

Πυρηνική Φυσική και Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων (5ου εξαμήνου, χειμερινό)

Τμήμα Τ2: Κ. Κορδάς & Δ. Σαμψωνίδης

Μάθημα 9 & 10

Μοντέλο σταγόνας: “Ημιεμπειρικός τύπος μάζας” (ή
τύπος του Weizacker).

Κοιλάδα β-σταθερότητας

Κώστας Κορδάς

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Πυρηνική & Στοιχειώδη, Αριστοτέλειο Παν. Θ/νίκης

Σήμερα

- **Ημιεμπειρικός τύπος μάζας πυρήνων και κοιλάδα β-σταθερότητας**
 - Βιβλίο C&G, Κεφ. 4, παρ. 4.5-4.7.
 - Βιβλίο Χ. Ελευθεριάδη, Κεφ. 4.3 και 4.4
 - Σημειώσεις Πυρηνικής, Κεφ. 3, παρ 3.2, 3.3
- **Ενέργεια σύνδεσης πυρήνων και “Q-values” από α-διάσπαση και σχάση**
 - Υπολογισμός από ημιεμπειρικό τύπο
 - Σύγκριση με πειραματικές τιμές για α-διάσπαση
 - Βιβλίο C&G, Κεφ. 4, παρ. 4.8 & Κεφ. 6, παρ. 6.1
- **Ιστοσελίδα:** <http://www.physics.auth.gr/course/show/125>

Μάζα και ενέργεια σύνδεσης πυρήνων

- **Ενέργεια σύνδεσης = $B(N,Z)$**

- Η μάζα ενός πυρήνα είναι μικρότερη από το άθροισμα των μαζών των νουκλεονίων που περιέχει. Μεγάλη ενέργεια σύνδεσης → μικρή μάζα → σταθερότερος πυρήνας:

$$M_{\text{πυρήνα}} = \sum m (\text{ελεύθερα νουκλεόνια}) - B(N,Z)$$

Table 4.2. Energies of some light nuclei

Πίνακας 4.2 του βιβλίου C&G

Nucleus	Binding energy (MeV)	Binding energy of last nucleon (MeV)	Binding energy per nucleon (MeV)	Spin and parity
^1_1H	2.22	2.2	1.1	1^+
^2_1H	8.48	6.3	2.8	$\frac{1}{2}^+$
^3_1H	28.30	19.8	7.1	0^+
^3_2He	27.34	-1.0	5.5	$\frac{3}{2}^-$
^4_2He	31.99	4.7	5.3	1^+
^6_3Li	39.25	7.3	5.6	$\frac{3}{2}^-$
^7_3Li	56.50	17.3	7.1	0^+
^8_4Be	58.16	1.7	6.5	$\frac{3}{2}^-$
$^{10}_5\text{B}$	64.75	6.6	6.5	3^+
$^{11}_5\text{B}$	76.21	11.5	6.9	$\frac{3}{2}^-$
$^{12}_6\text{C}$	92.16	16.0	7.7	0^+
$^{13}_6\text{C}$	97.11	5.0	7.5	$\frac{1}{2}^-$
$^{14}_7\text{N}$	104.66	7.6	7.5	1^+
$^{15}_7\text{N}$	115.49	10.8	7.7	$\frac{1}{2}^-$
$^{16}_8\text{O}$	127.62	12.1	8.0	0^+
$^{17}_8\text{O}$	131.76	4.1	7.8	$\frac{5}{2}^+$

Πειραματικές τιμές

^2_1H : 2.22 MeV
 ^3_1H : 8.48 MeV
 ^3_2He : 7.72 MeV

Προσπάθεια εκτίμησης των ενεργειών σύνδεσης: **μοντέλο της σταγόνας** → **ημιεμπειρικός τύπος μάζας του Weitzacker**

Ημ εμπειρικός τύπος μάζας πυρήνων

- **Ενέργεια σύνδεσης πυρήνα = $B(N,Z)$**
 - **συνάρτηση και του Z και του N**
 - και τα δύο είδη νουκλεονίων (n , p) παίζουν ρόλο
 - όχι όπως στά άτομα που φτάνει μόνο το Z γιατί έχουμε να κάνουμε μόνο με ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις

Ενέργεια σύνδεσης όλου του πυρήνα, B, ("ημιαμπειρικός τύπος μάζας")

$$B(Z,N) =$$

$a A$	(όγκου)
$- b A^{2/3}$	(επιφάνειας)
$- s (N-Z)^2 / A$	(ασυμμετρίας)
$- d Z^2 / A^{1/3}$	(Coulomb)
$- \delta / A^{1/2}$	(ζευγαρώματος)

$$a=15.835 \text{ MeV} , \quad b=18.33 \text{ MeV}$$

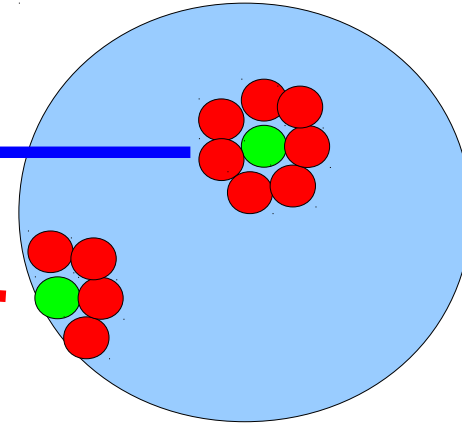
$$s=23.20 \text{ MeV} , \quad d=0.714 \text{ MeV}$$

$$\delta = \begin{cases} +11.2 \text{ MeV} & \text{περιτοί-περιτοί (Z περιττό και N περιττό)} \\ 0 & \text{περιτοί-άρτιοι (π.χ: Z άρτιο και N περιττό)} \\ -11.2 \text{ MeV} & \text{άρτιοι-άρτιοι (Z άρτιο και N άρτιο)} \end{cases}$$

Ενέργεια σύνδεσης όλου του πυρήνα, B

$$B(Z,N) =$$

$$\begin{aligned} & a A \\ & - b A^{2/3} \\ & - s (N-Z)^2 / A \\ & - d Z^2 / A^{1/3} \\ & - \delta / A^{1/2} \end{aligned}$$



Ευνοούνται τα ζεύγη p-n
(μεγαλύτερη ενέργεια σύνδεσης
όταν $Z=N$)

Η άπωση Coulomb μεταξύ των
πρωτονίων έχει διαλυτικές τάσεις

$$a=15.835 \text{ MeV} , \quad b=18.33 \text{ MeV}$$

$$s=23.20 \text{ MeV} , \quad d=0.714 \text{ MeV}$$

$$\delta = \begin{cases} +11.2 \text{ MeV} & \text{περιτοί-περιτοί (Z περιττό και N περιττό)} \\ 0 & \text{περιτοί-άρτιοι (π.χ: Z άρτιο και N περιττό)} \\ -11.2 \text{ MeV} & \text{άρτιοι-άρτιοι (Z άρτιο και N άρτιο)} \end{cases}$$

Επιφάνεια πυρήνα-σταγόνας. Ηλεκτροστατική άπωση

$$V = \text{const} * A \rightarrow \frac{4}{3} \pi R^3 = \text{const} \times A \rightarrow R^3 \propto A \rightarrow R \propto A^{\frac{1}{3}}$$

$$\rightarrow R = R_0 * A^{1/3} \rightarrow R = 1.1 \text{ fm} \times A^{\frac{1}{3}}$$

- Επιφάνεια $= 4\pi R^2 = 4\pi R_0^2 * A^{2/3}$
- Ηλεκτροστατική ενέργεια (E_c) σταγόνας με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο Ze στον όγκο της:

$$E_c = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R} = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R_0 A^{1/3}} = 0.79 \text{ MeV} \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

Ενέργεια σύνδεσης ανά νουλεόνιο: B/A

$$B(Z,N) / A =$$

a

$$- b / A^{1/2}$$

$$- s (N-Z)^2 / A^2$$

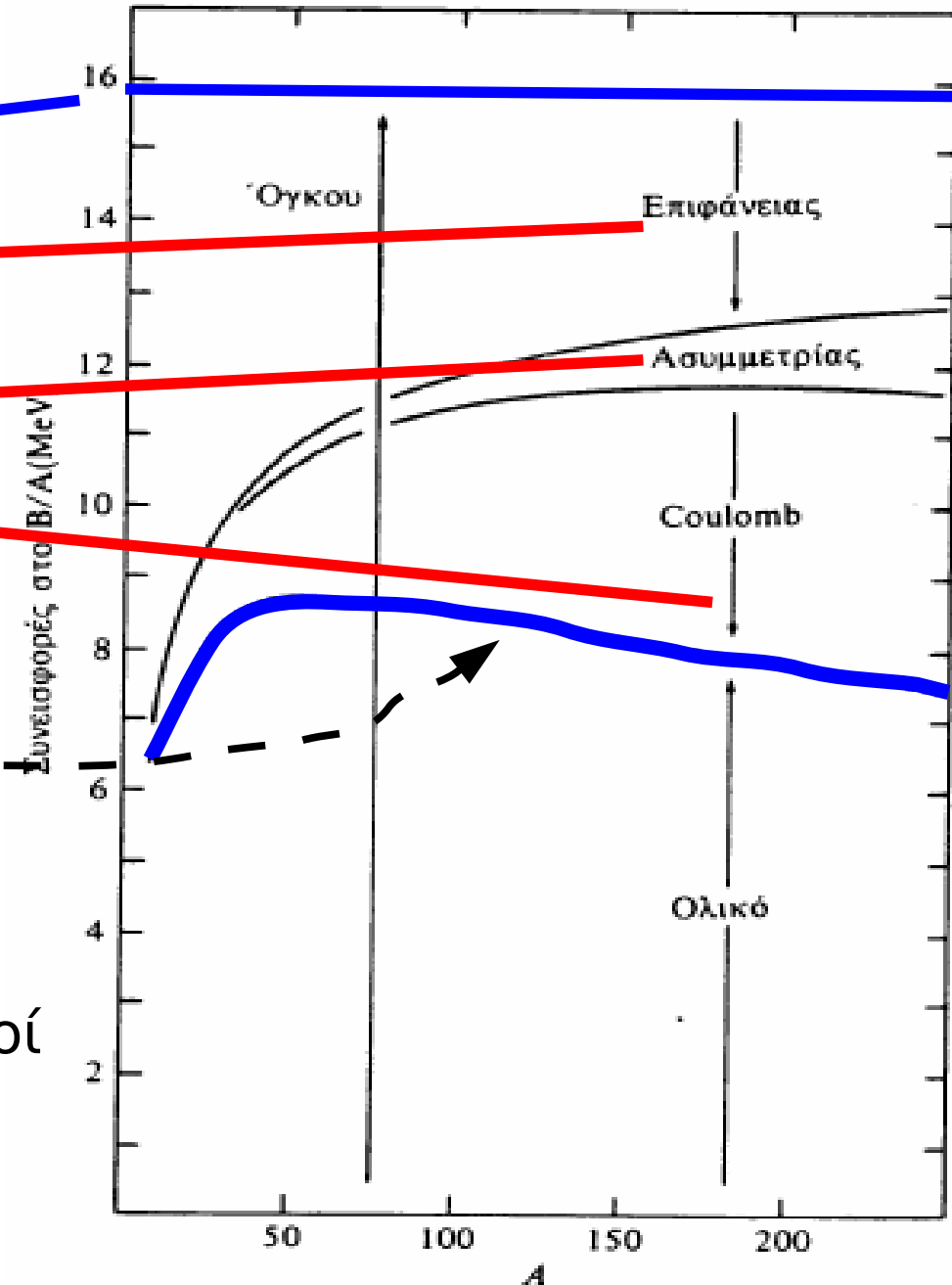
$$- d Z^2 / A^{4/3}$$

$$- \delta / A^{3/2}$$

$$a = 15.835 \text{ MeV} , \quad b = 18.33 \text{ MeV}$$

$$s = 23.20 \text{ MeV} , \quad d = 0.714 \text{ MeV}$$

$$\delta = \begin{cases} +11.2 \text{ MeV} & \text{περιτοί-περιτοί} \\ 0 & \text{περιτοί-άρτιοι} \\ -11.2 \text{ MeV} & \text{άρτιοι-άρτιοι} \end{cases}$$



Ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο, B/A

$$B(Z,N) / A =$$

a

$$- b / A^{1/3}$$

$$- s (N-Z)^2 / A^2$$

$$- d Z^2 / A^{4/3}$$

$$- \delta / A^{3/2}$$

$$a = 15.835 \text{ MeV} , \quad b = 18.33 \text{ MeV}$$

$$s = 23.20 \text{ MeV} , \quad d = 0.714 \text{ MeV}$$

$$\delta = \begin{cases} +11.2 \text{ MeV} & \text{περιτοί-περιτοί} \\ 0 & \text{περιτοί-άρτιοι} \\ -11.2 \text{ MeV} & \text{άρτιοι-άρτιοι} \end{cases}$$

← Άρτιο Z, άρτιο N



Ενέργεια σύνδεσης - ημιεμπειρικός τύπος

Υπολογισμός από ημιεμπειρικό τύπο:

- $B(^4_2\text{He}) = B(Z=2, N=2) = 20.95 \text{ MeV}$
- $B(^8_4\text{Be}) = B(Z=4, N=4) = 51.6 \text{ MeV}$
- $B(^{12}_6\text{O}) = B(Z=6, N=6) = 121.64 \text{ MeV}$

Πειραματική τιμή (πίνακας 4.2)

(28.30 MeV)

(56.5 MeV)

(127.62 MeV)

Υπολογισμός από ημιεμπειρικό τύπο

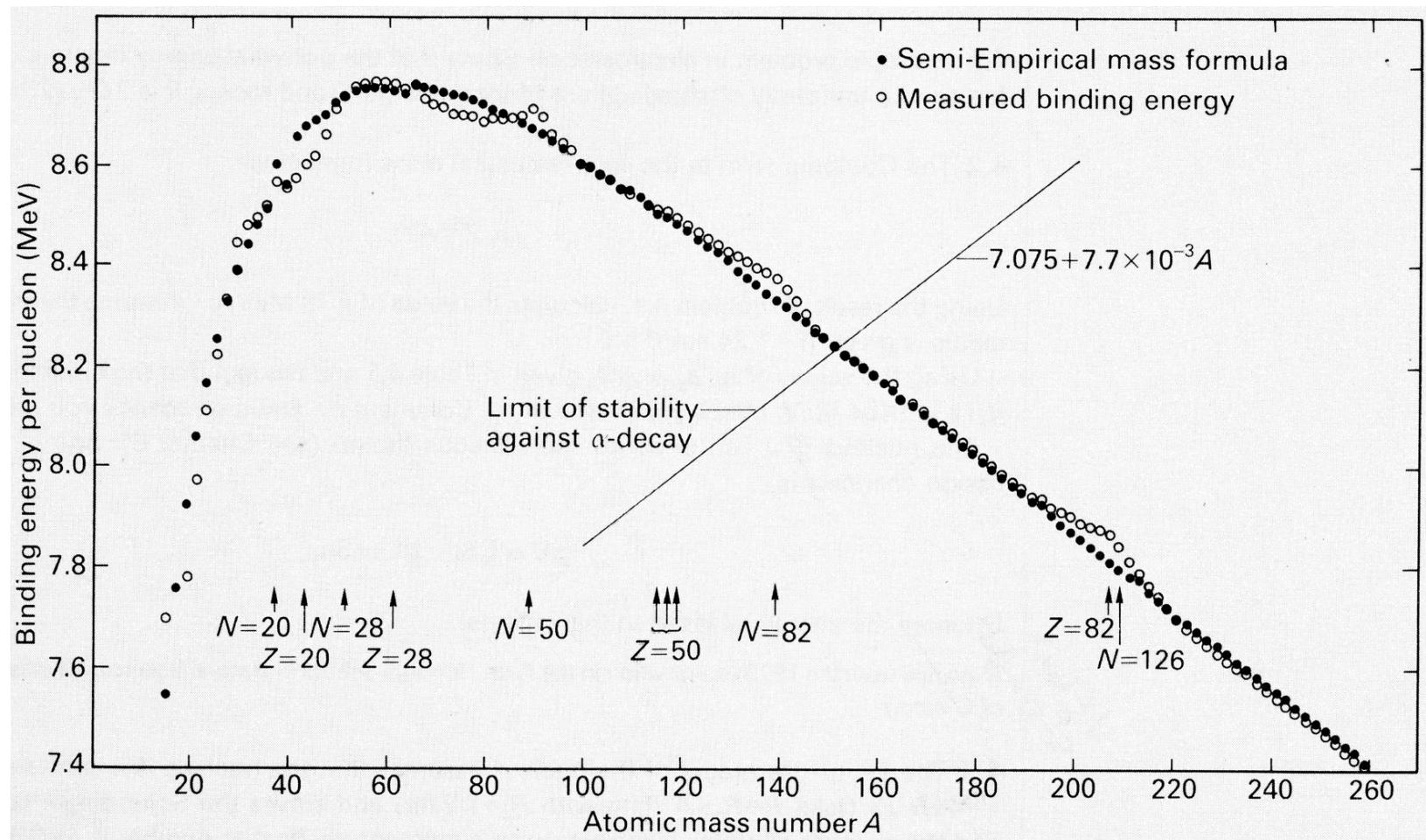
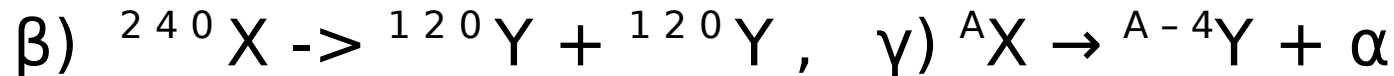
ΠΡΟΣΟΧΗ: Η περιγραφή είναι γενικά καλή αλλά όχι τέλεια!

Δεν φτάνει μόνο ο ημιεμπειρικός τύπος.

Ο πυρήνας δέν είναι μια υγρή σταγόνα. Υπάρχουν κι άλλα πράγματα που πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν μας (“φλοώδη” δομή των πυρήνων). Όχι μόνο απλά τον αριθμό πρωτονίων και νετρονίων.

Ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο (B/A) - μεταβάλλοντας το A

Τι κερδίζουμε συνθέτοντας και αποσυνθέτοντας πυρήνες?



Ενέργεια σύνδεσης B/A – συνάρτηση μόνο του A; (1)

$$B(Z,N) / A =$$

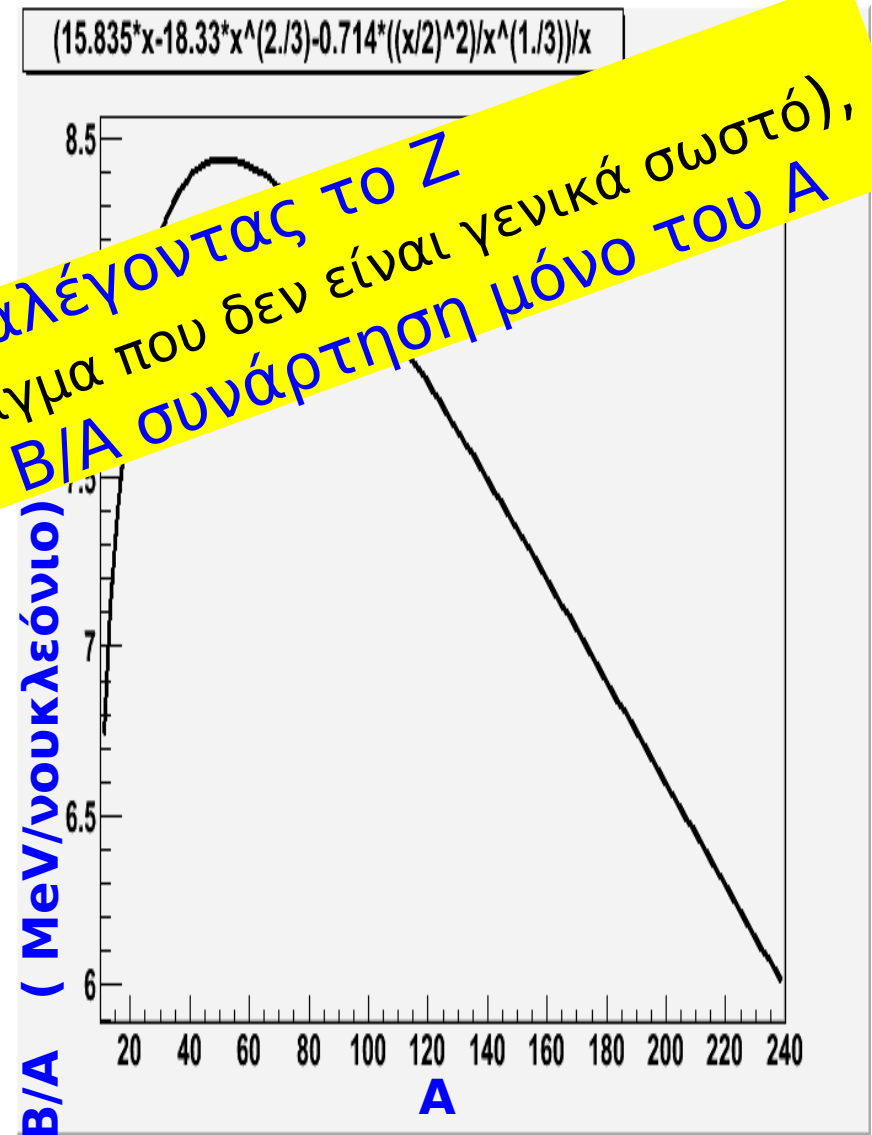
a

- $b / A^{1/3}$
- $s (N-Z)^2 / A^2$
- $d Z^2 / A^{4/3}$
- $\delta / A^{3/2}$

$$a=15.835 \text{ MeV} , \quad b=18.33 \text{ MeV}$$

$$s=23.20 \text{ MeV} , \quad d=0.714 \text{ MeV}$$

$$\delta = \begin{cases} +11.2 \text{ MeV} & \text{περιτοί-περιτοί} \\ 0 & \text{περιτοί-άρτιοι} \\ -11.2 \text{ MeV} & \text{άρτιοι-άρτιοι} \end{cases}$$



Ενέργεια σύνδεσης B/A – συνάρτηση μόνο του A ; (2)

$$B(Z,N) / A =$$

a

- $b / A^{1/3}$
- $s (N-Z)^2 / A^2$
- $d Z^2 / A^{4/3}$
- $\delta / A^{3/2}$

$$a = 15.835 \text{ MeV} , \quad b = 18.33 \text{ MeV}$$

$$s = 23.20 \text{ MeV} , \quad d = 0.714 \text{ MeV}$$

$$\delta = \begin{cases} +11.2 \text{ MeV} & \text{περιτοί-περιτοί} \\ 0 & \text{περιτοί-άρτιοι} \\ -11.2 \text{ MeV} & \text{άρτιοι-άρτιοι} \end{cases}$$



Ποιό Z διαλέξαμε όμως για τη σωστή περιγραφή;

Άρτιο Z , άρτιο N

Κοιλάδα β-σταθερότητας

“Το σταθερότερο Z για κάθε A ”

(Δηλαδή: Αν μας έλεγαν
“φτιάξτε πυρήνες με μόνο περιορισμό
το άθροισμα πρωτονίων και νετρονίων
να είναι A ”,
ποιό Z θα διαλέγατε ως
το “καλύτερο”;
Το $Z=0$, το $Z=A$, το $Z=A/2$, ποιό;

Κοιλάδα β-σταθερότητας: Για κάθε A, ποιό Z δίνει το σταθερότερο στοιχείο;

- Ενέργεια σύνδεσης του πυρήνα:

$$B(Z,N) = a A - b A^{2/3} - s (N-Z)^2 / A - d Z^2 / A^{1/3} - \delta / A^{1/2}$$

Κοιλάδα β-σταθερότητας: Για κάθε A, ποιό Z δίνει το σταθερότερο στοιχείο;

- Ενέργεια σύνδεσης του πυρήνα:

$$B(Z,N) = a A - b A^{2/3} - s (N-Z)^2 / A - d Z^2 / A^{1/3} - \delta / A^{1/2}$$

Αντικαθιστώντας $N=A-Z$, έχουμε $B(A,Z)$ αντί για $B(Z,N)$:

$$B(A,Z) = a A - b A^{2/3} - s (A-2Z)^2 / A - d Z^2 / A^{1/3} - \delta / A^{1/2}$$

Κοιλάδα β-σταθερότητας: Για κάθε A, ποιό Z δίνει το σταθερότερο στοιχείο;

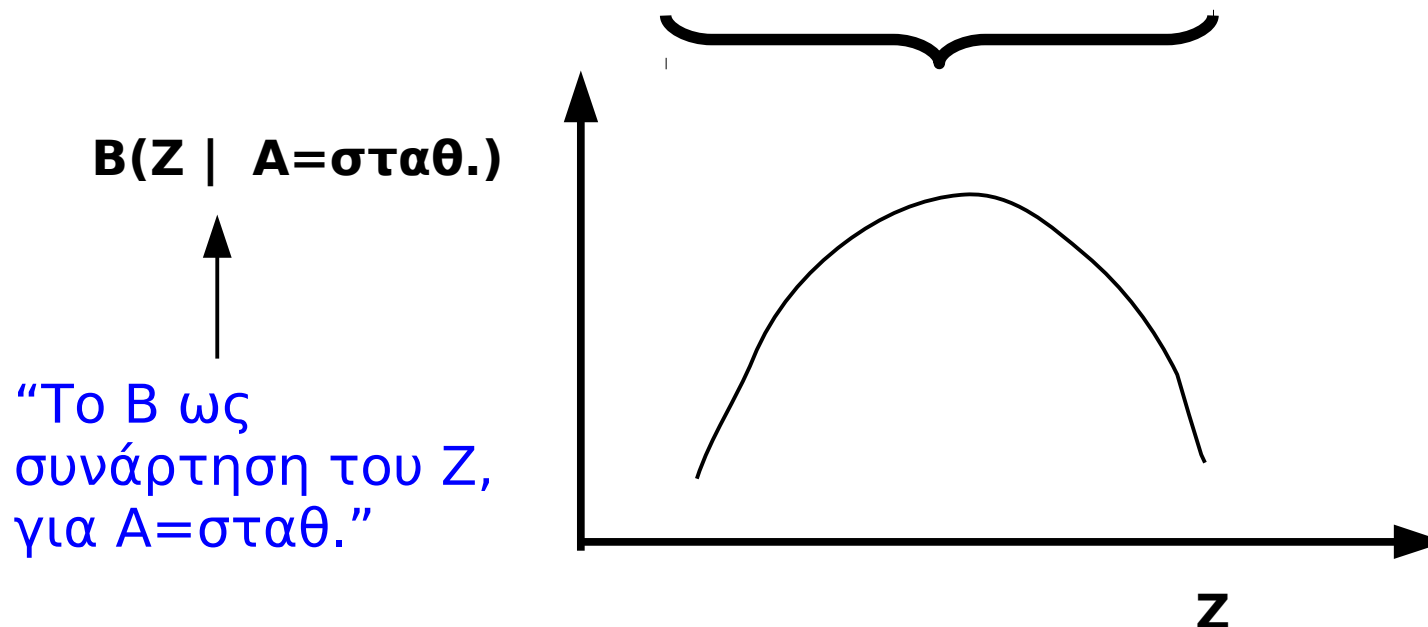
- Ενέργεια σύνδεσης του πυρήνα:

$$B(Z,N) = a A - b A^{2/3} - s (N-Z)^2 / A - d Z^2 / A^{1/3} - \delta / A^{1/2}$$

Αντικαθιστώντας $N=A-Z$, έχουμε $B(A,Z)$ αντί για $B(Z,N)$:

$$B(A,Z) = a A - b A^{2/3} - s (A-2Z)^2 / A - d Z^2 / A^{1/3} - \delta / A^{1/2}$$

$$\rightarrow B(A,Z) = c_1 + c_2 * Z + c_3 * Z^2 = \text{παραβολή (για } A=\text{σταθ.)}$$



β-σταθερό = το σταθερότερο Z σε κάθε A: είναι αυτό με τη μέγιστη ενέργεια σύνδεσης

- Μέγιστο $B(A,Z)$, για κάθε A=σταθερό:

$$\frac{\partial B(A,Z)}{\partial Z} = 0 \Rightarrow \frac{-2dZ}{A^{1/3}} - \frac{2s(A-2Z) \cdot (-2)}{A} = 0 \Rightarrow \frac{4s(A-2Z)}{A} = \frac{2dZ}{A^{1/3}}$$

$$\Rightarrow 2s(A-2Z) = dZA^{2/3} \Rightarrow Z(4s + dA^{2/3}) = 2sA \Rightarrow Z = \frac{2sA}{4s + dA^{2/3}}$$

- Άρα το Z που δίνει το μέγιστο $B(A,Z)$, για κάθε A είναι:

$$Z = \frac{A}{2 + (d/2s) A^{2/3}}$$

$$s = 23.20 \text{ MeV}, \quad d = 0.714 \text{ MeV}$$

$$Z = \frac{A}{2 + 0.0154 A^{2/3}}$$

$$Z < A/2$$

Κοιλάδα β-σταθερότητας: Για κάθε A, ποιό Z δίνει το σταθερότερο στοιχείο;

- Αν λάβουμε υπ' όψιν το άτομο ως σύνολο, με μάζα $M(A,Z)$:

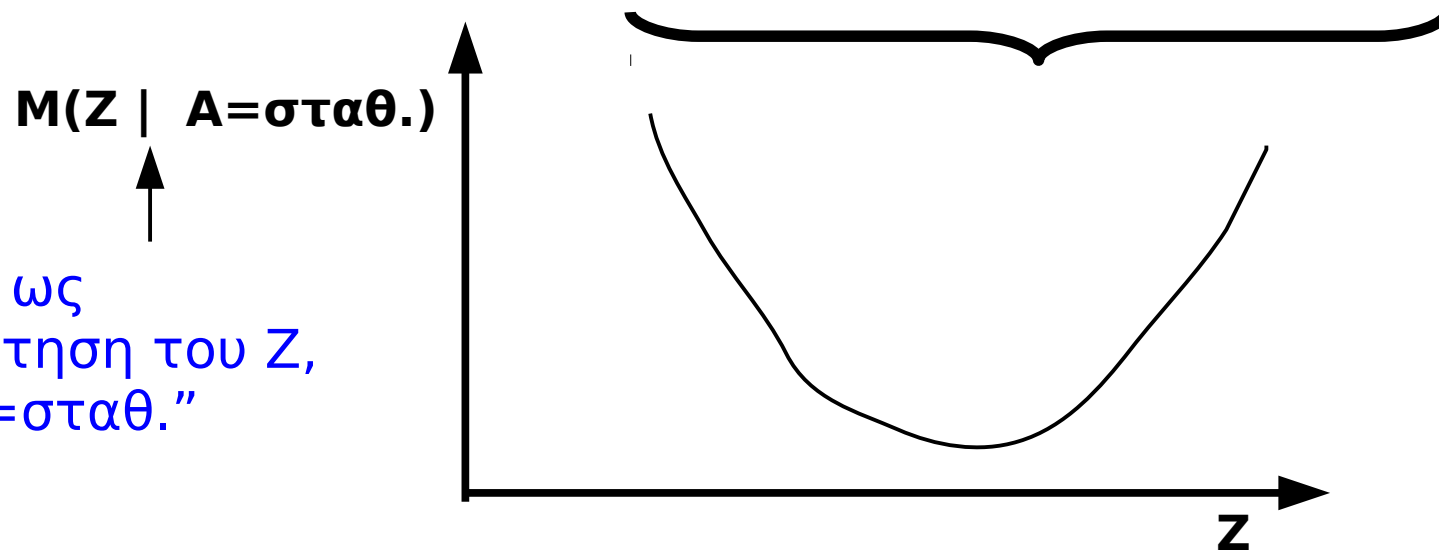
$$M(A,Z) = \Sigma m - B(A,Z) - \overset{0}{\text{B(Coulomb ηλεκτρονίων)}}$$

- $B(\text{Coulomb ηλεκτρονίων}) \sim 0$ (τάξη μεγέθους eV, ενώ στον πυρήνα έχουμε MeV)

$$\Rightarrow M(A,Z) = Z m_p + Z m_e + (A-Z) m_n -$$

$$[a A - b A^{2/3} - s (A-2Z)^2 / A - d Z^2 / A^{1/3} - \delta / A^{1/2}]$$

→ $M(A,Z)$ = άλλη παραβολή ως προς Z για A=σταθ.



“Το M ως
συνάρτηση του Z,
για A=σταθ.”

β-σταθερό = το σταθερότερο Z σε κάθε A: ελάχιστη μάζα (ενέργεια) ατόμου

- Ελάχιστη μάζα $M(A,Z)$ για κάθε A=σταθερό:

Για συγκεκριμένο A και δ (π.χ., δ=0), το Z που δίνει ελάχιστη μάζα είναι:

$$Z = \beta/2\gamma = \frac{(4s + (m_n - m_p - m_e)c^2)A}{2(4s + dA^{2/3})}.$$

(4.9)

Στο
βιβλίο
σας

- Άρα το Z που δίνει την ελάχιστη $M(A,Z)$, για κάθε A είναι:

$$m(n) = 939.57 \text{ MeV} / c^2$$

$$m(p) = 938.27 \text{ MeV} / c^2$$

$$m(e) = 0.511 \text{ MeV} / c^2$$

$$s=23.20 \text{ MeV} \quad , \quad d=0.714 \text{ MeV}$$

$$Z = \frac{A}{1.983 + 0.0153 A^{2/3}}$$

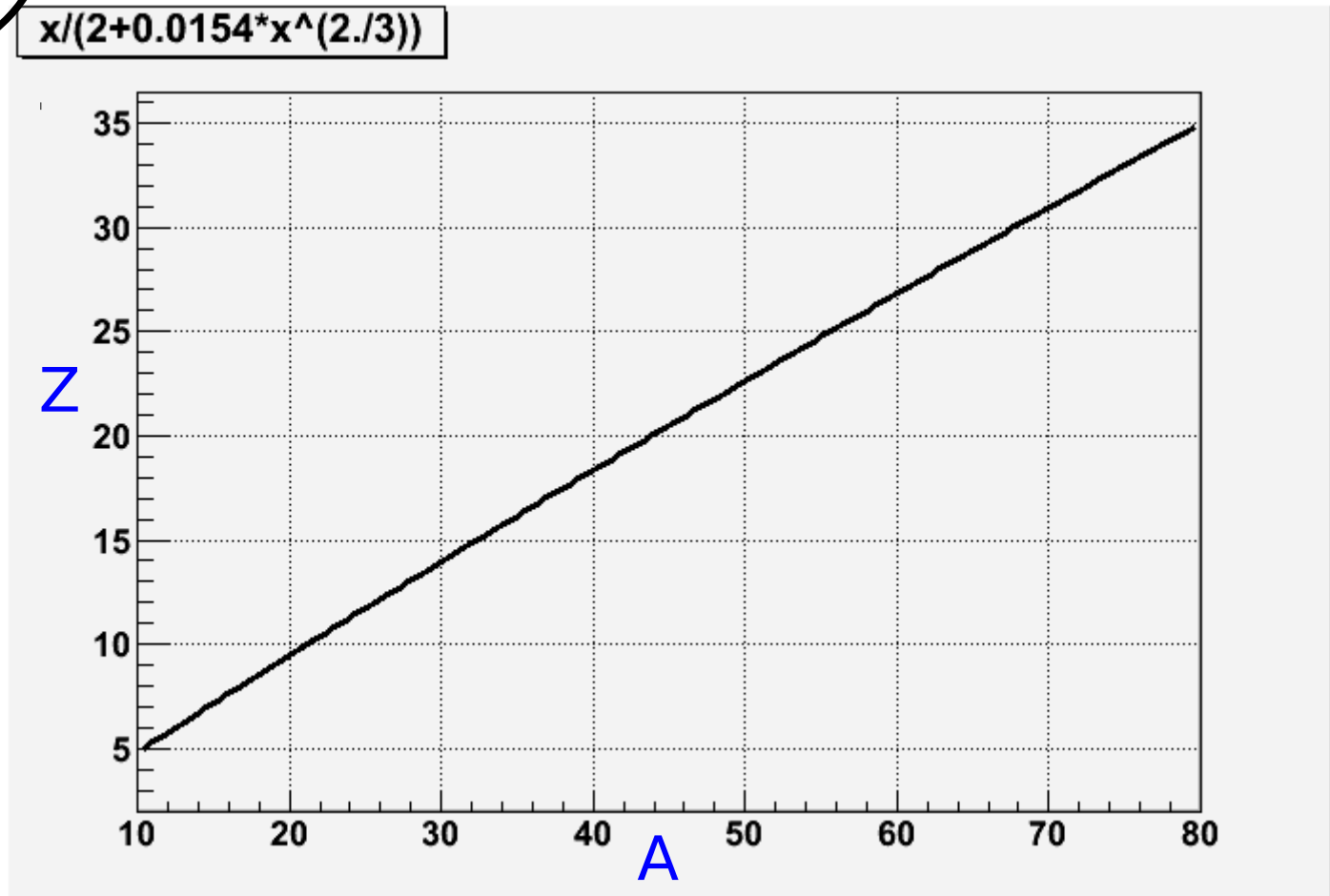
$$Z < A/2$$

β-σταθερό = το σταθερότερο Z σε κάθε A:
ελάχιστη μάζα (ενέργεια) ατόμου

$$Z = \frac{A}{1.983 + 0.0153 A^{2/3}}$$

$$Z < A/2$$

Όντως, σε κάθε A,
είναι $Z < A/2$:



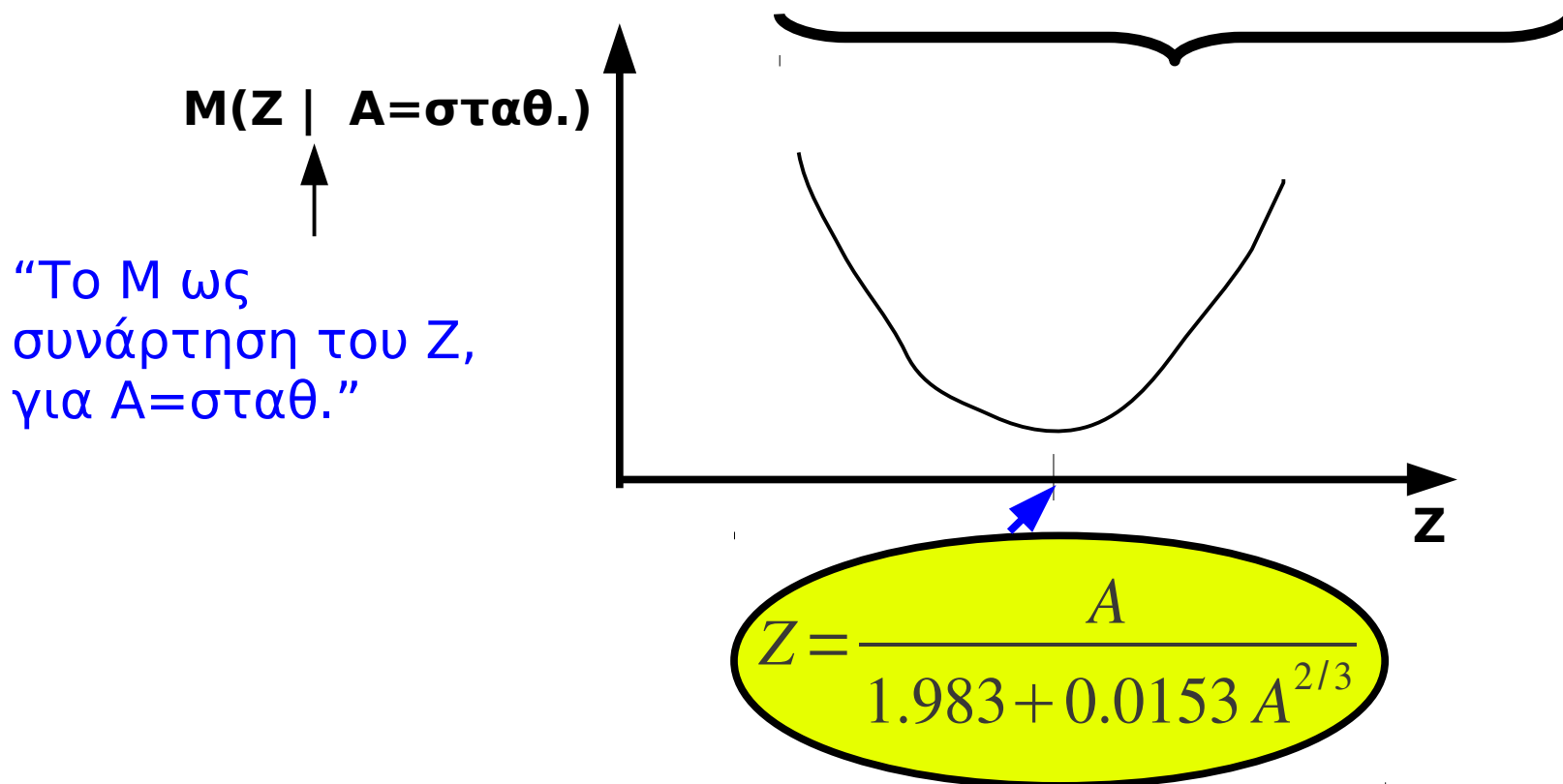
Κοιλάδα β-σταθερότητας: Για κάθε A, ποιό Z δίνει το σταθερότερο στοιχείο;

- Αν λάβουμε υπ' όψιν το άτομο ως σύνολο, με μάζα $M(A,Z)$:

$$M(A,Z) = Z m_p + Z m_e + (A-Z) m_n - B(\text{Coulomb} \text{ ηλεκτρονίων})$$

$$- [a A - b A^{2/3} - s (A-2Z)^2 / A - d Z^2 / A^{1/3} - \delta / A^{1/2}]$$

→ $M(A,Z)$ = άλλη παραβολή ως προς Z για A=σταθ.



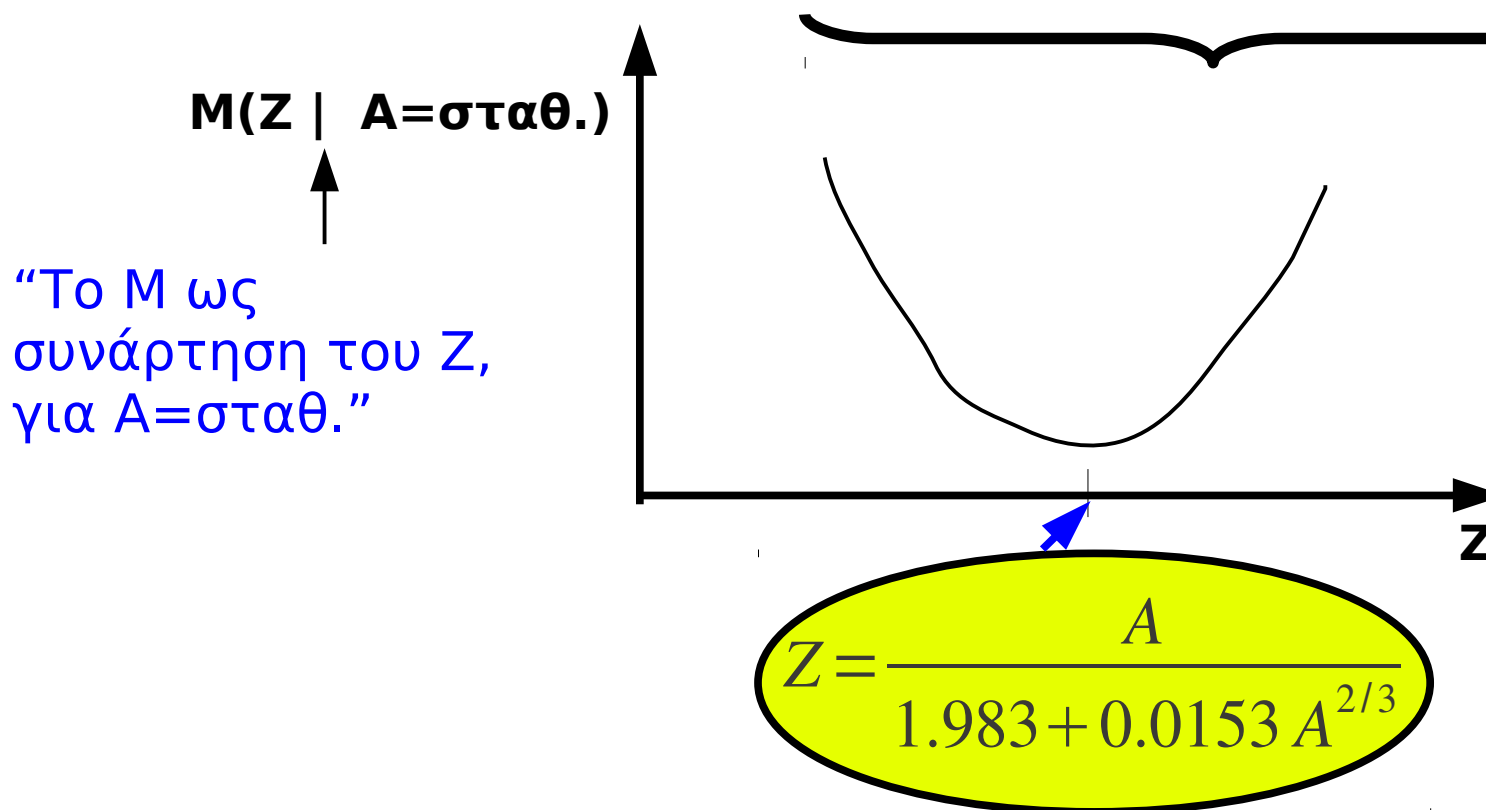
Κοιλάδα β-σταθερότητας: Για κάθε A, ποιό Z δίνει το σταθερότερο στοιχείο;

- Αν λάβουμε υπ' όψιν το άτομο ως σύνολο, με μάζα $M(A,Z)$:

$$M(A,Z) = Z m_p + Z m_e + (A-Z) m_n - \rightarrow 0$$

$$[a A - b A^{2/3} - s (A-2Z)^2 / A - d Z^2 / A^{1/3} - \delta / A^{1/2}]$$

$\rightarrow M(A,Z) = \text{άλλη παραβολή ως προς } Z \text{ για } A=\text{σταθ.}$

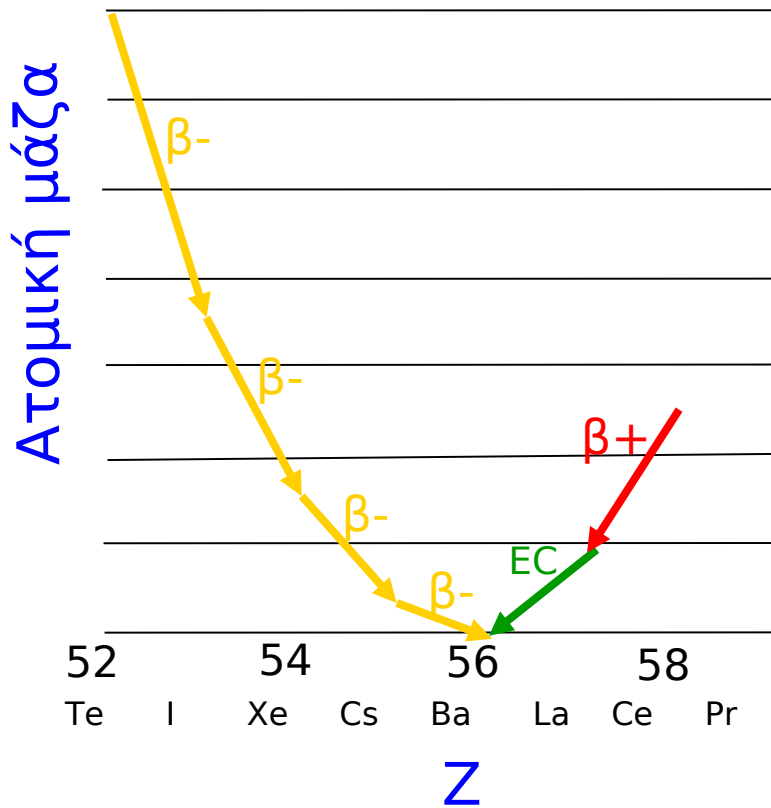


Για A= περιτό, το δ έχει μία τιμή ($\delta=0$) $\rightarrow$ μία καμπύλη μάζας.

Αλλά για A=άρτιο, μπορεί να πάρει δύο τιμές $\rightarrow$ δύο καμπύλες μάζας

Α περιττός: άρτιος-περιττός πυρήνας, $\delta=0$

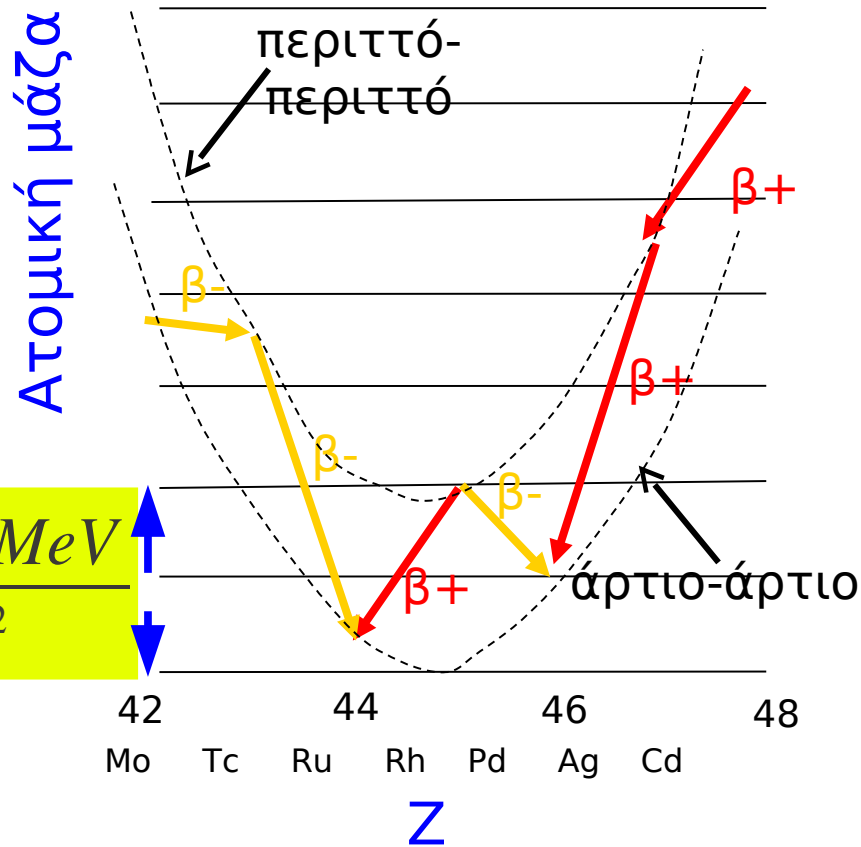
Μία παραβολή π.χ., $A=135$



- Αν υπάρχει $Z < Z_{\min}$ διασπάται με $\beta^{(-)}$ -διάσπαση: $(A, Z) \rightarrow (A, Z+1) e^- \bar{\nu}$ και
 - $M(A, Z) > M(A, Z+1)$
- Αν $Z > Z_{\min}$ θα διασπασθεί με $\beta^{(+)}$ -διάσπαση: $(A, Z) \rightarrow (A, Z-1) e^+ \nu$ και
 - $M(A, Z) > M(A, Z-1)$
- Το $Z_{\min}$ αντιστοιχεί σε **σταθερό** (=μη διασπώμενο) πυρήνα πάνω στην παραβολή των ισοβαρών
- σε κάθε περιττό A αντιστοιχεί **1 μόνο σταθερό ισοβαρές**

Α άρτιος: άρτιος-άρτιος ($\delta > 0$) ή περιττός-περιττός ($\delta < 0$) πυρήνας

Δύο παραβολές π.χ., $A=102$



- Σχεδόν όλοι οι **περιττοί -περιττοί** πυρήνες μπορούν να διασπασθούν με β -διάσπαση σε άρτιους-άρτιους που να είναι σταθεροί

- Ο πυρήνας με $Z_{\min}$ στη περίπτωση περιττός-περιττός ($Z-N$) έχει συνήθως δύο δυνατότητες β -διάσπασης (β^+ και β^-) **καταλήγοντας σε δύο διαφορετικούς Z (άρτιο) σταθερούς πυρήνες** !

- Οι μοναδικοί περιττοί-περιττοί πυρήνες που είναι σταθεροί είναι οι τέσσερις ελαφρύτεροι: **^2_1H , ^6_3Li , $^{10}_5\text{B}$, $^{14}_7\text{N}$**

Κοιλιάδα β-σταθερότητας

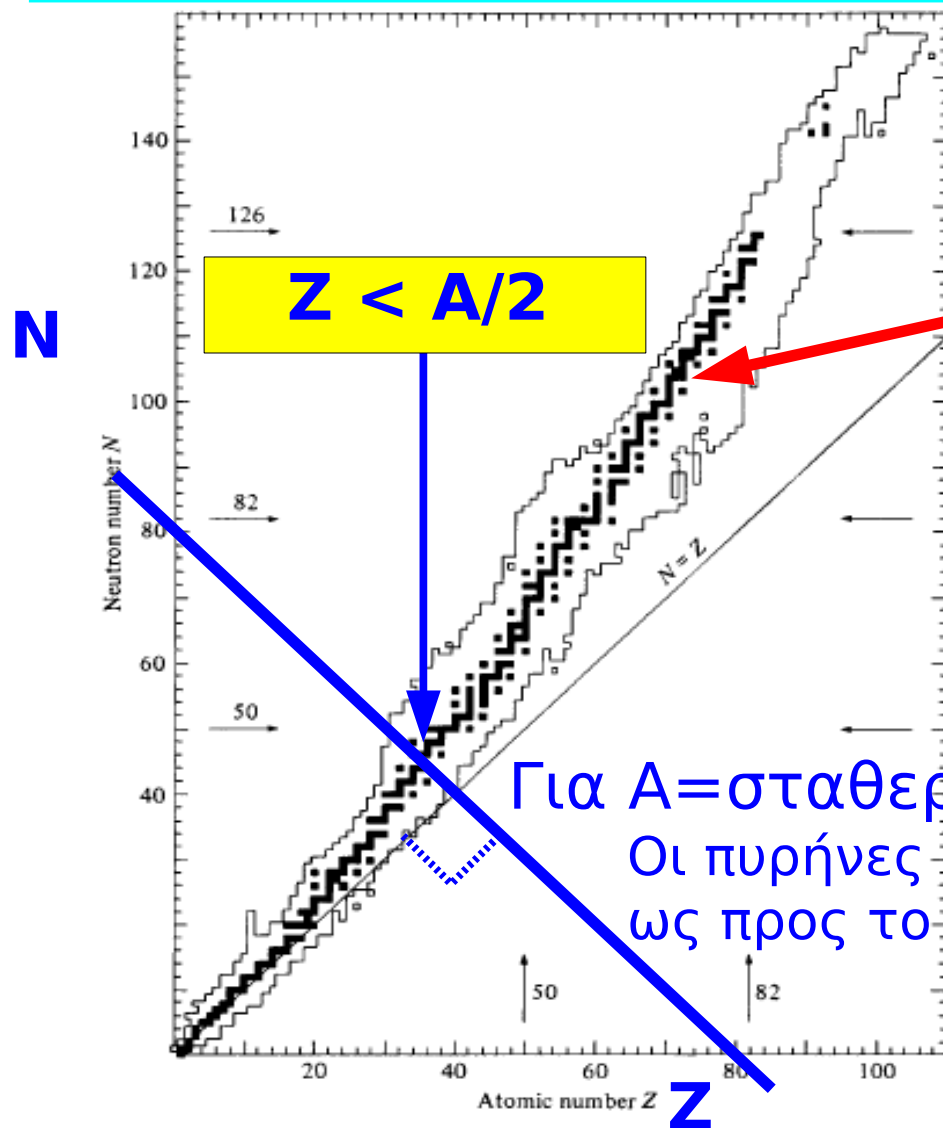
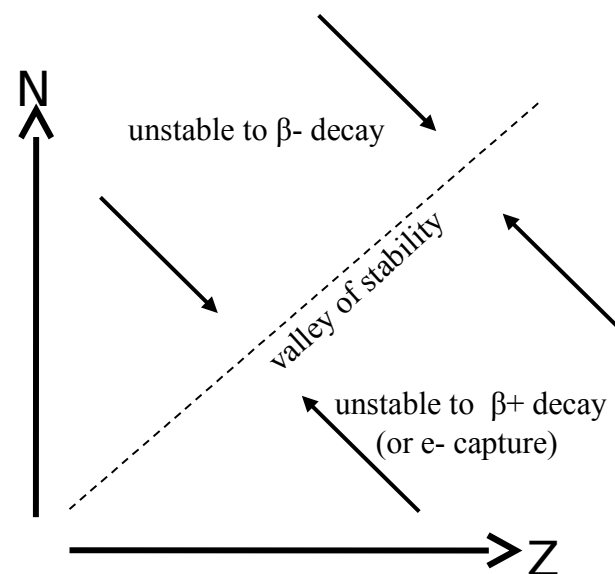


Fig. 4.6 The β -stability valley. Filled squares denote the stable nuclei and long-lived nuclei occurring in nature. Neighbouring nuclei are unstable. Those for which data on masses and mean lives are known fill the area bounded by the lines. For the most part these unstable nuclei have been made artificially. (Data taken from *Chart of the Nuclides* (1977), Schenectady: General Electric Company.)

Σχήμα 4.6 στο βιβλίο σας

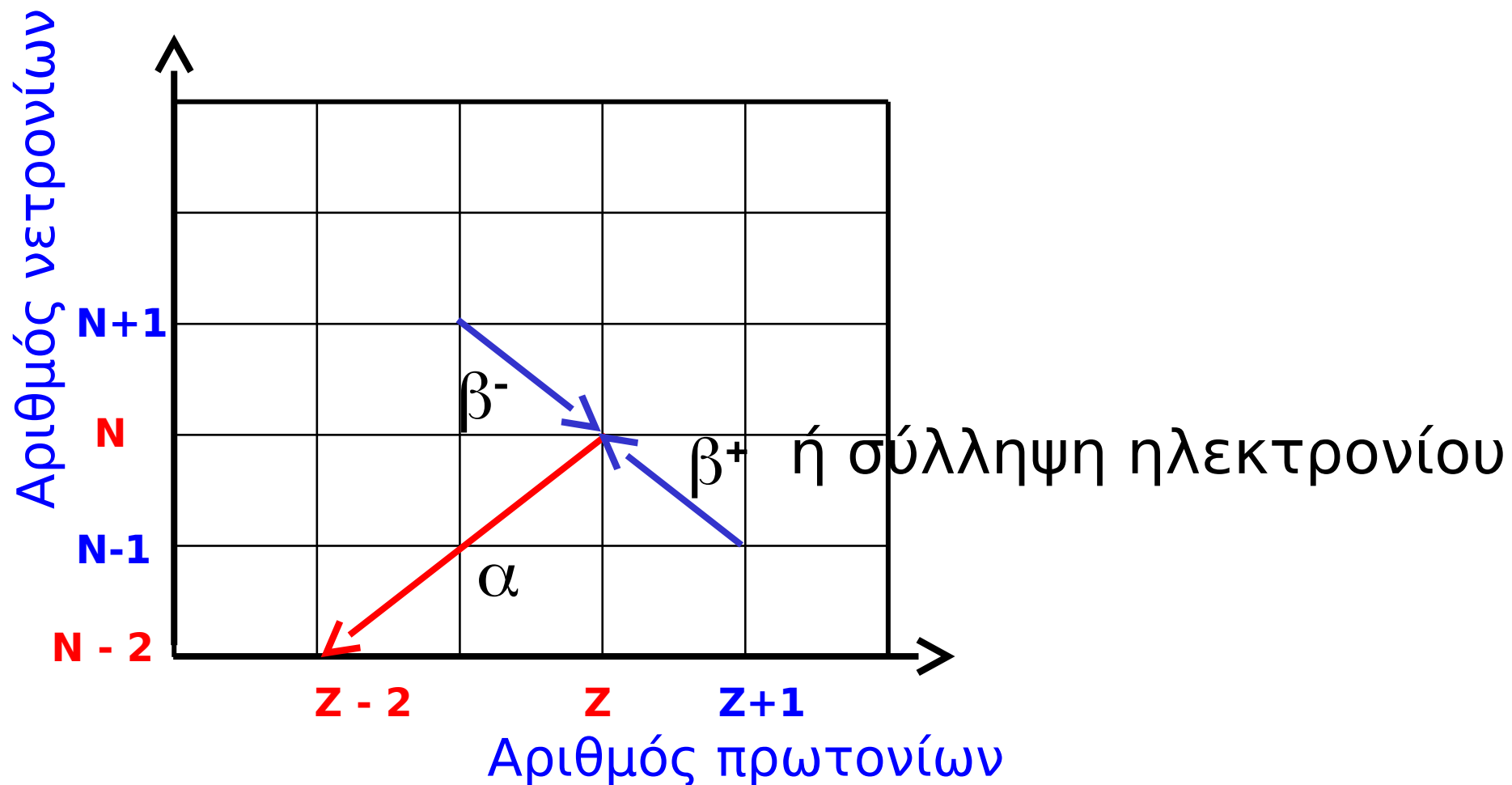
- Για κάθε A , τα β -σταθερά νουκλίδια είναι στη μαύρη ζώνη ("κοιλιάδα σταθερότητας" - "valley of stability"). Αυτά που είναι μακριά απ'την κοιλιάδα, πάνε προς αυτήν με διασπάσεις β^+ ($= e^+$) ή β^- ($= e^-$)



α και β διάσπαση: οι πυρήνες αλλάζουν

Η α διάσπαση μας μεταφέρει πάνω-κάτω στην κοιλάδα σταθερότητας

Η β διάσπαση μας μεταφέρει προς την κοιλάδα σταθερότητας



Διάσπαση άλφα (“α διάσπαση”)

- **α-διάσπαση:**

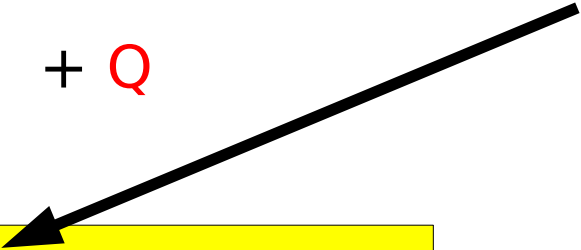
$$m(A,Z) \rightarrow m(A-4, Z-2) + \alpha + Q$$

(Μητρικός πυρήνας $\rightarrow$ θυγατρικός πυρήνας + α + Q)

- Οπότε:

$$Z m_p + N m_n - B(A,Z) =$$
$$(Z-2) m_p + (N-2) m_n - B(A-4, Z-2)$$
$$+ 2 m_p + 2 m_n - B(^4\text{He})$$
$$+ Q$$

- Κι έτσι:


$$Q = B(A-4, Z-2) + 28.3 \text{ MeV} - B(A, Z)$$

“βήτα διάσπαση” (“β διάσπαση”)

“βήτα διασπάσεις” ονομάζονται οι διαδικασίες με τις οποίες οι πυρήνες αλλάζουν τον αριθμό πρωτονίων τους κατά ένα, διατηρώντας το μαζικό αριθμό A σταθερό. Τρεις είναι οι τρόποι:

β^- : εκπέμπονται ηλεκτρόνια (e^-)

β^+ : εκπέμπονται ποζιτρόνια (e^+)

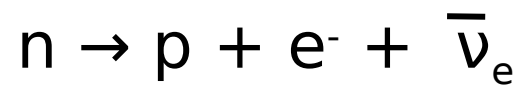
EC: “Electron Capture” = “Σύλληψη ηλεκτρονίου” ή “αρπαγή ηλεκτρονίου”

Κοιτώντας τους πυρήνες βλέπουμε:

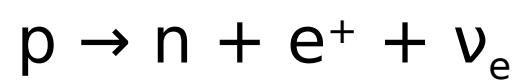
Διάσπαση β^-



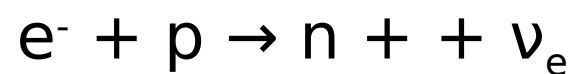
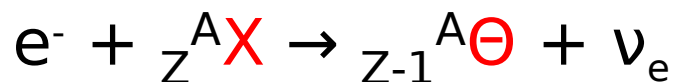
Αυτό που γίνεται μέσα στον πυρήνα είναι:



Διάσπαση β^+

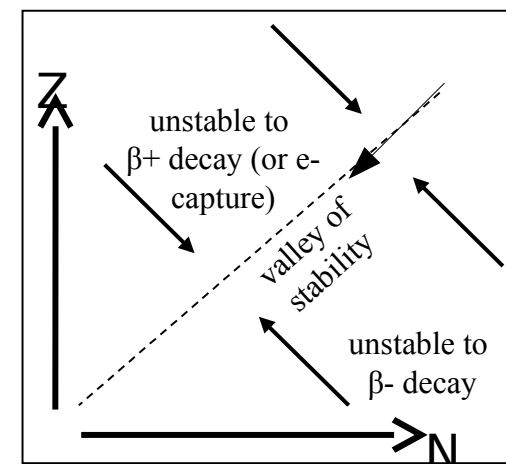
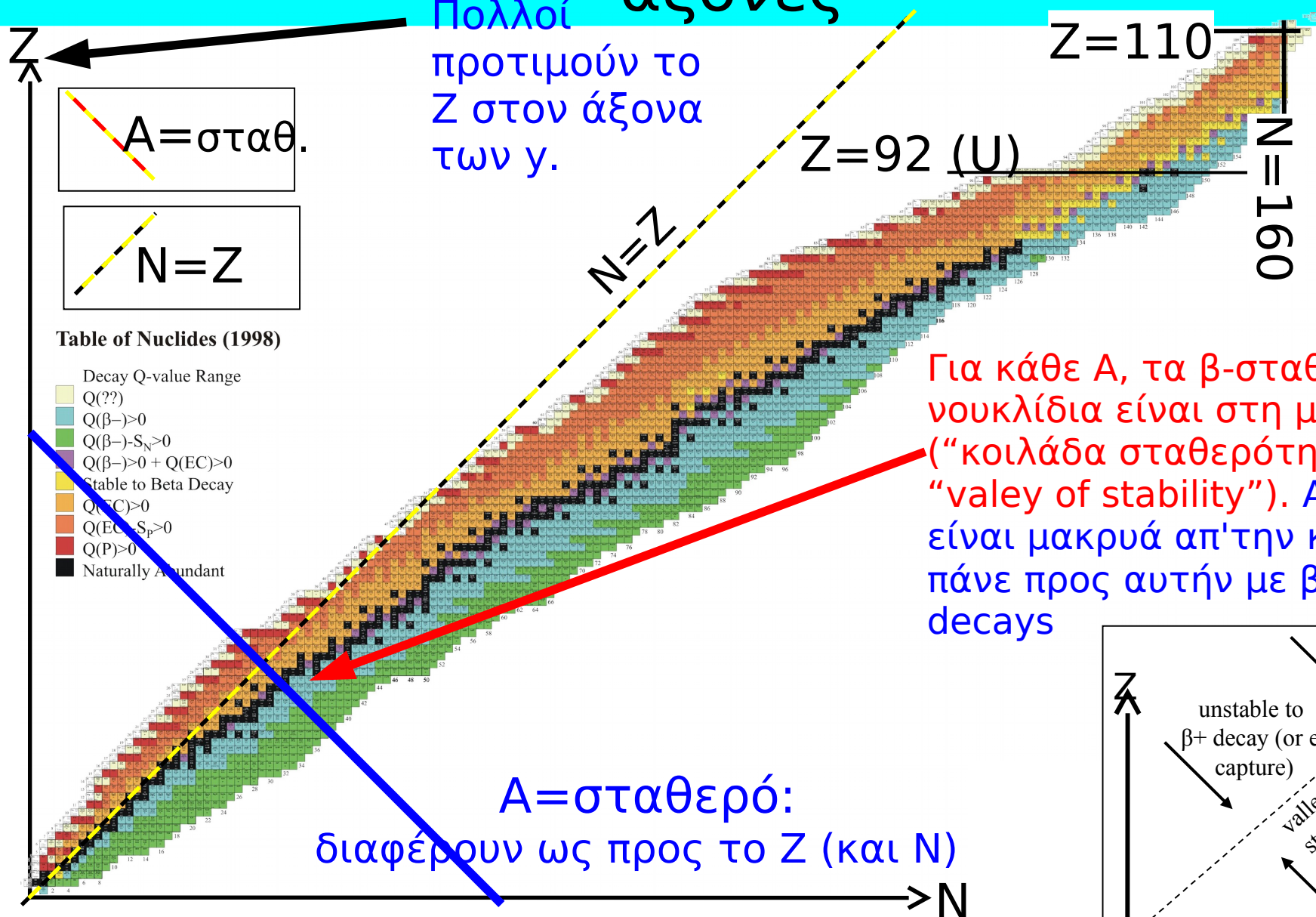


Σύλληψη ηλεκτρονίου



Πολλές φορές θα δείτε την
κοιλιάδα β-σταθερότητας με
αντεστραμένους άξονες

Η κοιλάδα β-σταθερότητας με αντεστραμμένους άξονες



α και β διάσπαση: οι πυρήνες αλλάζουν

Η α διάσπαση μας μεταφέρει πάνω-κάτω στην κοιλάδα σταθερότητας

Η β διάσπαση μας μεταφέρει προς την κοιλάδα σταθερότητας

