

Στοιχεία Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων (5ου εξαμήνου)

Τμήμα Τ2: Κ. Κορδάς & Δ. Σαμψωνίδης

Μάθημα 11 & 12

Πυρηνικό μοντέλο των φλοιών

Κώστας Κορδάς

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Πυρηνική & Στοιχειώδη

Σήμερα

- **Πυρηνικό μοντέλο των φλοιών - εκτίμηση ενεργειακών σταθμών και μαγικών αριθμών**
 - Βιβλίο C&G, Παράρτημα Β, Κεφ. 5, 5.3-5.7
 - Βιβλίο Χ. Ελευθεριάδη: κεφ. 6, παρ 6.4
 - Σημειώσεις Πυρηνικής, Κεφ. 8
- **Χαρακτηριστικά πυρήνων πέρα από το μέγεθος και τη μάζα: σπιν (spin), ομοτιμία (parity), μαγνητική ροπή, ηλεκτρική τετραπολική ροπή**
 - Βιβλίο C&G, Παράρτημα Γ , παρ. 1.3, Κεφ. 5, παρ. 5.5-5.7
 - Σημειώσεις Πυρηνικής, Κεφ. 1, σελ. 4-5 (μαγνητική ροπή)
- **Ιστοσελίδα:** <http://www.physics.auth.gr/course/show/125>

1. Πυρηνικό Πρότυπο Φλοιών -
εξίσωση Schroedinger
με απλό πηγάδι δυναμικού που είναι
σφαιρικό δυναμικό αδιαπέραστης
σφαίρας ακτίνας R (όση η ακτίνα
του πυρήνα):
όποιος είναι μέσα είναι ελεύθερος ($V=0$), αλλά δεν μπορεί
να βγεί έξω γιατί στα τοιχώματα $V = \infty$

Εξίσωση Schroedinger μέσα στον πυρήνα ($V=0$)

$$H\psi = E\psi \rightarrow \left(\frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) \right) \psi = E\psi, \text{ με } \hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla}, \text{ δηλ. } \hat{p}^2 = -\hbar^2 \nabla^2$$

Νε-
τρό-
νια

$$-\frac{\hbar^2}{2m_n} \nabla^2 \psi_n = E_n \psi_n,$$

$$\psi(r, \theta, \phi) = u_l(r) Y_{lm}(\theta, \phi),$$

Πρω-
τό-
νια

$$-\frac{\hbar^2}{2m_p} \nabla^2 \psi_p = (E_p - \bar{U}) \psi_p$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m_n} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (ru_l) + \frac{\hbar^2}{2m_n} \frac{l(l+1)}{r^2} u_l = E u_l$$

Σφαιρικό πηγάδι
 $V(r)$:

πεπερασμένες
λύσεις για $r=0$
και μηδέν για
 $r \geq R$, της
ακτίνας του
πυρήνα

Για $l=0$, συμβατές με τις συνοριακές
συνθήκες σε $r=0$ και σε $r=R$ είναι οι λύσεις:

$$u_s(r) = \frac{\sin(kr)}{kr} \quad \text{with } E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n}$$

Τι τιμές
παίρνει
το k ;

Εξίσωση Schroedinger μέσα στον πυρήνα ($V=0$)

$$H\psi = E\psi \rightarrow \left(\frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})\right)\psi = E\psi, \text{ με } \hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}, \text{ δηλ. } \hat{p}^2 = -\hbar^2\nabla^2$$

Νε-τρόνιο

$$-\frac{\hbar^2}{2m_n}\nabla^2\psi_n = E_n\psi_n,$$

Πρωτόνιο

$$-\frac{\hbar^2}{2m_p}\nabla^2\psi_p = (E_p - \bar{U})\psi_p$$

$$\psi(r, \theta, \phi) = u_l(r)Y_{lm}(\theta, \phi),$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m_n} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(ru_l) + \frac{\hbar^2}{2m_n} \frac{l(l+1)}{r^2} u_l = E u_l$$

Σφαιρικό πηγάδι $V(r)$:
πεπερασμένες λύσεις για $r=0$ και μηδέν για $r \geq R$, της ακτίνας του πυρήνα

Για $l=0$, συμβατές με τις συνοριακές συνθήκες σε $r=0$ και σε $r=R$ είναι οι λύσεις:

$$u_s(r) = \frac{\sin(kr)}{kr} \text{ with } E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n}$$

Τι τιμές παίρνει το k ;

• Για $r=R$: $u(R)=0 \rightarrow \sin(kR)/kR = 0$



Εξίσωση Schroedinger μέσα στον πυρήνα ($V=0$)

$$H\psi = E\psi \rightarrow \left(\frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})\right)\psi = E\psi, \text{ με } \hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla}, \text{ δηλ. } \hat{p}^2 = -\hbar^2 \nabla^2$$

Νε-
τρό-
νια

$$-\frac{\hbar^2}{2m_n} \nabla^2 \psi_n = E_n \psi_n,$$

$$\psi(r, \theta, \phi) = u_l(r) Y_{lm}(\theta, \phi),$$

Πρω-
τό-
νια

$$-\frac{\hbar^2}{2m_p} \nabla^2 \psi_p = (E_p - \bar{U}) \psi_p$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m_n} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (ru_l) + \frac{\hbar^2}{2m_n} \frac{l(l+1)}{r^2} u_l = E u_l$$

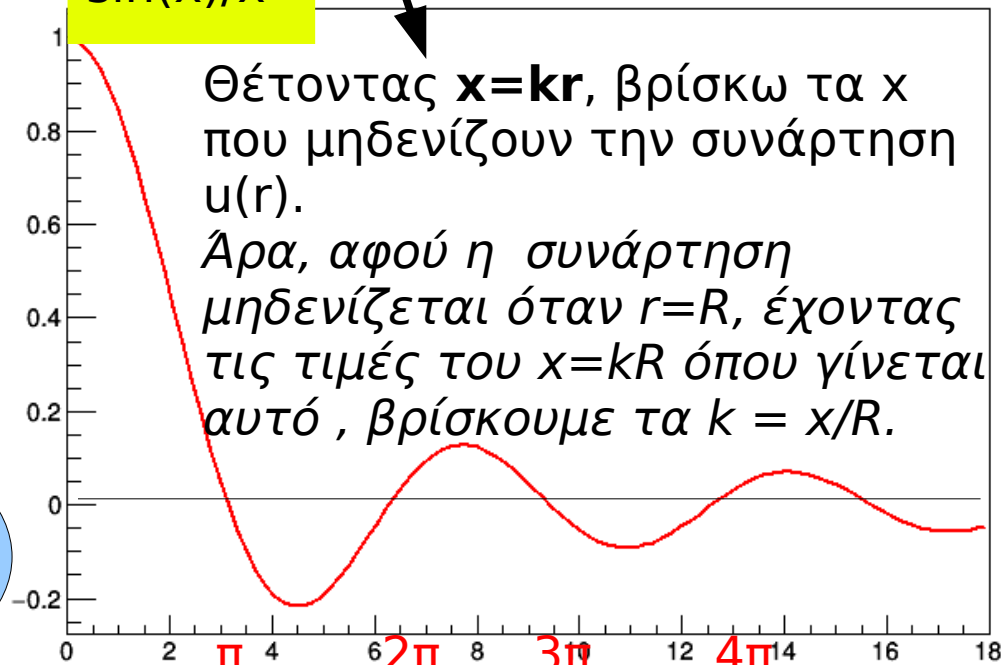
Σφαιρικό πηγάδι
 $V(r)$:
πεπερασμένες
λύσεις για $r=0$
και μηδέν για
 $r \geq R$, της
ακτίνας του
πυρήνα

Για $l=0$, συμβατές με τις συνοριακές
συνθήκες σε $r=0$ και σε $r=R$ είναι οι λύσεις:

$$u_s(r) = \frac{\sin(kr)}{kr} \text{ with } E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n}$$

Τι τιμές
παίρνει
το k ;

$\sin(x)/x$



Θέτοντας $x=kr$, βρίσκω τα x
που μηδενίζουν την συνάρτηση
 $u(r)$.
Άρα, αφού η συνάρτηση
μηδενίζεται όταν $r=R$, έχοντας
τις τιμές του $x=kR$ όπου γίνεται
αυτό, βρίσκουμε τα $k = x/R$.

• Για $r=R$: $u(R)=0 \rightarrow \sin(kR)/kR = 0$,
οπότε $kR = n\pi \rightarrow$
 $k = k_n = n\pi/R$,

Με αυτές τις τιμές του k ,
βρίσκουμε τις
**επιτρεπτές τιμές της
ενέργειας:**

$$E(n, s) = \frac{\hbar^2}{2m_n} \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2$$

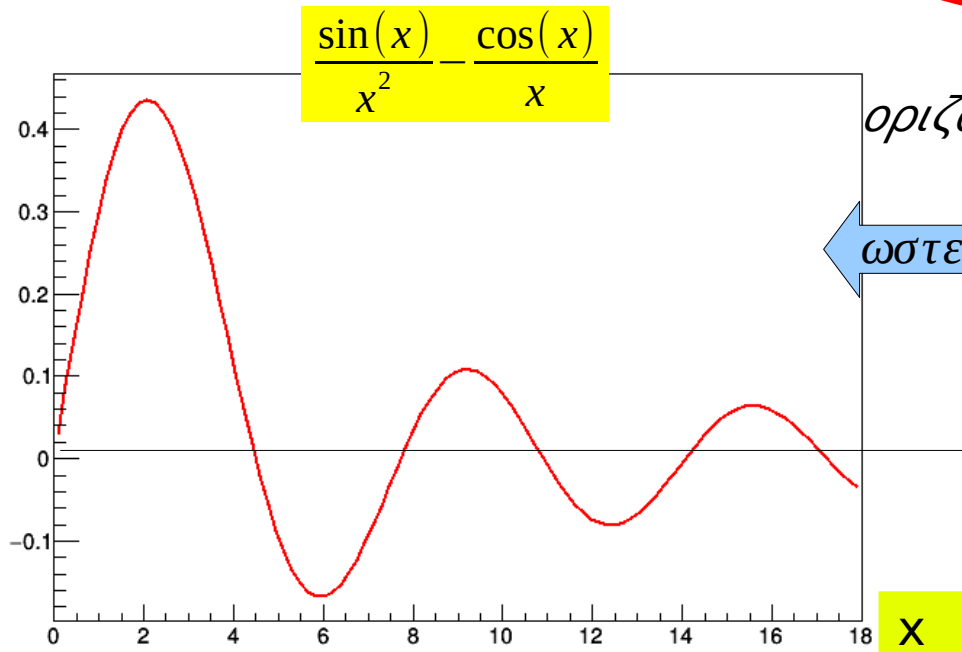
**Οι ενέργειες
είναι
κβαντισμένες!**

π 2π 3π 4π x
 $= x_{1s}$ $= x_{2s}$ $= x_{3s}$ $= x_{4s}$

Για $l=1$, συμβατές λύσεις είναι οι εξής (μπορείτε να το επιβεβαιώσετε):

$$-\frac{\hbar^2}{2m_n} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(ru_p) + \frac{\hbar^2}{m_n r^2} u_p = E u_p, \quad u_p(r) = \frac{\sin(kr)}{(kr)^2} - \frac{\cos(kr)}{(kr)}, \quad E = \frac{\hbar^2}{2m_n} k^2$$

Ίδια
σχέση
με πριν!
Τι τιμές
πάρνει
το k ;



4.49 7.73 10.90 14.07
= x_{1p} = x_{2p} = x_{3p} = x_{4p}

• Για $r=R$: $u(R)=0$

ορίζουμε ως $x_{np} = k_n R$

ωστε $u_p(R) = \frac{\sin(x_{np})}{(x_{np})^2} - \frac{\cos(x_{np})}{(x_{np})} = 0$

$$E(n, p) = (\hbar^2 / 2m_n)(x_{np} / R)^2$$

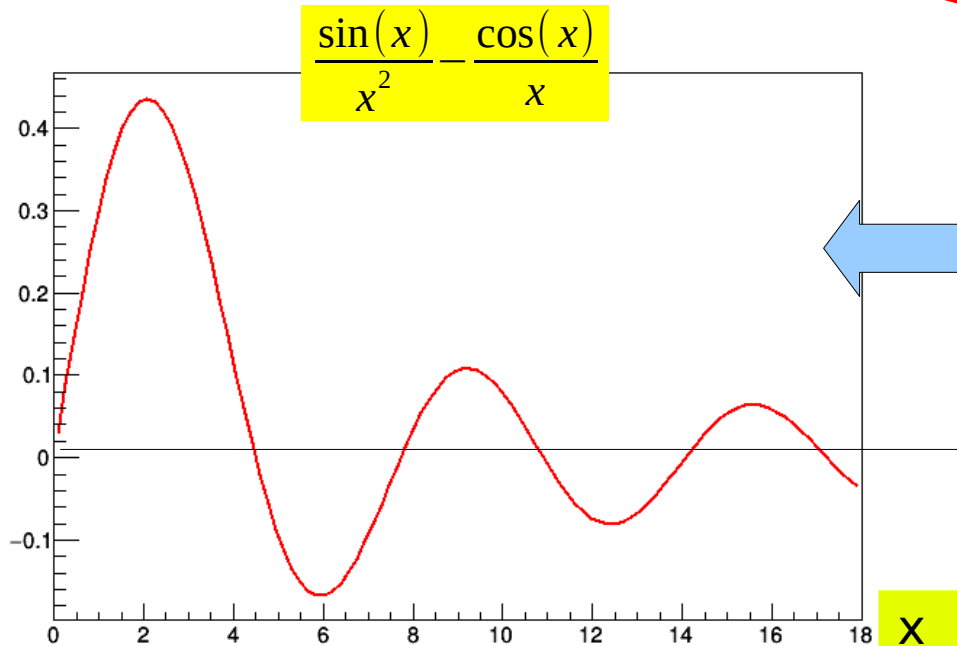
Με $k = x/R$,
βρίσκουμε τις
**επιτρεπτές
τιμές
ενέργειας**

**Οι ενέργειες
είναι
κβαντισμένες!**

Για $l=1$, συμβατές λύσεις είναι οι εξής (μπορείτε να το επιβεβαιώσετε):

$$-\frac{\hbar^2}{2m_n} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(ru_p) + \frac{\hbar^2}{m_n r^2} u_p = E u_p, \quad u_p(r) = \frac{\sin(kr)}{(kr)^2} - \frac{\cos(kr)}{(kr)}, \quad E = \frac{\hbar^2}{2m_n} k^2$$

Ίδια
σχέση
με πριν!
Τι τιμές
πάρνει
το k ;



4.49 7.73 10.90 14.07
= x_{1p} = x_{2p} = x_{3p} = x_{4p}

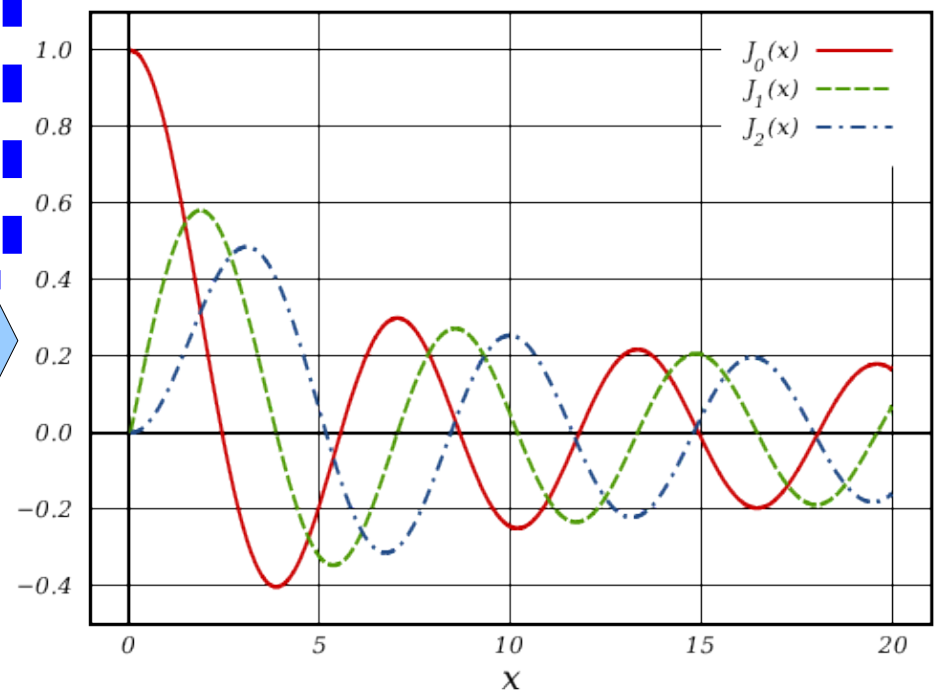
• Για $r=R$: $u(R)=0$

ουμε ως $x_{np} = k_n R$

$$u_p(R) = \frac{\sin(x_{np})}{(x_{np})^2} - \frac{\cos(x_{np})}{(x_{np})} = 0$$

Με $k = x/R$,
βρίσκουμε τις
**επιτρεπτές
τιμές
ενέργειας**

$$E(n, p) = (\hbar^2 / 2m_n)(x_{np}/R)^2$$



Γενικά, για κάθε τιμή " l " της
στροφορμής, υπάρχει μια άλλη
συνάρτηση (= "σφαιρική συνάρτηση
Bessel $j_l(kr)$ ") που ινακοποιεί την
εξίσωση Schroedinger , και που έχει
μηδενικά σε τιμές του x ίσες με kR

Σημείωση1: οι γωνιακές ιδιοσυναρτήσεις $Y(\theta, \phi)$ είναι οι “Σφαιρικές Αρμονικές” και είναι ίδιες για όλα τα “κεντρικά δυναμικά”, δηλ. αυτά που δεν έχουν εξάρτηση από το θ, ϕ (όπως πχ. το δυναμικό Coulomb $\sim 1/r$)

ΠΙΝΑΚΑΣ 9.2. Οι σφαιρικές αρμονικές μέχρι $\ell = 2$

	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$
$m = 2$			$Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$
$m = 1$		$Y_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$	$Y_{21} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{i\phi}$
$m = 0$	$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$	$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$
$m = -1$		$Y_{1,-1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}$	$Y_{2,-1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{-i\phi}$
$m = -2$			$Y_{2,-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\phi}$

Οι σφαιρικές αρμονικές ορίζονται από τον κβαντικό αριθμό l της τροχιακής τροφορμής, και τον κβαντικό αριθμό m της προβολής της τροχιακής στροφορμής στον άξονα z . Οπότε, γνωρίζοντας μόνο το ζευγάρι (l, m) , γνωρίζω και τη συνάρτηση $Y(\theta, \phi)$. Πχ., για $l=0$ και $m=0$, έχω $Y(\theta, \phi) = 1/\sqrt{4\pi}$

Σημείωση2: Ανάλογα με τη μορφή του δυναμικού $V(r)$ που βάζουμε στην εξίσωση Schoedinger, βρίσκουμε και διαφορετικές $u(r)$. Εδώ που βάλαμε κυλινδρικό πηγάδι δυναμικού για τα νουκλεοόνια, με άπειρου ύψους τοιχώματα, βρήκαμε διάφορες $u(r)$, ανάλογα με την τιμή του l και του kR , όπως είδαμε στις προηγούμενες σελίδες. Στο άτομο του υδρογόνου, όταν βάλετε $V(r) = -e^2 / r$, θα βρείτε άλλες $u(r)$, που κάθε μιά τους ορίζεται από τον κύριο κβαντικό αριθμό n , και το l .

Νουκλεόνια σε πυρήνες: Ακολουθία ενεργειακών σταθμών σε κυλινδρικό πηγάδι με άπειρου ύψους τοιχώματα

Οπότε, για κάθε τιμή της στροφορμής “l” έχουμε ένα πλήθος λύσεων που τις ονομάζουμε $n=1, n=2, n=3, \dots$ και άρα έχουμε μια ακολουθία επιτρεπτών ενεργειών:

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2m_n} \left(\frac{x_{nl}}{R} \right)^2$$

Όσο μεγαλύτερο το x_{nl} τόσο μεγαλύτερη η ενέργεια της στάθμης

$l=0$

	x_{nl}	Neutron		Proton	
1s	3.14	$1s_{\frac{1}{2}}$	2	2	$1s_{\frac{1}{2}}$
1p	4.49	$1p_{\frac{3}{2}}$	6	6	$1p_{\frac{3}{2}}$
		$1p_{\frac{1}{2}}$	8	8	$1p_{\frac{1}{2}}$
1d	5.76	$1d_{\frac{5}{2}}$	14	14	$1d_{\frac{5}{2}}$
		$2s_{\frac{1}{2}}$	16	16	$2s_{\frac{1}{2}}$
2s	6.28	$1d_{\frac{3}{2}}$	20	20	$1d_{\frac{3}{2}}$
1f	6.99	$1f_{\frac{7}{2}}$	28		$1f_{\frac{7}{2}}$
		$2p_{\frac{3}{2}}$	32	28	
2p	7.73	$1f_{\frac{5}{2}}$	38		$1f$
		$2p_{\frac{1}{2}}$	40	32	$2p_{\frac{3}{2}}$
1g	8.18	$1g_{\frac{9}{2}}$	50	38	$1f_{\frac{5}{2}}$
					$2p$
		$2d_{\frac{5}{2}}$	56	40	$2p_{\frac{1}{2}}$
2d	9.10	$1g_{\frac{7}{2}}$	64		
		$1h_{\frac{11}{2}}$	76	50	$1g_{\frac{9}{2}}$
1h	9.36	$3s_{\frac{1}{2}}$	78		$1g$
		$2d_{\frac{3}{2}}$	82	58	$1g_{\frac{7}{2}}$
3s	9.42	$2f_{\frac{7}{2}}$	90	64	$2d_{\frac{5}{2}}$
		$1h_{\frac{9}{2}}$	100		

Νουκλεόνια σε πυρήνες: Ακολουθία ενεργειακών σταθμών σε κυλινδρικό πηγάδι με άπειρου ύψους τοιχώματα

Οπότε, για κάθε τιμή της στροφορμής “l” έχουμε ένα πλήθος λύσεων που τις ονομάζουμε $n=1, n=2, n=3, \dots$ και άρα έχουμε μια ακολουθία επιτρεπτών ενεργειών:

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2m_n} \left(\frac{x_{nl}}{R} \right)^2$$

Όσο μεγαλύτερο το x_{nl} τόσο μεγαλύτερη η ενέργεια της στάθμης

	x_{nl}	Neutron		Proton	
1s	3.14	$1s_{\frac{1}{2}}$	2	2	$1s_{\frac{1}{2}}$
1p	4.49	$1p_{\frac{3}{2}}$	6	6	$1p_{\frac{3}{2}}$
		$1p_{\frac{1}{2}}$	8	8	$1p_{\frac{1}{2}}$
1d	5.76	$1d_{\frac{5}{2}}$	14	14	$1d_{\frac{5}{2}}$
2s	6.28	$2s_{\frac{1}{2}}$	16	16	$2s_{\frac{1}{2}}$
		$1d_{\frac{3}{2}}$	20	20	$1d_{\frac{3}{2}}$
1f	6.99	$1f_{\frac{7}{2}}$	28		
		$2p_{\frac{3}{2}}$	32	28	$1f_{\frac{7}{2}}$
2p	7.73	$1f_{\frac{5}{2}}$	38		
		$2p_{\frac{1}{2}}$	40	32	$2p_{\frac{3}{2}}$
1g	8.18	$1g_{\frac{9}{2}}$	50	38	$1f_{\frac{5}{2}}$
		$2d_{\frac{5}{2}}$	56	40	$2p_{\frac{1}{2}}$
2d	9.10	$1g_{\frac{7}{2}}$	64		
		$1h_{\frac{11}{2}}$	76	50	$1g_{\frac{9}{2}}$
1h	9.36	$3s_{\frac{1}{2}}$	78		
		$2d_{\frac{3}{2}}$	82	58	$1g_{\frac{7}{2}}$
3s	9.42	$2f_{\frac{7}{2}}$	90	64	$2d_{\frac{5}{2}}$
		$1h_{\frac{9}{2}}$	100		

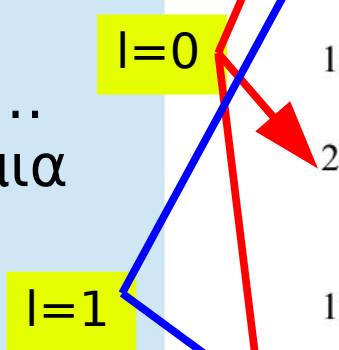
$l=0$

$l=1$

Νουκλεόνια σε πυρήνες: Ακολουθία ενεργειακών σταθμών σε κυλινδρικό πηγάδι με άπειρου ύψους τοιχώματα

Οπότε, για κάθε τιμή της στροφορμής “ l ” έχουμε ένα πλήθος λύσεων που τις ονομάζουμε $n=1, n=2, n=3, \dots$ και άρα έχουμε μια ακολουθία επιτρεπτών ενεργειών:

	x_{nl}	Neutron		Proton	
1s	3.14	$1s_{\frac{1}{2}}$	2	2	$1s_{\frac{1}{2}}$
1p	4.49	$1p_{\frac{3}{2}}$	6	6	$1p_{\frac{3}{2}}$
		$1p_{\frac{1}{2}}$	8	8	$1p_{\frac{1}{2}}$
1d	5.76	$1d_{\frac{5}{2}}$	14	14	$1d_{\frac{5}{2}}$
2s	6.28	$2s_{\frac{1}{2}}$	16	16	$2s_{\frac{1}{2}}$
		$1d_{\frac{3}{2}}$	20	20	$1d_{\frac{3}{2}}$
1f	6.99	$1f_{\frac{7}{2}}$	28		
		$2p_{\frac{3}{2}}$	32	28	$1f_{\frac{7}{2}}$
2p	7.73	$1f_{\frac{5}{2}}$	38		
		$2p_{\frac{1}{2}}$	40	32	$2p_{\frac{3}{2}}$
1g	8.18	$1g_{\frac{9}{2}}$	50	38	$1f_{\frac{5}{2}}$
		$2d_{\frac{5}{2}}$	56	40	$2p_{\frac{1}{2}}$
2d	9.10	$1g_{\frac{7}{2}}$	64		
		$1h_{\frac{11}{2}}$	76	50	$1g_{\frac{9}{2}}$
1h	9.36	$3s_{\frac{1}{2}}$	78		
		$2d_{\frac{3}{2}}$	82	58	$1g_{\frac{7}{2}}$
3s	9.42	$2f_{\frac{7}{2}}$	90	64	$2d_{\frac{5}{2}}$
		$1h_{\frac{9}{2}}$	100		



Για κάθε ζεύγος (n,l) έχουμε $2*(2*l+1)$ “εκφυλισμένες καταστάσεις” (δηλ. καταστάσεις με την ίδια ενέργεια). Προσέξτε τον έξτρα παράγοντα 2 λόγω σπιν 1/2

Αριθμός καταστάσεων μέχρι κάποια ενέργεια, δηλ, μέχρι κάποια τιμή του x_{nl} (1)

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2m_n} \left(\frac{x_{nl}}{R} \right)^2$$

- Για κάθε ζεύγος (n,l) έχουμε $2 \cdot (2 \cdot l + 1)$ εκφυλισμένες καταστάσεις (προσέξτε τον έξτρα παράγοντα 2 λόγω σπιν 1/2)

Έχοντας βάλει σε αύξουσα ενεργειακή σειρά τις ενεργειακές καταστάσεις που μπορούν να καταλάβουν τα νουκλεόνια, μετράμε το συνολικό πλήθος καταστάσεων μέχρι κάποια τιμή του x .

Π.χ., μέχρι $x = 6.5$, έχουμε 20 καταστάσεις $\rightarrow$ 20 νετρόνια όλα με διαφορετικούς κβαντικούς αριθμούς

Table 5.1

	x_{nl}	Neutron		Proton	
1s	3.14	$1s_{\frac{1}{2}}$	2	2	$1s_{\frac{1}{2}}$
1p	4.49	$1p_{\frac{3}{2}}$	6	6	$1p_{\frac{3}{2}}$
		$1p_{\frac{1}{2}}$	8	8	$1p_{\frac{1}{2}}$
1d	5.76	$1d_{\frac{5}{2}}$	14	14	$1d_{\frac{5}{2}}$
		$2s_{\frac{1}{2}}$	16	16	$2s_{\frac{1}{2}}$
2s	6.28	$1d_{\frac{3}{2}}$	20	20	$1d_{\frac{3}{2}}$

$2 \cdot (2 \cdot l + 1)$ καταστάσεις σε κάθε l

Άρα:

$1s \rightarrow l=0 \rightarrow 2 \cdot (2 \cdot 0 + 1) = 2$ καταστάσεις
 $1p \rightarrow l=1 \rightarrow 2 \cdot (2 \cdot 1 + 1) = 6$ καταστάσεις
 $1d \rightarrow l=2 \rightarrow 2 \cdot (2 \cdot 2 + 1) = 10$ καταστάσεις
 $2s \rightarrow l=0 \rightarrow 2 \cdot (2 \cdot 0 + 1) = 2$ καταστάσεις

Μέχρι $x=6.5$, σύνολο: 20 καταστάσεις

Αριθμός καταστάσεων μέχρι κάποια ενέργεια, δηλ, μέχρι κάποια τιμή του x_{nl} (3)

1
$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2m_n} \left(\frac{x_{nl}}{R} \right)^2$$

- Για κάθε ζεύγος (n,l) έχουμε $2 \cdot (2 \cdot l + 1)$ εκφυλισμένες καταστάσεις (προσέξτε τον έξτρα παράγοντα 2 λόγω spin 1/2)

2 Έχοντας βάλει σε αύξουσα ενεργειακή σειρά τις ενεργειακές καταστάσεις που μπορούν να καταλάβουν τα νουκλεόνια, μετράμε το συνολικό πλήθος καταστάσεων μέχρι κάποια τιμή του x .

Π.χ., μέχρι $x = 6.5$, έχουμε 20 καταστάσεις:
 $N(6.5) = 20$



$$N(x) = \frac{4x^3}{9\pi} \left(1 - \frac{9\pi}{8x} \right) = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m_n E}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left[1 - \frac{3\pi S}{8V} \left(\frac{\hbar^2}{2m_n E} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

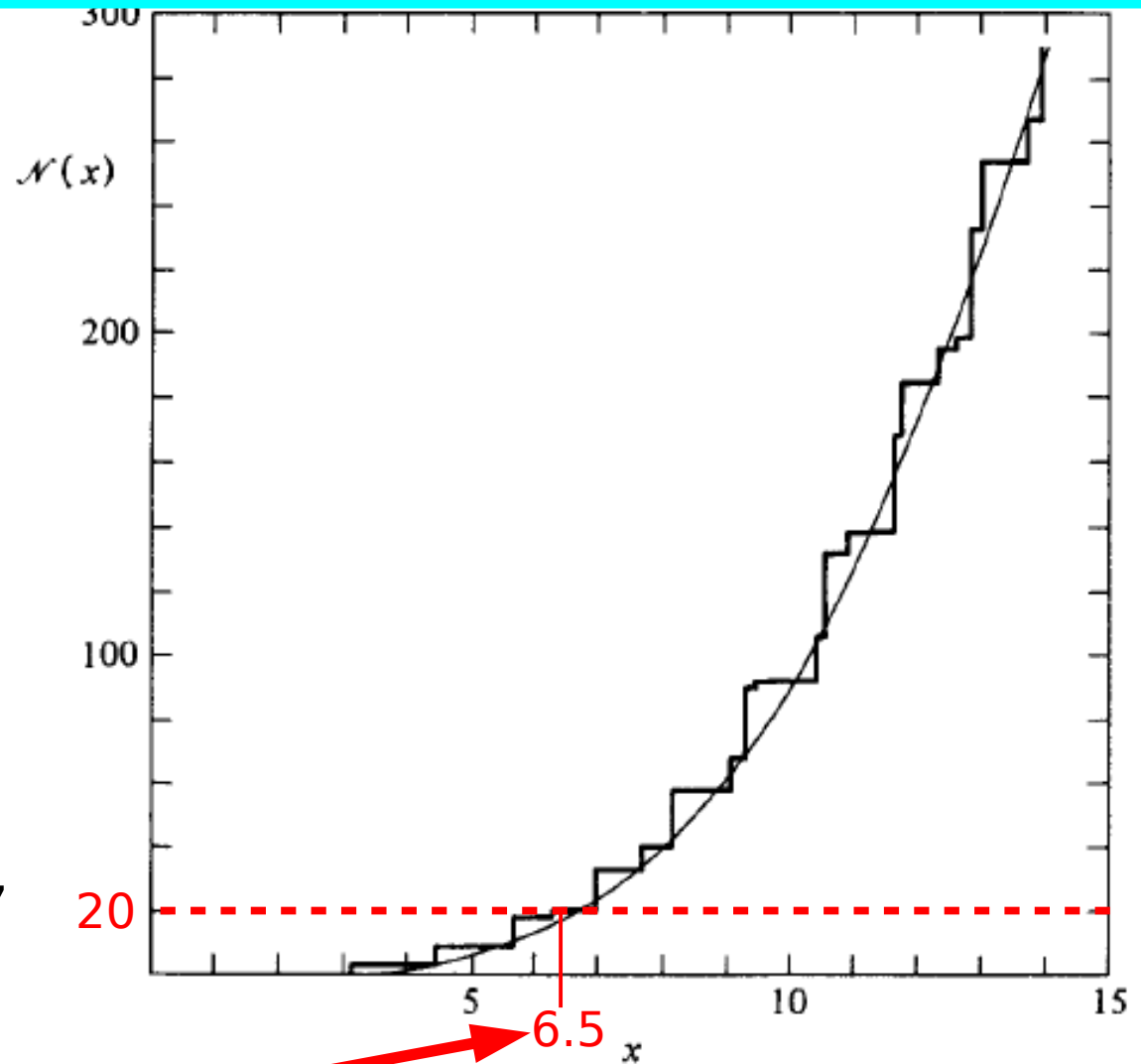
Αριθμός καταστάσεων μέχρι κάποια ενέργεια, δηλ, μέχρι κάποια τιμή του x_{nl} (2)

1
$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2m_n} \left(\frac{x_{nl}}{R} \right)^2$$

- Για κάθε ζεύγος (n,l) έχουμε $2 \cdot (2 \cdot l + 1)$ εκφυλισμένες καταστάσεις (προσέξτε τον έξτρα παράγοντα 2 λόγω σπιν 1/2)

2 Έχοντας βάλει σε αύξουσα ενεργειακή σειρά τις ενεργειακές καταστάσεις που μπορούν να καταλάβουν τα νουκλεόνια, μετράμε το συνολικό πλήθος καταστάσεων μέχρι κάποια τιμή του x .

Π.χ., μέχρι $x = 6.5$, έχουμε 20 καταστάσεις:
 $N(6.5) = 20$



$$N(x) = \frac{4x^3}{9\pi} \left(1 - \frac{9\pi}{8x} \right) = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m_n E}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left[1 - \frac{3\pi}{8} \frac{S}{V} \left(\frac{\hbar^2}{2m_n E} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

2. Πυρηνικό Πρότυπο Φλοιών -
εξίσωση Schroedinger
(ανάλογα με τα άτομα)
με πηγάδι δυναμικού και
με όρο για σύζευξη spin-orbit ($L \cdot S$)

Υπάρχει όμως και όρος $L \cdot S$ στη δυναμική ενέργεια

Από το απλό πηγάδι δυναμικού περιμέναμε: $E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2m_n} \left(\frac{x_{nl}}{R} \right)^2$

Όμως, στον πίνακα πριν είδαμε τις περισσότερες ενεργειακές στάθμες (n, l) να έχουν υποστάθμες: Υπάρχει κι άλλος σημαντικός κβαντικός αριθμός. Ποιός είναι;

Εκτός από το κεντρικό δυναμικό (συνάρτηση της απόστασης r μόνο) υπάρχει και **όρος με σύζευξη $L \cdot S$ στη Χαμιλτονιανή:**

Συνεισφορά στην ενέργεια (με $U_{so} < 0$) :

$$U_{so}(r) \mathbf{L} \cdot \mathbf{s}$$

(L = τροχιακή στροφορμή,
 S = spin)

→ Καλοί κβαντικοί αριθμοί: l, s, j, m_j

όπου “ j ” ο κβαντικός αριθμός της ολικής στροφορμής $\mathbf{J}$,
και m_j ο κβαντικός αριθμός για την προβολή της $\mathbf{J}$ στον άξονα z .

Η ολική στροφορμή είναι άθροισμα των l και s .

Αφού τα νουκλεόνια είναι φερμιόνια ($s=1/2$), έχουμε:

$$j = l + 1/2 \text{ ή } j = l - 1/2.$$

Για κάθε j , το m_j μπορεί να είναι $\{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$: $2j+1$ πιθανές τιμές

Οπότε:

για $j=l+1/2$: $2(l+1/2)+1 = 2l+2$ τιμές, για $j=l-1/2$: $2(l-1/2)+1 = 2l$ τιμές

Αλληλεπίδραση $L \cdot S$: διαχωρισμός καταστάσεων με το ίδιο (n, l) , αλλά διαφορετική ολική στροφορμή j

- Ο όρος σύζευξης $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ ξεχωρίζει τις καταστάσεις με ίδιο $\{n, l\}$, αλλά διαφορετικούς προσανατολισμούς του σπιν ως προς L

Συνεισφορά στην ενέργεια (με $U_{so} < 0$) : $U_{so}(r) \mathbf{L} \cdot \mathbf{s}$

Η αναμενόμενη τιμή του $L \cdot S$ μπορεί να βρεθεί από την ταυτότητα:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{s} = \frac{1}{2}[(\mathbf{L} + \mathbf{s})^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{s}^2] = \frac{1}{2}[\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{s}^2], \quad (5.17)$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \langle l, s, j, j_z | \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} | l, s, j, j_z \rangle &= \frac{1}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \hbar^2 \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} l \hbar^2 & \text{if } j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}(l+1) \hbar^2 & \text{if } j = l - \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Επειδή βλέπουμε (π.χ., στον πίνακα πριν) οι $j = l + \frac{1}{2}$ να έχουν μικρότερη ενέργεια από τις $j = l - \frac{1}{2}$, δηλαδή:

$$[U_{so} \frac{1}{2} l \hbar^2] < [-U_{so} \frac{1}{2} (l+1) \hbar^2]$$

Συμπεραίνουμε ότι: $U_{so} < 0$.

Σημειώστε επίσης ότι: $\Delta E(j = l - \frac{1}{2}, j = l + \frac{1}{2}) = |U_{so}| * \frac{1}{2} * \hbar^2 * (2l+1)$, αρκετή για να αλλάζει τη σειρά στις στάθμες, ειδικά στα μεγάλα l , όπως είδαμε πριν, στον πίνακα με τις ενεργειακές στάθμες

Αλληλεπίδραση L^*S : διαχωρισμός καταστάσεων με το ίδιο (n,l) , αλλά διαφορετική ολική στροφορμή j

- Ο όρος σύζευξης $L \cdot S$ ξεχωρίζει τις καταστάσεις με το ίδιο (n,l) , αλλά διαφορετική ολική στροφορμή j

- Π.χ. $1p \rightarrow l=1 \rightarrow$
 $\rightarrow [2*(2*1+1)= 6 \text{ κατ.}]$

- $1p$ με $j=1+1/2 = 3/2$ και $1p$ με $j=1-1/2 = 1/2$

- $1p_{3/2}$: 4 καταστάσεις ($m_j = -3/2, -1/2, 1/2, 3/2$)

- $1p_{1/2}$: 2 καταστάσεις ($m_j = -1/2, 1/2$)

- Στάθμες με ίδιο n,l : Αυτός με τη μικρότερη ολική στροφορμή ($j=l-1/2$) έχει μεγαλύτερη ενέργεια

	x_{nl}	Neutron		Proton	
1s	3.14	$1s_{1/2}$	2	2	$1s_{1/2}$
1p	4.49	$1p_{3/2}$	6	6	$1p_{3/2}$
		$1p_{1/2}$	8	8	$1p_{1/2}$
1d	5.76	$1d_{5/2}$	14	14	$1d_{5/2}$
		$2s_{1/2}$	16	16	$2s_{1/2}$
2s	6.28	$1d_{3/2}$	20	20	$1d_{3/2}$
1f	6.99	$1f_{7/2}$	28		
		$2p_{3/2}$	32	28	$1f_{7/2}$
2p	7.73	$1f_{5/2}$	38		
		$2p_{1/2}$	40	32	$2p_{3/2}$
1g	8.18	$1g_{9/2}$	50	38	$1f_{5/2}$
		$2d_{5/2}$	56	40	$2p_{1/2}$
2d	9.10	$1g_{7/2}$	64		
		$1h_{11/2}$	76	50	$1g_{9/2}$
1h	9.36	$3s_{1/2}$	78		
		$2d_{3/2}$	82	58	$1g_{7/2}$
3s	9.42	$2f_{7/2}$	90	64	$2d_{5/2}$
ή		$1h_{9/2}$	100		

Συμπληρωμένοι φλοιοί και μαγικοί αριθμοί

→ Καλοί κβαντικοί αριθμοί:
l, s, j, m_j

- Στάθμες με ίδιο n, l:

Αυτός με τη μικρότερη ολική στροφορμή ($j = l - 1/2$) έχει μεγαλύτερη ενέργεια

Συμπληρωμένοι φλοιοί

και

“Μαγικοί” αριθμοί

	x_{nl}	Neutron		Proton		
1s	3.14	$1s_{\frac{1}{2}}$	2	$1s_{\frac{1}{2}}$	2	1s
1p	4.49	$1p_{\frac{3}{2}}$	6	$1p_{\frac{3}{2}}$	6	1p
		$1p_{\frac{1}{2}}$	8	$1p_{\frac{1}{2}}$	8	
1d	5.76	$1d_{\frac{5}{2}}$	14	$1d_{\frac{5}{2}}$	14	1d
		$2s_{\frac{1}{2}}$	16	$2s_{\frac{1}{2}}$	16	
2s	6.28	$1d_{\frac{3}{2}}$	20	$1d_{\frac{3}{2}}$	20	2s
1f	6.99	$1f_{\frac{7}{2}}$	28	$1f_{\frac{7}{2}}$	28	1f
		$2p_{\frac{3}{2}}$	32	$2p_{\frac{3}{2}}$	32	
2p	7.73	$1f_{\frac{5}{2}}$	38	$1f_{\frac{5}{2}}$	38	2p
		$2p_{\frac{1}{2}}$	40	$2p_{\frac{1}{2}}$	40	
1g	8.18	$1g_{\frac{9}{2}}$	50	$1g_{\frac{9}{2}}$	50	1g
		$2d_{\frac{5}{2}}$	56	$2d_{\frac{5}{2}}$	56	
2d	9.10	$1g_{\frac{7}{2}}$	64	$1g_{\frac{7}{2}}$	64	2d
		$1h_{\frac{11}{2}}$	76	$1h_{\frac{11}{2}}$	76	
1h	9.36	$3s_{\frac{1}{2}}$	78	$3s_{\frac{1}{2}}$	78	1h
		$2d_{\frac{3}{2}}$	82	$2d_{\frac{3}{2}}$	82	
3s	9.42	$2f_{\frac{7}{2}}$	90	$2f_{\frac{7}{2}}$	90	3s
		$1h_{\frac{9}{2}}$	100	$1h_{\frac{9}{2}}$	100	

Συμπληρωμένοι φλοιοί και μαγικοί αριθμοί

→ Καλοί κβαντικοί αριθμοί:
l, s, j, m_j

- Στάθμες με ίδιο n, l:

Αυτός με τη μικρότερη ολική στροφορμή ($j = l - 1/2$) έχει μεγαλύτερη ενέργεια

Συμπληρωμένοι φλοιοί

και

“Μαγικοί” αριθμοί

Σημείωση:
Χαμηλότερη ενέργεια έχει η κατάσταση s ($l=0$)

	x_{nl}	Neutron		Proton	
1s	3.14	1s _{1/2}	2	1s _{1/2}	1s
1p	4.49	1p _{3/2}	6	1p _{3/2}	1p
		1p _{1/2}	8	1p _{1/2}	
1d	5.76	1d _{5/2}	14	1d _{5/2}	1d
		2s _{1/2}	16	2s _{1/2}	
2s	6.28	1d _{3/2}	20	1d _{3/2}	2s
1f	6.99	1f _{7/2}	28		
		2p _{3/2}	32	28	1f _{7/2}
2p	7.73	1f _{5/2}	38		
		2p _{1/2}	40	32	2p _{3/2}
1g	8.18	1g _{9/2}	50	38	1f _{5/2}
		2d _{5/2}	56	40	2p _{1/2}
2d	9.10	1g _{7/2}	64		
		1h _{11/2}	76	50	1g _{9/2}
1h	9.36	3s _{1/2}	78		
		2d _{3/2}	82	58	1g _{7/2}
3s	9.42	2f _{7/2}	90	64	2d _{5/2}
		1h _{9/2}	100		

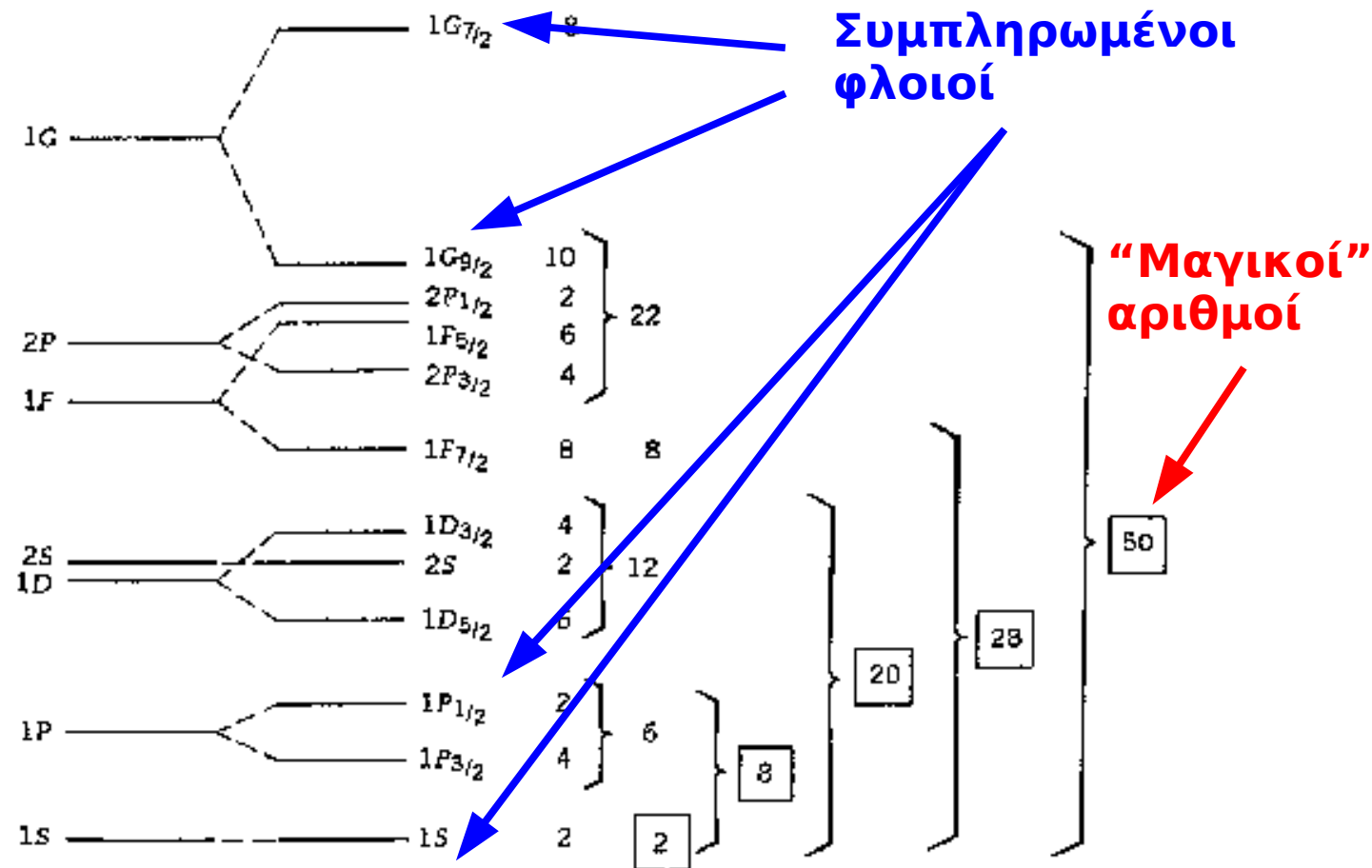
Ανακάτεμα των ενεργειακών σταθμών και “χάσμα” σε μερικές περιοχές : μαγικοί αριθμοί

- Ο όρος σύζευξης $L \cdot S$ ξεχωρίζει τις καταστάσεις με το ίδιο (n, l) , αλλά διαφορετική ολική στροφορμή j

Οπότε η ενέργεια κάθε κατάστασης χαρακτηρίζεται από τρεις κβαντικούς αριθμούς: n, l, j

Καταστάσεις
βαλμένες κατά
αύξουσα ενέργεια

Αν ξέρουμε πόσα
νέτρόνια (π.χ.,)
έχουμε στον πυρήνα,
μπορούμε,
γεμίζοντας τις
ενεργειακές στάθμες
από τη χαμηλότερη
πρός την υψηλότερη,
να βρούμε σε ποιά
ενέργεια βρίσκεται
το “τελευταίο”
νετρόνιο.
Ενέργεια Fermi



Πυρήνες με “μαγικούς” αριθμούς - οι σταθερότεροι



Fig. 4.6 The β -stability valley. Filled squares denote the stable nuclei and long-lived nuclei occurring in nature. Neighbouring nuclei are unstable. Those for which data on masses and mean lives are known fill the area bounded by the lines. For the most part these unstable nuclei have been made artificially. (Data taken from *Chart of the Nuclides* (1977), Schenectady: General Electric Company.)

Πυρήνες με “μαγικούς” αριθμούς:

Πολύ σταθεροί σε σχέση με τους γειτονές τους (με πολλά σταθερά ισότοπα, μικρή ενεργός διατομή σύλληψης νετρονίου)

3. Πυρηνικό Πρότυπο Φλοιών :

Εξήγηση της ολικής στροφορμής J
του πυρήνα (= του σπίν του)
και της ομοτιμίας του (παριτυ)
με απλούς κανόνες

Spin και πάριτυ ενός πυρήνα (J και πάριτυ: J^π)

- Σπιν πυρήνα, J = ολικό τροχιακό σπίν των νουκλεονίων + το άθροισμα των σπιν τους.

$$\vec{J}_{\text{πυρήνα}} \equiv \sum_{\text{νουκλεόνια}} \vec{L} + \sum_{\text{νουκλεόνια}} \vec{S} = \sum_{\text{νουκλεόνια}} (\vec{L} + \vec{S})$$

- Parity = +1 ή -1

- Οπότε για κάθε πυρήνα δίνουμε σπιν (J) και parity (π): **J^π**

π.χ., 2⁺

Spin πυρήνα (J) και ομοτιμία (πάριτυ)

- Σπιν πυρήνα, J = ολικό τροχιακό σπίν των νουκλεονίων + το άθροισμα των σπιν τους.

$$\vec{J}_{\text{πυρήνα}} \equiv \sum_{\text{νουκλεόνια}} \vec{L} + \sum_{\text{νουκλεόνια}} \vec{S} = \sum_{\text{νουκλεόνια}} (\vec{L} + \vec{S})$$

- Το ολικό σπίν (J) **άρτιων-άρτιων** πυρήνων έχει βρεθεί ότι είναι 0 και η πάριτυ + : $J^{\pi} = 0^{+}$

→ άρα, υπάρχει ισχυρό ζευγάρωμα των σπιν που δίνει άθροισμα 0

- Για **περιττό αριθμό νουκλεονίων**, το ασύζευκτο νουκλεόνιο καθορίζει σπίν και parity του πυρήνα

π.χ., $^{17}_8\text{O}$: $J^{\pi} = 5/2^{+}$, σελ. 87 βιβλίου C&G. Parity = $(-1)^l$

- Για **περιττούς-περιττούς** πυρήνες, το κάθε αζευγάρωτο πρωτόνιο και νετρόνιο συνεισφέρουν το δικό τους J^{π} . Το ολικό σπίν είναι το άθροισμα των επιμέρους σπιν σύμφωνα με τους κανόνες άθροισης σπιν, αλλά αν έχουμε πολλές επιλογές δεν έχουμε κάποιον γενικό κανόνα για το ποιο αποτέλεσμα προτιμάται. Η ολική πάριτυ είναι το γινόμενο των επιμέρους πάριτυ.

ΚΑΝΟΝΑΣ που δουλεύει στα περισσότερα!

Παράδειγμα - Εξηγήστε τα J^π του πίνακα 4.2, με τον πίνακα 5.1 του βιβλίου C&G

Table 4.2. *Energies of some light nuclei*

Nucleus	Binding energy (MeV)	Binding energy of last nucleon (MeV)	Binding energy per nucleon (MeV)	Spin and parity
^2_1H	2.22	2.2	1.1	1^+
^3_1H	8.48	6.3	2.8	$\frac{1}{2}^+$
^4_2He	28.30	19.8	7.1	0^+
^5_2He	27.34	-1.0	5.5	$\frac{3}{2}^-$
^6_3Li	31.99	4.7	5.3	1^+
^7_3Li	39.25	7.3	5.6	$\frac{3}{2}^-$
^8_4Be	56.50	17.3	7.1	0^+
^9_4Be	58.16	1.7	6.5	$\frac{3}{2}^-$
$^{10}_5\text{B}$	64.75	6.6	6.5	3^+
$^{11}_5\text{B}$	76.21	11.5	6.9	$\frac{3}{2}^-$
$^{12}_6\text{C}$	92.16	16.0	7.7	0^+
$^{13}_6\text{C}$	97.11	5.0	7.5	$\frac{1}{2}^-$
$^{14}_7\text{N}$	104.66	7.6	7.5	1^+
$^{15}_7\text{N}$	115.49	10.8	7.7	$\frac{1}{2}^-$
$^{16}_8\text{O}$	127.62	12.1	8.0	0^+
$^{17}_8\text{O}$	131.76	4.1	7.8	$\frac{5}{2}^+$

Table 5.1

x_N	Neutron	Proton
1s	1s _{1/2} 2	2 1s _{1/2} 1s
1p	1p _{1/2} 6 1p _{3/2} 8	6 1p _{1/2} 1p 8 1p _{3/2}
1d	1d _{3/2} 14 2s _{1/2} 16	14 1d _{3/2} 1d 16 2s _{1/2}
2s	1d _{5/2} 20	20 1d _{5/2} 2s
1f	1f _{7/2} 28 2p _{1/2} 32	28 1f _{7/2}
2p	1f _{5/2} 38 2p _{3/2} 40	32 2p _{1/2} 1f 38 1f _{5/2} 2p
1g	1g _{7/2} 50 2d _{3/2} 56	40 2p _{3/2}
2d	1g _{9/2} 64 1h _{11/2} 76	50 1g _{9/2}
1h	3s _{1/2} 78 2d _{5/2} 82	58 1g _{7/2} 1g
3s	2f _{7/2} 90	64 2d _{3/2}

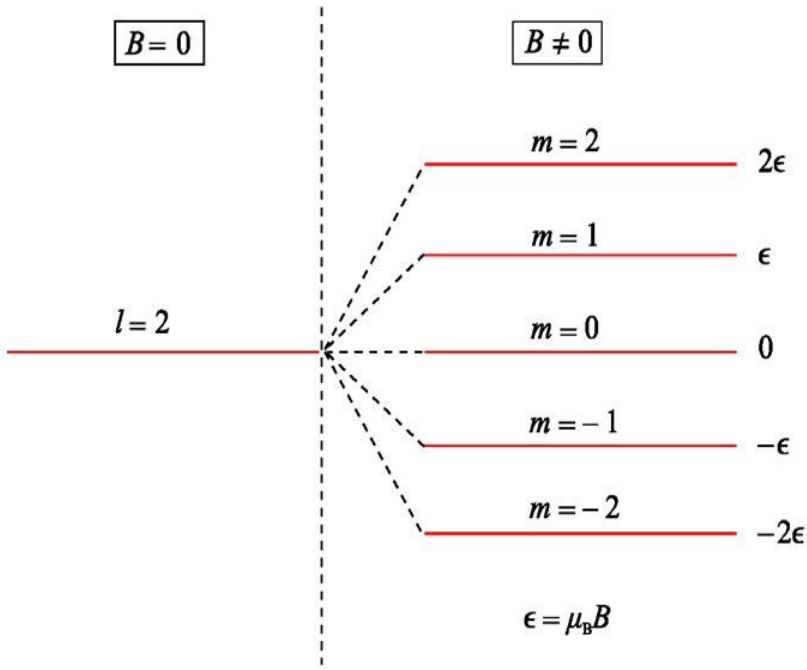
- π.χ., $^{17}_8\text{O}$: α) τα 8 πρωτόνια συνεισφέρουν $J^\pi = 0^+$ β) από τα 9 νετρόνια, τα 8 συνεισφέρουν $J^\pi = 0^+$, κι έτσι το ένατο (το αζευγάρωτο) καθορίζει το J^π . Όμως, το ένατο νετρόνιο είναι στον φλοιό $1d_{5/2}$: το d μας λέει ότι $l=2 \rightarrow \text{παριτυ} = (-1)^l = (-1)^2 = +1$ και το 5/2 μας λέει ότι $j=5/2$, οπότε αυτό το ασύζευκτο νετρόνιο δίνει: $J^\pi = 5/2^+$ για το $^{17}_8\text{O}$

4. Πυρηνικό Πρότυπο Φλοιών :

Μαγνητική ροπή
και

πυρηνικός μαγνητικός συντονισμός

Θυμηθείτε: διαχωρισμός εκφυλισμένων ενεργειακών σταθμών υδρογόνου σε μαγνητικό πεδίο λόγω τροχιακής στροφορμής



1. Ενέργεια λόγω αλληλεπίδρασης του ηλεκτρονίου (της **τροχιακής μαγνητικής ροπής** του, μ) με το μαγνητικό πεδίο B :

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad \vec{B} = B \hat{z}$$

2. Το ηλεκτρόνιο συμπεριφέρεται σαν μαγνήτης με διπολική μαγνητική ροπή:

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m_e c} \vec{L} = \frac{-e}{2m_e c} \vec{L}$$

με αλγεβρική τιμή:

$$\mu = \frac{-e}{2m_e c} \hbar \sqrt{l(l+1)}$$

Μαγνητόνη του Bohr, μ_B : $\mu_B \equiv \frac{e \hbar}{2m_e c}$

$$\mu = -\mu_B \sqrt{l(l+1)}$$

$$\mu_z = -\mu_B m_l$$

$$U = m_l (\mu_B B)$$

ΣΧΗΜΑ 10.4: Ο διαχωρισμός Zeeman για μια στάθμη με $l = 2$. Η τοποθέτηση του ατόμου σε ένα μαγνητικό πεδίο προκαλεί άρση του περιστροφικού εκφυλισμού μιας στάθμης με κβαντικό αριθμό l , και δημιουργία $2l + 1$ νέων σταθμών συμμετρικά διατεταγμένων ως προς την αρχική και με σταθερή μεταξύ τους απόσταση ίση με $\epsilon = \mu_B B$.

Π.χ: Από τον προκαλούμενο διαχωρισμό των ενεργειακών επιπέδων κάποιων αερίων σ' ένα αστέρι, μπορούμε να μετρήσουμε το μαγνητικό πεδίο ενός αστεριού

Ορισμός της μαγνητικής διπολικής ροπής, μ , ώστε να περιγράψει και το πόσο μεγάλη στροφορμή την προκαλεί

1. Το ηλεκτρόνιο συμπεριφέρεται σαν μαγνήτης με διπολική μαγνητική ροπή ανάλογη της τροχιακής του στροφορμής:

$$\vec{\mu} = \left(\frac{q}{2m_e c} \right) \vec{L} = \frac{-e}{2m_e c} \vec{L} \rightarrow \langle \vec{\mu} \rangle = \frac{-e}{2m_e c} \hbar \sqrt{l(l+1)} \rightarrow \boxed{\langle \vec{\mu} \rangle = -\mu_B \sqrt{l(l+1)}}$$

μ_B : μαγνητόνη του Bohr όπου : $\mu_B \equiv \frac{e \hbar}{2m_e c}$

2. Μπορούμε να γράφουμε: $\langle \vec{\mu} \rangle = -\mu_B \sqrt{l(l+1)} \rightarrow \langle \vec{\mu} \rangle = -\mu_B \frac{\langle \vec{L} \rangle}{\hbar}$

$$\rightarrow \langle \vec{\mu} \rangle = -\mu_B l \frac{\langle \vec{L} \rangle}{l \hbar} \rightarrow \langle \vec{\mu} \rangle = \mu \frac{\langle \vec{L} \rangle}{l \hbar}$$

Έτσι, η “σταθερά αναλογίας” μ περικλείει το κύριο μέρος της εξάρτησης από το l , και ορίζει πόσο μεγάλη είναι η μαγνητική διπολική ροπή, αφού:

$\mu = -\mu_B l$, και !

$\frac{\langle \vec{L} \rangle}{l \hbar} = \frac{\sqrt{l(l+1)} \hbar}{l \hbar} \sim \text{σταθερό}$

Μαγνητική ροπή νουκλεονίου: ανάλογη της ιδιοστροφορμής του (σπίν)

- Το πρωτόνιο έχει σπιν $s=1/2$ ($m_s = +1/2, -1/2$), όπως και τα νετρόνια. Η **μαγνητική του ροπή λόγω του σπιν του**, είναι ίση με :

$$\vec{\mu}_p \equiv \vec{\mu}_{spin} = g_s \frac{q}{2 m_p c} \vec{S} = g_s \frac{e}{2 m_p c} \vec{S} = g_s \mu_N \frac{\vec{S}}{\hbar}$$

$$\mu_p = g_s \mu_N \sqrt{s(s+1)}$$

$$\text{όπου: } \mu_N \equiv \frac{e \hbar}{2 m_p c}$$

Πυρηνική μαγνητόνη

$m_s = 1/2$ ή $-1/2 = 2$
επι μέρους
ενεργειακές
στάθμες:

$$U_p = -g_s \mu_N m_s B$$

Κατ' αναλογία
με:

$$\langle \vec{\mu} \rangle \equiv \frac{\mu}{\hbar} \frac{\langle \vec{L} \rangle}{l}$$

γράφουμε:

$$\langle \vec{\mu} \rangle \equiv \frac{\mu}{\hbar} \frac{\langle S \rangle}{s}, \quad \langle \mu_z \rangle \equiv \frac{\mu}{\hbar} \frac{\langle S_z \rangle}{s}$$

$$\mu_{p,z} = g_s \mu_N m_s$$

$$\mu_{p,z} \equiv \frac{\mu}{\hbar} \frac{m_s \hbar}{s}$$

$$\frac{\mu}{s} = g_s \mu_N \rightarrow \mu = \frac{1}{2} g_s \mu_N$$

Το πείραμα δίνει, για το πρωτόνιο και το νετρόνιο:

$$\mu_p = +2.8 \mu_N$$

$$\mu_n = -1.9 \mu_N$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu_p = +2.8 \mu_N \\ \mu_n = -1.9 \mu_N \end{array} \right\} |g_s| \neq 2$$

άρα, τα νουκλεόνια δεν
είναι στοιχειώδη.
Αν ήταν (όπως π.χ.,
το ηλεκτρόνιο)
θα είχαν $|g_s| = 2$!

Spin πυρήνα (J) και μαγνητική ροπή (μ)

Μέτρηση του μ με πυρηνικό μαγνητικό συντονισμό!

- Σπιν πυρήνα, J = ολικό τροχιακό σπίν των νουκλεονίων + το άθροισμα των σπιν τους.

$$\vec{J}_{\text{πυρήνα}} \equiv \sum_{\text{νουκλεόνια}} \vec{L} + \sum_{\text{νουκλεόνια}} \vec{S} = \sum_{\text{νουκλεόνια}} (\vec{L} + \vec{S})$$

- Το ολικό σπίν J καθορίζει τη μαγνητική ροπή του πυρήνα, μ**

Κατ' αναλογία με:

$$\langle \vec{\mu} \rangle \equiv \frac{\mu}{\hbar} \frac{\langle \vec{L} \rangle}{l}$$

γράφουμε:

$$\langle \vec{\mu} \rangle \equiv \frac{\mu}{\hbar} \frac{\langle \vec{J} \rangle}{j}$$

Επιπλέον δυναμική ενέργεια λόγω αλληλεπίδρασης της μαγνητικής διπολικής ροπής με ένα μαγνητικό πεδίο:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_z B$$

$$U = -\frac{\mu}{j} m_j B = -\left(\frac{\mu}{j} B\right) m_j$$

Οι ενεργειακές στάθμες διαχωρίζονται σε τόσες όσες και τα διαθέσιμα m_j

$$\mu_z = \frac{\mu}{j \hbar} m_j \hbar = \frac{\mu}{j} m_j$$

Spin πυρήνα (J) και μαγνητική ροπή (μ)

Μέτρηση του μ με πυρηνικό μαγνητικό συντονισμό!

- Σπιν πυρήνα, J = ολικό τροχιακό σπίν των νουκλεονίων + το άθροισμα των σπιν τους.

$$\vec{J}_{\text{πυρήνα}} \equiv \sum_{\text{νουκλεόνια}} \vec{L} + \sum_{\text{νουκλεόνια}} \vec{S} = \sum_{\text{νουκλεόνια}} (\vec{L} + \vec{S})$$

- Το ολικό σπίν J καθορίζει τη μαγνητική ροπή του πυρήνα, μ**

Κατ' αναλογία με:

$$\langle \vec{\mu} \rangle \equiv \frac{\mu}{\hbar} \frac{\langle \vec{L} \rangle}{l}$$

γράφουμε:

$$\langle \vec{\mu} \rangle \equiv \frac{\mu}{\hbar} \frac{\langle \vec{J} \rangle}{j}$$

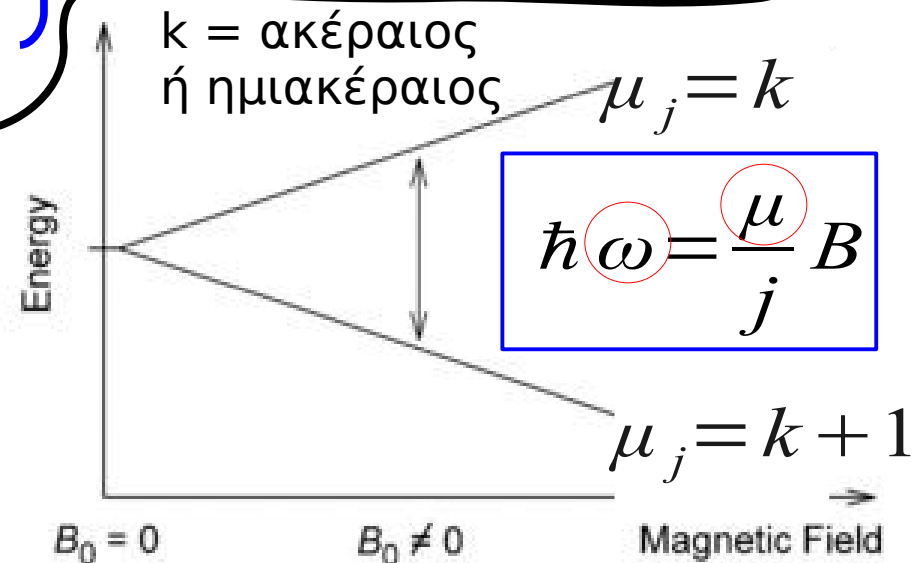
Επιπλέον δυναμική ενέργεια λόγω αλληλεπίδρασης της μαγνητικής διπολικής ροπής με ένα μαγνητικό πεδίο:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_z B$$

$$\mu_z = \frac{\mu}{j \hbar} m_j \hbar = \frac{\mu}{j} m_j$$

$$U = -\frac{\mu}{j} m_j B = -\left(\frac{\mu}{j} B\right) m_j$$

Οι ενεργειακές στάθμες διαχωρίζονται σε τόσες όσες και τα διαθέσιμα m_j



- Με **πυρηνικό μαγνητικό συντονισμό**: παλλόμενο H/M πεδίο κυκλικής συχνότητας $\omega \rightarrow$ εξαναγκασμένες μεταπτώσεις μεταξύ δύο διαδοχικών σταθμών: $\rightarrow$ **μετράμε το μ από το ω που πετυχαίνει συντονισμό**

Spin πυρήνα (J) και μαγνητική ροπή (μ)

- Πειραματικά βρίσκουμε ότι οι πυρήνες έχουν μαγνητικές ροπές $\mu \sim -3 \mu_N$ έως $10 \mu_N$
 - Μικρή σε σχέση με τον αριθμό νουκλεονίων (το καθένα νουκλεόνιο έχει $\mu \sim -2 \mu_N$ έως $+3 \mu_N$)
 - Ταιριάζει με την υπόθεση ότι ουσιαστικά μόνο τα “ασύζευκτα” νουκελόνια συνεισφέρουν στη συνολική μαγνητική ροπή του πυρήνα
 - Μικρή επίσης και σε σχέση με μαγνητόνη Bohr
 - Έτσι, έχουμε μια σοβαρή ένδειξη ότι δεν έχουμε ηλεκτρόνια στους πυρήνες

Γιατί:

$$\text{Μαγνητόνη του Bohr, } \mu_B : \mu_B \equiv \frac{e \hbar}{2 m_e c}$$

$$\text{Πυρηνική Μαγνητόνη, } \mu_N : \mu_N \equiv \frac{e \hbar}{2 m_p c}$$



$$\mu_B \simeq 2000 \mu_N$$

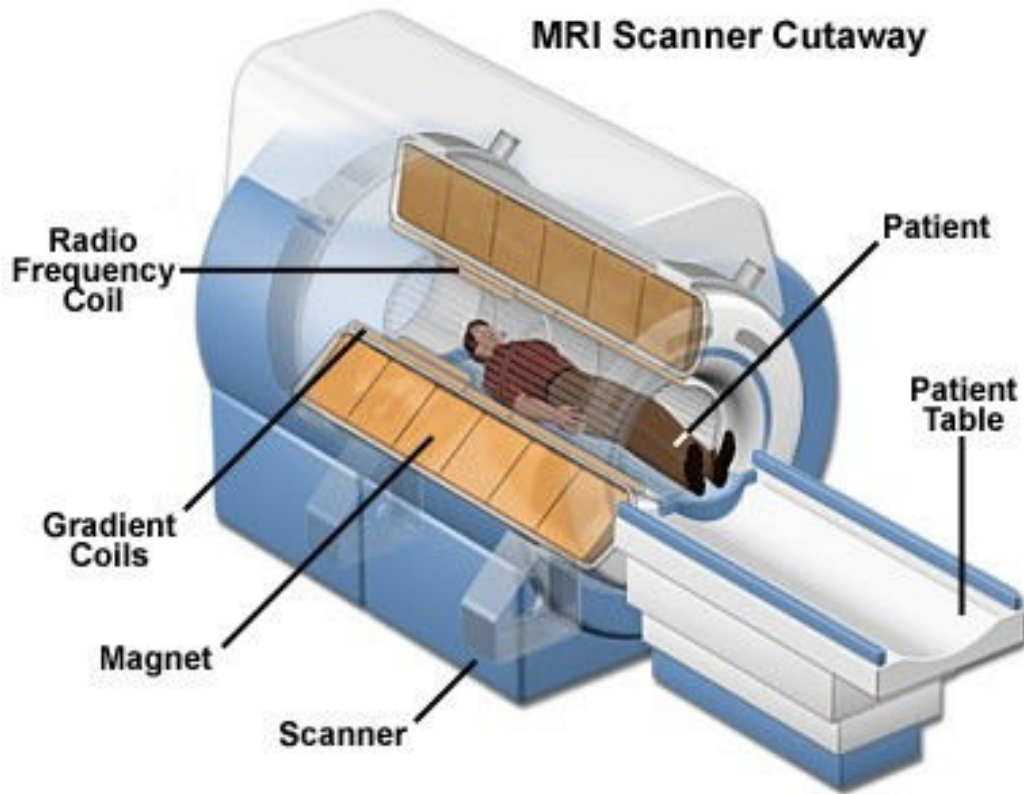
Πυρηνική μαγνητόνη $\sim 1/2000$ της μαγνητόνης του Bohr μ_B (που ορίζεται με τη μάζα του ηλεκτρονίου αντί του πρωτονίου)

Μια εφαρμογή: Μαγνητική Τομογραφία

“Μαγνητική τομογραφία”

= Απεικόνιση Μαγνητικού Συντονισμού

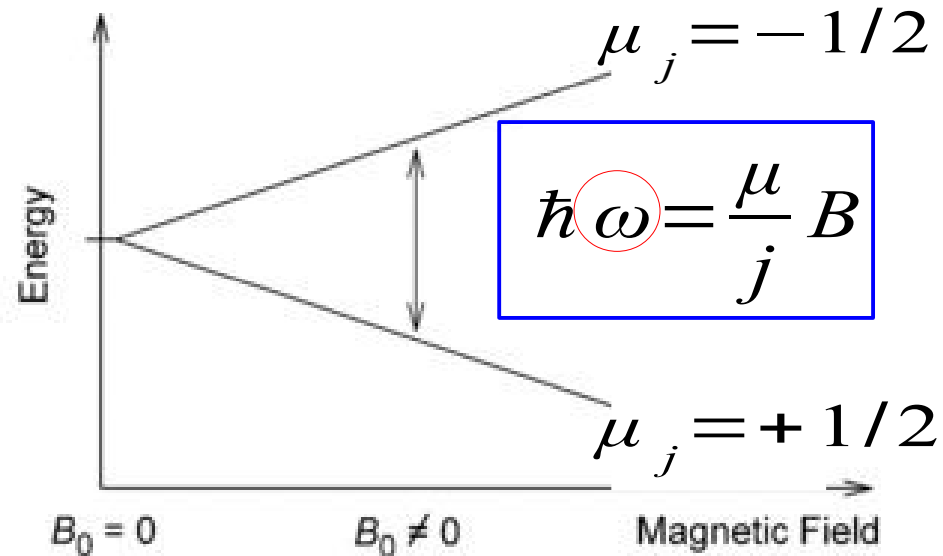
= Magnetic Resonance Imaging = MRI



Εικόνα από: wikipedia

$$U = -\frac{\mu}{j} m_j B = -\left(\frac{\mu}{j} B\right) m_j$$

Για υδρογόνο στο σώμα μας = πρωτόνια
→ $m_j = +1/2$ ή $-1/2$ και $\mu = 2.8 \mu_N$



Βασική αρχή: Μαγνητικό πεδίο B_0
διαφορετικό σε κάθε θέση
→ Η ενεργειακή διαφορά είναι
διαφορετική σε κάθε θέση
→ Η συχνότητα συντονισμού ω είναι
διαφορετική σε κάθε θέση
→ διαφορετικές συχνότητες “σαρώνουν”
τις θέσεις των πρωτονίων (υδρογόνου)
στο σώμα → σκανάρουν το μαλακό ιστό

Μαγνητική ροπή πυρήνα, μ = μαγνητική ροπή του ασύζευκτου νουκλεονίου

- Αυτό το νουκλεόνιο έχει μαγνητική διπολική ροπή:

$$\vec{\mu}_p = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_s = g_L \frac{q}{2m_p c} \vec{L} + g_s \frac{q}{2m_p c} \vec{S} = g_L \frac{\mu_N}{\hbar} \vec{L} + g_s \frac{\mu_N}{\hbar} \vec{S} = \frac{\mu_N}{\hbar} [g_L \vec{L} + g_s \vec{S}]$$

- Για να πάρουμε υπόψιν μας το ότι το νετρόνιο δεν έχει φορτίο, γράφουμε για τη μαγνητική ροπή λόγω L: Πρωτόνιο: $g_L = 1$,

νετρόνιο: $g_L = 0$

- Τον πυρήνα τον χαρακτηρίζει το ολικό του σπίν J, και γράφουμε $\langle \vec{\mu} \rangle = \frac{\mu \langle \vec{J} \rangle}{j}$ ώστε την κύρια εξάρτηση από το j να την έχει το μ

Εξισώνοντας, εισάγουμε το j και τελικά παίρνουμε:

$$\mu = \mu_N [jg_L - \frac{1}{2}(g_L - g_s)] \quad \text{for } j = l + \frac{1}{2},$$

$$\mu = \mu_N \left[jg_L + \frac{j}{2(j+1)}(g_L - g_s) \right] \quad \text{for } j = l - \frac{1}{2},$$

(5.26)

Σχέση 5.26,
βιβλίο C&G

Αυτές εδώ ονομάζονται “τιμές Schmidt”

Οι μετρούμενες μαγνητικές ροπές των πυρήνων είναι κοντά στις τιμές που βρήκαμε παίρνοντας συνεισφορά μόνο από το ασύζευκτο νουκλεόνιο !

Συμπεράσματα από το πυρηνικό μοντέλο των φλοιών

- Με το να βάλουμε τα νουκλεόνια μέσα σ' ένα κεντρικό πηγάδι δυναμικού, και να προσθέσουμε απλά και έναν όρο ανάλογο της σύζευξης $L \cdot S$, αναπαράγουμε σε πολύ καλό βαθμό τις ενεργειακές στάθμες που μπορούν να καταλάβουν τα νουκλεόνια.
- Όταν τα νουκλεόνια συμπληρώνουν αυτές τις στάθμες από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη χωρίς κενά, ο πυρήνας σαν σύνολο βρίσκεται στην ελάχιστη δυνατή ενεργειακή κατάσταση, δηλαδή στη **θεμελιώδη του κατάσταση**.
- Το μοντέλο των φλοιών εξηγεί τη μεγάλη πλειοψηφία των χαρακτηριστικών των άρτιων-περιττών ($N=\text{άρτιο}$, και $Z=\text{περιττό}$) ή περιττών-άρτιων πυρήνων στη θεμελιώδη τους κατάσταση: **σπίν J , πάριτυ π , και προσεγγιστικά τη μαγνητική διπολική ροπή μ , ως τα J , πάριτυ, & μ που έχει το τελευταίο, ασύζευκτο νουκλεόνιο**. Τα ζευγαρωμένα νουκλεόνια συνεισφέρουν $J^\pi = 0^+$ (έτσι, οι άρτιοι-άρτιοι πυρήνες έχουν $J^\pi=0^+$)
- Αν ο πυρήνας είναι "περιττός-περιττός" (δηλ, έχει και αζευγάρωτο νετρόνιο, και αζευγάρωτο πρωτόνιο), τότε τα J^π και μ του πυρήνα, έρχονται από το συνδυασμό των J^π και μ του αζευγάρωτου νετρονίου και τα J^π και μ του αζευγάρωτου πρωτονίου, και δεν μπορούμε να προβλέψουμε επ' ακριβώς τις τιμές τους: δίνουμε απλά πιθανές τιμές σύμφωνα με τον κανόνα πρόσθεσης των στροφορμών των δύο αζευγάρωτων νουκλεονίων. Η συνολική πάριτυ θα είναι το γινόμενο των πάριτυ.

Ηλεκτρική τετραπολική ροπή πυρήνα, Q

- Κατανομή ηλεκτρικού φορτίου στον πυρήνα → χαρακτηρίζεται από το Q

Οχι προς εξέταση

- Όταν πυρήνας σφαιρικός $\rightarrow Q = 0$
- Αλλιώς
 - $Q > 0$ όταν επιμήκυνση κατά άξονα z
 - $Q < 0$ όταν συμπίεση κατά άξονα z
- Όταν $j=0$ ή $j=1/2 \rightarrow Q = 0$

Ηλεκτρική τετραπολική ροπή πυρήνα, Q

Οχι προς εξέταση

- Η κατανομή του φορτίου στον όγκο του πυρήνα είναι η αιτία ύπαρξης ηλεκτρικών ροπών

- ▶ μπορεί να αποδειχτεί ότι η ηλεκτρική διπολική ροπή μηδενίζεται για καλά καθορισμένη κβαντομηχανική κατάσταση (όπως η βασική κατάσταση του πυρήνα)
- ▶ η τετραπολική ηλεκτρική ροπή: eQ υπάρχει, αν ο πυρήνας δεν είναι σφαιρικός
- ▶ η τετραπολική ροπή ορίζεται ως:

$$Q = 1/e \int \rho (3z^2 - r^2) dV$$

- ▶ ρ : πυκνότητα φορτίου, dV : στοιχείο όγκου
- eQ έχει μονάδες επιφάνειας
- ▶ Σχετίζεται με το σχήμα του πυρήνα; για σφαιρικό πυρήνα $eQ=0$

Το ηλεκτρικό δυναμικό μη σημειακού φορτίου

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} \int \rho dV + \frac{1}{R^2} \int \rho z dV + \frac{1}{R^3} \int \rho (3z^2 - r^2) dV \right]$$

monopole dipole quadrupole

prolate $Q +ve$

oblate $Q -ve$

$Q = \frac{2}{5} Z(a^2 - b^2) \approx 6.5 Z R^2 (\Delta R/R)$

The diagram illustrates the quadrupole moment Q in terms of the shape of the nucleus. It shows two types of spheroids: a prolate spheroid (elongated along the vertical axis) and an oblate spheroid (flattened along the vertical axis). Below these, a 3D coordinate system is shown with a sphere of radius R . The vertical axis is labeled a and the horizontal axis is labeled b . The difference in radii is labeled ΔR . The formula for Q is given as $Q = \frac{2}{5} Z(a^2 - b^2) \approx 6.5 Z R^2 (\Delta R/R)$.

Η ηλεκτρική τετραπολική ροπή είναι ένα ευαίσθητο εργαλείο για τη μελέτη του πυρηνικού περιβάλλοντος. Θα την ξανασυναντήσουμε στη γάμμα-διάσπαση