\text{Μήκος του διανύσματος σπιν} = \sqrt{s(s+1)} \hbar$$

Υπάρχει μόνο αυτός ο τρόπος ώστε το ολικό σπιν να έχει μήκος μηδέν:

$$S_{1+2} = 0$$

Ενέργεια: εξάρτηση κι από τροχιακή στροφορμή κι από σπίν

Κάθε ιδιοκατάσταση της ενέργειας, στροφορμής κ' σπιν στο άτομο χαρακτηρίζεται από κβαντικούς αριθμούς $\{n, l, s, j, m_j\}$

Ολική στροφορμή ατόμου: άθροισμα τροχιακής στροφορμής και σπίν

π.χ, για $s=1/2$: $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, $j = l \pm 1/2$

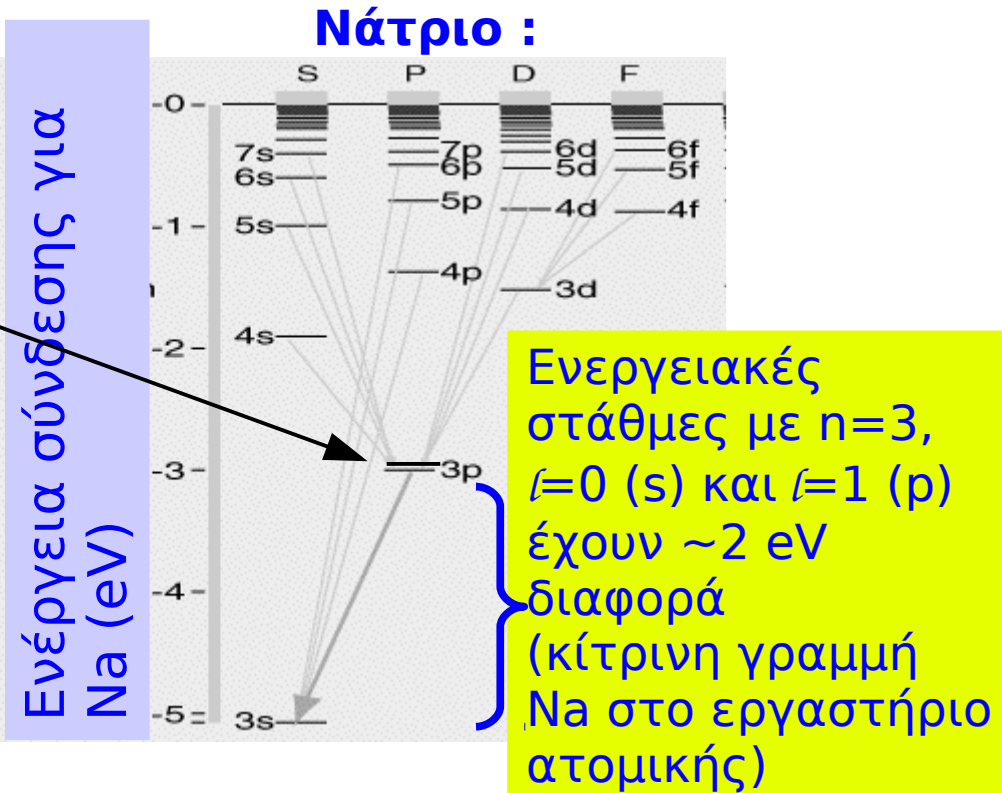
Για $l=1 \rightarrow j = 1 \pm 1/2 = 3/2$ ή $1/2$

Διπλή κίτρινη γραμμή του Νατρίου
(θυμάστε στο εργαστήριο ατομικής;)
Αποτέλεσμα της **σύζευξης σπίν-τροχιάς (Spin-orbit coupling = $L \cdot S$ coupling)**: σύζευξη του σπιν του ηλεκτρονίου με το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το πρωτόνιο, το οποίο θεωρούμε σαν περιστρεφόμενο γύρω από το ηλεκτρόνιο, όταν βρίσκμαστε πάνω στο ηλεκτρόνιο)

Συμβολισμός καταστάσεων:

$ns_J, np_J, nd_J, nf_J, \dots$

Π.χ, $2p_{1/2} : (n=2, l=1, j=1/2)$



1β.

Ακόμα ένας κβαντικός αριθμός:
η ομοτιμία (parity) της
κυματοσυνάρτησης που περιγράφει μια
κατάσταση

Ακόμα ένας κβαντικός αριθμός: Ομοτιμία (parity)

- Είδαμε ότι κάθε ιδιοκατάσταση της ενέργειας, στροφορμής και σπιν στο άτομο χαρακτηρίζεται από κβαντικούς αριθμούς $\{n, l, s, m_l, m_s\}$. **Ο τρόπος που συμπεριφέρεται η αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση σε αναστροφή του χώρου** (που είναι το αποτέλεσμα της εφαρμογής του τελεστή της ομοτιμίας/parity, P , πάνω της) μπορεί να ορίσει κι άλλον έναν κβαντικό αριθμό: την **ομοτιμία ή parity**

$$P(\vec{r}) = -\vec{r} \left\{ \begin{array}{l} P(\psi(\vec{r})) = \psi(-\vec{r}) = \psi(\vec{r}) : \text{άρτια συνάρτηση} \rightarrow \text{Parity} = +1 \\ P(\psi(\vec{r})) = \psi(-\vec{r}) = -\psi(\vec{r}) : \text{περιττή συνάρτηση} \rightarrow \text{Parity} = -1 \end{array} \right.$$

- Κι έτσι γράφουμε το σπίν και την ομοτιμία ως J^π π.χ., κατάσταση $\frac{3}{2}^+$

- Σημείωση:** για κεντρικά δυναμικά, όπου $\psi(\vec{r}) = R(r) Y(\theta, \varphi)$, η πάρτυ της ψ οφείλεται μόνο στις σφαιρικές συναρτήσεις Y_{lm} : $\vec{r} \rightarrow -\vec{r} : P(Y(\theta, \varphi)) = Y(\pi - \theta, \pi + \varphi) = (-1)^l Y(\theta, \varphi)$, οπότε: **Parity = $(-1)^l$**

Είδαμε ότι η ενέργεια ενός συστήματος εξαρτάται
απο τους διάφορους κβαντικούς αριθμούς, μεταξύ
των οποίων και το σπιν του: ΟΚ.

Ερώτηση:

Αφού βλέπουμε ότι η ομοτιμία (parity), είτε είναι +1
είτε -1, αφήνει το $|\psi|^2$ αμετάβλητο, δηλαδή αφήνει
την πιθανότητα ανά μονάδα όγκου αμετάβλητη,
επηρεάζει η ομοτιμία κάτι
μετρήσιμο/παρατηρίσιμο;

→ Βεβαίως και ναι.

Parity: η αναστροφή του χώρου και η Αρχή του Pauli

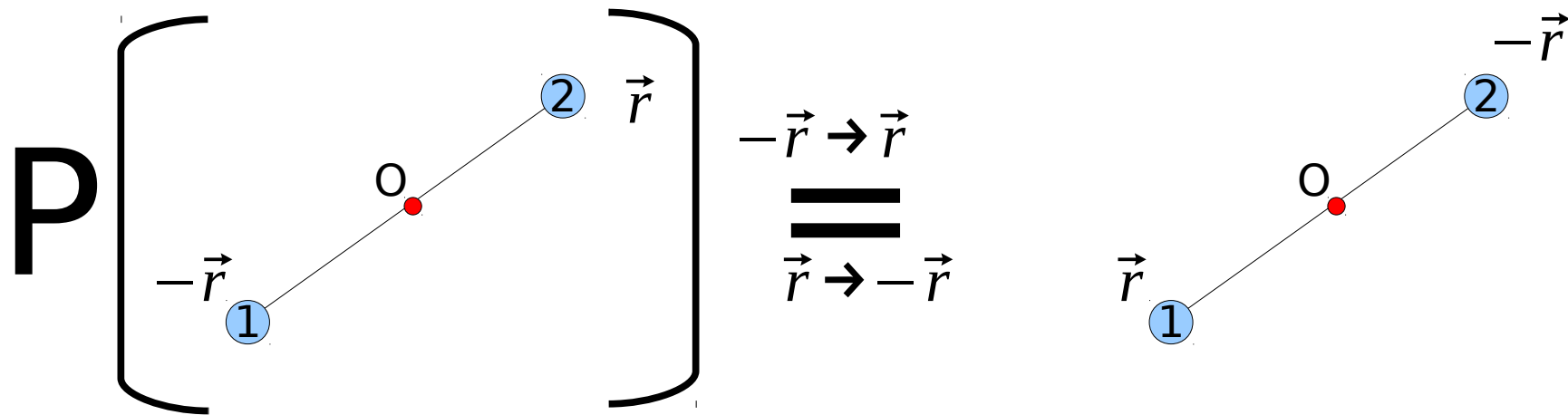
Η απαγορευτική αρχή του Pauli
και η μη διακρίσιμότητα των ταυτόσημων σωματιδίων στην Κβαντομηχανική

Στην «ρίζα» της γενικευμένης αρχής του Pauli βρίσκεται το θεμελιώδες γεγονός ότι στην Κβαντομηχανική τα ταυτόσημα σωματίδια που ανήκουν στο ίδιο φυσικό σύστημα (π.χ. ένα άτομο) είναι μη διακρίσιμα διότι περιγράφονται από αλληλοεπικαλυπτόμενες κυματοσυναρτήσεις, κι επομένως είναι αδύνατον να πούμε ποιο είναι το #1 ποιο είναι το #2 κ.ο.κ. Αυτή η αδυναμία διάκρισης διασφαλίζεται κβαντομηχανικά μόνο με κύματοσυναρτήσεις $\psi(x_1, x_2)$ που είναι συμμετρικές [$\psi(x_2, x_1) = \psi(x_1, x_2)$] ή αντισυμμετρικές [$\psi(x_2, x_1) = -\psi(x_1, x_2)$] κι επομένως οδηγούν σε πιθανότητα $|\psi(x_1, x_2)|^2$ που είναι συμμετρική στην εναλλαγή $x_1 \leftrightarrow x_2$ κι άρα δεν επιτρέπει τη διάκριση των δύο σωματιδίων.

ΜΕΛΕΤΗ: Σ. Τραχανά, Κβαντομηχανική I, σελ. 468 – 480.

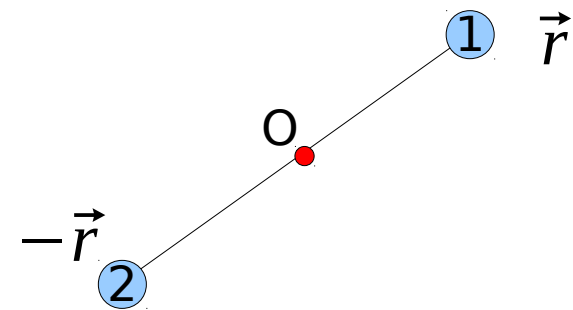
- Όλα τα σωματίδια με ακέραιο σπιν ($s=0, 1, 2, \dots$) - τα αποκαλούμενα **μποζόνια** - περιγράφονται από **συμμετρικές κυματοσυναρτήσεις (Parity = +1)**, ενώ όλα τα σωματίδια με ημι-ακέραιο σπιν ($s=1/2, 3/2, \dots$) - τα αποκαλούμενα **φερμιόνια** - περιγράφονται από **αντισυμμετρικές κυματοσυναρτήσεις (Parity = -1)**
ως προς την εναλλαγή των μεταβλητών τους (=αναστροφή του χώρου)

Parity: για την κυματοσυνάρτηση δύο ταυτόσημων σωματιδίων, η αναστροφή του χώρου είναι ίδια με την ανταλλαγή τους



Με την εφαρμογή της πάριτυ πάνω στην αριστερή κατάσταση (το #1 στη θέση $-r$, και το #2 στη θέση r) έχουμε το #1 στη θέση r , και το #2 στη θέση $-r$:

→ ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα έχουμε και με την ανταλλαγή των σωματιδίων #1 και #2



Ταυτόσημα φερμιόνια: ποτέ με ίδιους κβαντικούς αριθμούς

Η ολική κυματοσυνάρτηση $\Psi_{1,2}$ δύο ταυτόσημων φερμιονίων (του #1 και του #2) είναι γινόμενο των κυματοσυνρτήσεων της θέσης για τα #1 και #2, ψ_1 και ψ_2 , και του ολικού τους σπίν, $X_{1,2}$

Αυτή η ολική κυματοσυνάρτηση είναι αντισυμμετρική, σύμφωνα με την αρχή του Pauli: $\Psi_{2,1} = -\Psi_{1,2}$, αφού έχουμε φερμιόνια

Όπου: $\Psi_{1,2} = \psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2)X_{1,2}(\sigma_{\text{spin}})$ $\Psi_{2,1} = \psi_2(\vec{r}_1)\psi_1(\vec{r}_2)X_{2,1}(\sigma_{\text{spin}})$

Αν τα 2 φερμιόνια είναι με ίδιο προσανατολισμό σπίν (πχ., $+\frac{1}{2}$) τότε, αφού τα δυο φερμιόνια είναι ταυτόσημα και δεν μπορώ να διακρίνω ποιός είναι ο #1 και ποιός ο #2, έχω:

$$X_{1,2}(\sigma_{\text{spin}}) = X_1(\sigma_{\text{spin}} \text{ πάνω}) X_2(\sigma_{\text{spin}} \text{ πάνω}) = X_2(\sigma_{\text{spin}} \text{ πάνω}) X_1(\sigma_{\text{spin}} \text{ πάνω}) = X_{2,1}(\sigma_{\text{spin}})$$

Οπότε: $\psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2) = -\psi_2(\vec{r}_1)\psi_1(\vec{r}_2)$

Θυμηθείτε ότι η $\psi(r, \theta, \phi)$ καθορίζει τους κβαντικούς αριθμούς της ενέργειας και της τροχιακής στροφορμής (n, l, m_l).

Οπότε, αν εκτός από το σπιν έχουν την ίδια "θέση" ($\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}$), δηλαδή του ίδιους άλλους κβαντικούς αριθμούς (n, l, m_l) τότε:

$$\psi_1(\vec{r})\psi_2(\vec{r}) = -\psi_2(\vec{r})\psi_1(\vec{r}) \rightarrow \psi_1(\vec{r})\psi_2(\vec{r}) = 0$$

Και αφού η κυματοσυνάρτησή τους είναι μηδέν, η πιθανότητα να τα βρούμε έτσι είναι μηδέν! → ΔΗΛΑΔΗ: ποτέ δεν τα βρίσκεις με ολόιδιους κβαντικούς αριθμούς

Η απαγορευτική Αρχή του Pauli για τα ατομικά ηλεκτρόνια

Η απαγορευτική αρχή του Pauli για τα ατομικά ηλεκτρόνια:
Μια ειδική συνέπεια της γενικευμένης αρχής

Έχοντας σπιν $s = \frac{1}{2}$ τα ηλεκτρόνια είναι φερμιόνια και επομένως η συνύπαρξή τους στην ίδια κβαντική κατάσταση ενός ατόμου θα είναι αδύνατη. Και δεδομένου ότι μια κβαντική κατάσταση σ' ένα άτομο καθορίζεται μονοσήμαντα από την τετράδα κβαντικών αριθμών n, ℓ, m_ℓ, m_s , η εφαρμογή της γενικής αρχής του Pauli στα άτομα οδηγεί στην:

ΑΠΑΓΟΡΕΥΤΙΚΗ ΑΡΧΗ ΤΟΥ PAULI: Δύο ηλεκτρόνια σ' ένα άτομο είναι αδύνατον να έχουν την ίδια τετράδα κβαντικών αριθμών n, ℓ, m_ℓ, m_s . Θα διαφέρουν τουλάχιστον σε ένα κβαντικό αριθμό.

Παρατηρίσιμο λοιπόν το πώς συμπεριφέρεται το σύστημα σε μετασχηματισμούς πάριτυ;

Ναι, γιατί αφού τα ηλεκτρόνια είναι φερμιόνια, και άρα έχουν αντισυμμετρικές κυματοσυναρτήσεις ως προς την εναλλαγή τους, και άρα δεν μπορούν να έχουν όλους τους κβαντικούς αριθμούς ίδιους....

... έτσι ακριβώς εξηγούμε τη δομή των ατόμων:

με τα ηλεκτρόνιά τους κατανεμημένα σε διάφορες “στοιβάδες” για να έχουν διαφορετικούς κβαντικούς αριθμούς.

Parity και η Αρχή του Pauli : ο κόσμος των μποζονίων και των φερμιονίων

Το σπιν και η γενικευμένη αρχή του Pauli

Φερμιόνια και Μποζόνια:

Οι δύο θεμελιώδεις κατηγορίες σωματιδίων και ο ρόλος τους στη φύση

	Σπιν	Είδος συμπεριφοράς	Ποια είναι ποια	...και γιατί
Φερμιόνια	Ημιακέραιο $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$	«Ατομικιστική» Υπόκεινται στην αρχή του Pauli (είναι αδύνατη η συνύπαρξη τους στην ίδια κβαντική κατάσταση). Περιγράφονται από <u>αντισυμμετρικές κυμ/σεις</u> .	Όλα τα σωματίδια <u>δομικοί λίθοι</u> της ύλης. (e, p, n, ν κουάρκς). Όλα έχουν $s = \frac{1}{2}$	Διαφορετικά θα ήταν δυνατή η απεριόριστη συσσώρευσή τους στην ίδια περιοχή του χώρου υπό την επίδραση των αμοιβαίων έλξεων, με αποτέλεσμα την πλήρη κατάρρευση της ύλης σε μια «σταγόνα» άπειρης πυκνότητας.
Μποζόνια	Ακέραιο $s = 0, 1, 2, \dots$	«Κολλεκτιβιστική» Δεν υπόκεινται στην αρχή του Pauli (Είναι δυνατή η απεριόριστη συνύπαρξη τους στην ίδια κβαντική κατάσταση) περιγράφονται από <u>συμμετρικές κυμ/σεις</u> .	Όλα τα σωματίδια <u>φορείς δυνάμεων</u> της φύσης (γ , $w^\pm$, z, γλοιόνια, βαρυτόνιο). Όλα έχουν $s = 1$ πλήν του βαρυτονίου που (εικάζεται ότι) έχει $s = 2$.	Έτσι είναι δυνατή η απεριόριστη συνύπαρξη τους στην ίδια κβαντική κατάσταση και η δημιουργία μ' αυτό τον τρόπο ενός μακροσκοπικού πεδίου δυνάμεων (ΗΜ πεδίο, πεδίο βαρύτητας, πυρηνικά πεδία).

1γ.

Αντίστοιχοι κβαντικοί αριθμοί
ορίζονται και στο δέσμιο σύστημα
που μας απασχολεί –
τους πυρήνες

Spin και πάριτυ ενός πυρήνα (J και πάριτυ: J^π)

- Σπιν πυρήνα, J = ολικό τροχιακό σπίν των νουκλεονίων + το άθροισμα των σπιν τους.

$$\vec{J}_{\text{πυρήνα}} \equiv \sum_{\text{νουκλεόνια}} \vec{L} + \sum_{\text{νουκλεόνια}} \vec{S} = \sum_{\text{νουκλεόνια}} (\vec{L} + \vec{S})$$

- Parity = +1 ή -1

- Οπότε για κάθε πυρήνα δίνουμε σπιν (J) και parity (π): **J^π**

π.χ., 2⁺