

Εισαγωγή στη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων

Ασκήσεις Στοιχειωδών Σωματιδίων

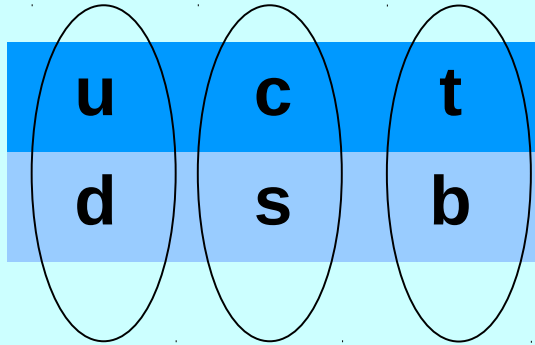
5^ο Εξάμηνο

Δ. Σαμψωνίδης – Κ. Κορδάς

21 Ιανουαρίου 2011

Κουάρκ και Λεπτόνια

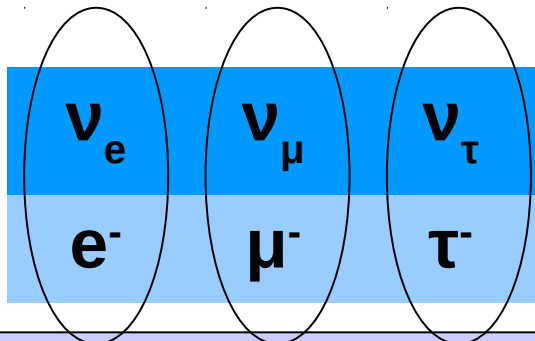
Κουάρκ



Φορτίο (Q)	Βαρυονικός Αριθμός (B)	Αντίστοιχος Αριθμός "γεύσης"
+2/3	+1/3	+1
-1/3	+1/3	-1

Λεπτονικός Αριθμός = 0 για όλα τα κουάρκ

Λεπτόνια



Φορτίο (Q)	Βαρυονικός Αριθμός (B)	Αντίστοιχος Λεπτονικός Αριθμός
0	0	+1
-1	0	+1

Κουάρκ

Μπορούν να συμμετέχουν σε όλες τις αλληλεπιδράσεις
(Ισχυρές, Ασθενείς και ΗλεκτροΜαγνητικές)

Κβαντικοί
Αριθμοί

των κουάρκ

	B	Q	S	C	B	T
u	+1/3	+2/3	0	0	0	0
d	+1/3	-1/3	0	0	0	0
s	+1/3	-1/3	-1	0	0	0
c	+1/3	+2/3	0	+1	0	0
b	+1/3	-1/3	0	0	-1	0
t	+1/3	+2/3	0	0	0	+1

και

των
αντικουάρκ

	B	Q	S	C	B	T
\bar{u}	-1/3	-2/3	0	0	0	0
\bar{d}	-1/3	+1/3	0	0	0	0
\bar{s}	-1/3	+1/3	+1	0	0	0
\bar{c}	-1/3	-2/3	0	-1	0	0
\bar{b}	-1/3	+1/3	0	0	+1	0
\bar{t}	-1/3	-2/3	0	0	0	-1

Λεπτόνια

ΔΕΝ συμμετέχουν στις Ισχυρές αλληλεπιδράσεις
("αισθάνονται" μόνο τις Ασθενείς και ΗλεκτροΜαγνητικές)

Λεπτονικός Αριθμός

	e^-	ν_e	μ^-	ν_μ	τ^-	ν_τ
L_e	+1	+1	0	0	0	0
L_μ	0	0	+1	+1	0	0
L_τ	0	0	0	0	+1	+1

	e^+	$\bar{\nu}_e$	μ^+	$\bar{\nu}_\mu$	τ^+	$\bar{\nu}_\tau$
L_e	-1	-1	0	0	0	0
L_μ	0	0	-1	-1	0	0
L_τ	0	0	0	0	-1	-1

- Κάθε 'οικογένεια' λεπτονίων **ΔΙΑΤΗΡΕΙ** τον αντίστοιχο Λεπτονικό Αριθμό
- Ο Λεπτονικός αριθμός **ΔΙΑΤΗΡΕΙΤΑΙ ΠΑΝΤΑ**

Σωματίδια που παρατηρούμε στη φύση

• Λεπτόνια

- σημειακά - δεν έχουν δομή
 - Κάθε οικογένεια έχει τον δικό της Λεπτονικό αριθμό

• Αδρόνια

- Φτιαγμένα από κουάρκ (τα κουάρκ δεν τα βλέπουμε ελεύθερα - μόνο μέσα σε αδρόνια)
 - Βαρυόνια - **συνδυασμοί 3 κουάρκ**
 - π.χ, $p= uud$, $n= udd$
 - Έχουν Βαρυονικό αριθμό $B=1$
 - Μεσόνια - **συνδυασμοί κουάρκ με αντι-κουάρκ**
 - π.χ. $\pi^+ = u\bar{d}$, $D^- = c\bar{d}$, $\pi^0 = u\bar{u}$ και $d\bar{d}$
 - Έχουν Βαρυονικό αριθμό $B=0$

Διατήρηση κβαντικών αριθμών στις διάφορες αλληλεπιδράσεις

- Πίνακας 1.4 στις Σημειώσεις
Στοιχειωδών

Ασκηση 1

Ποιά είναι τα συστατικά κουάρκ των παρακάτω αδρονίων?

Αν το αδρόνιο είναι συνδυασμός περισσότερων του ενός ζεύγους $q \bar{q}$ να δωθούν όλα τα ζεύγη

BARYONS	Strangenes s	Charm
n	0	0
p	0	0
Δ^{++}	0	0
Λ^0	-1	0
Ω^-	-3	0
MESONS		
π^+	0	0
π^0	0	0
ρ^0	0	0
η'^0	0	0
K^+	+1	0
K^-	-1	0
\bar{K}^0	-1	0
D^+	0	+1

} Συνδυασμοί u και d
(εννοείται και των
αντι-κουάρκ τους)
← Συνδυασμοί u , d και s

Άσκηση 1 - Λύση

Ποιά είναι τα συστατικά κουάρκ των παρακάτω αδρονίων?

Αν το αδρόνιο είναι συνδυασμός περισσότερων του ενός ζεύγους $q \bar{q}$ να δωθούν όλα τα ζεύγη

BARYONS	Strangeness	Charm
n	0	0
p	0	0
Δ^{++}	0	0
Λ^0	-1	0
Ω^-	-3	0
MESONS		
π^+	0	0
π^0	0	0
ρ^0	0	0
η'^0	0	0
K^+	+1	0
K^-	-1	0
\bar{K}^0	-1	0
D^+	0	+1

Σημείωση: οι κβαντικοί αριθμοί

“strangeness/παραξενιά” και “charmness/χάρη” έχουν το πρόσημο του φορτίου του αντίστοιχου κουάρκ.

Π.χ., το s έχει φορτίο $-1/3$, άρα: strangeness=-1
το c έχει φορτίο $+2/3$, άρα: charmness=+1

$$n = udd, p = uud, \Delta^{++} = uuu$$

$$\Lambda^0 = sdu, \Omega^- = sss$$

$$\pi^+ = u\bar{d}$$

π^0 = γραμμικός συνδυασμός των $u\bar{u}$ και $d\bar{d}$
(Σημείωση: εμφανίζεται είτε ως $u\bar{u}$ είτε ως $d\bar{d}$)

$$\rho^0 = \{u\bar{u}, d\bar{d}\} \text{ (αλλιώτικος γραμ. συνδ.)}$$

$$\eta' = \{u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}\} \text{ (γραμμικός συνδυασμός)}$$

$$K^+ = u\bar{s}, K^- = \bar{u}s, K^0 = \bar{s}d, \bar{K}^0 = s\bar{d}, D^+ = c\bar{d}$$

Άσκηση 2

Ποιές από τις παρακάτω αντιδράσεις/διασπάσεις γίνονται?
Αυτές που δεν γίνονται, ποιόν νόμο διατήρησης παραβιάζουν?

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \gamma$$

$$e^- \rightarrow \nu_e + \gamma$$

$$p + p \rightarrow p + \Sigma^+ + K^-$$

$$p \rightarrow e^+ + \nu_e$$

$$p \rightarrow e^+ + n + \nu_e$$

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

Δίνονται οι μάζες των σωματιδίων

$$M(\gamma) = 0$$

$$M(\nu_e) = M(\nu_\mu) = 0$$

$$M(e^+) = M(e^-) = 0.511 \text{ MeV}$$

$$M(\pi^+) = M(\pi^-) = 139.6 \text{ MeV}$$

$$M(\pi^0) = 135 \text{ MeV}$$

$$M(\mu^+) = M(\mu^-) = 105.7 \text{ MeV}$$

$$M(p) = 938.3 \text{ MeV}$$

$$M(n) = 939.6 \text{ MeV}$$

$$M(\Sigma^+) = 1189.4 \text{ MeV}$$

$$M(K^+) = M(K^-) = 493.7 \text{ MeV}$$

Δίνονται:

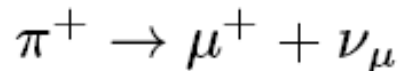
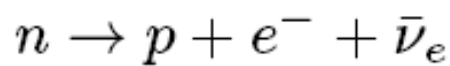
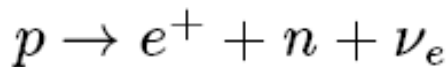
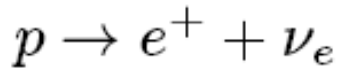
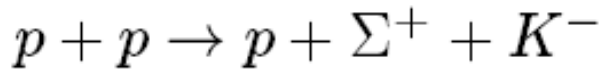
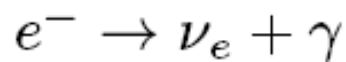
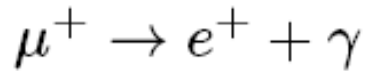
$$\Sigma^+ = u u s, K^- = \bar{u} s$$

Σημείωση:

- Στη διάσπαση ενός σωματιδίου ελέγχουμε τη διατήρηση της ενέργειας
- Όταν όμως έχουμε σκέδαση δύο σωματιδίων υποθέτουμε ότι η αρχική ενέργεια (που περιλαμβάνει την κινητική ενέργεια) μπορεί πάντα να γίνει είναι αρκετή για να επιτρέπεται η αντίδραση

Άσκηση 2 - λύση

Ποιές από τις παρακάτω αντιδράσεις/διασπάσεις γίνονται?
Αυτές που δεν γίνονται, ποιόν νόμο διατήρησης παραβιάζουν?



1. Διατήρηση λεπτονικού αριθμού

2. Διατήρηση φορτίου

3. Διατήρηση φορτίου

4. Διατήρηση βαρυονικού αριθμού

5. Διατήρηση ενέργειας

6. Επιτρέπεται

7. Επιτρέπεται

Βάζω σε πίνακα τις ποσότητες / κβαντικούς αριθμούς που διατηρούνται πάντα, σε όλες τις αλληλεπιδράσεις. Πρώτα βάζω τα πιό εύκολα να ελεγχθούν και σταματάω με το πρώτο που παραβιάζεται!

	Φορτίο	Βαρυονικός	Λεπτονικός	Ενέργεια
1	OK	OK	X	
2	X			
3	X			
4	OK	X		
5	OK	OK	OK	X

Άσκηση 3

Οι παρακάτω διασπάσεις δεν γίνονται. Γιατί? (ποιόν νόμο διατήρησης παραβιάζουν?)

$$n \rightarrow p + e^{-}$$

$$n \rightarrow \pi^{+} + e^{-}$$

$$n \rightarrow p + \pi^{-}$$

$$n \rightarrow p + \gamma$$

Δίνονται οι μάζες των σωματιδίων

$$M(\gamma) = 0$$

$$M(\nu_e) = M(\nu_\mu) = 0$$

$$M(e^+) = M(e^-) = 0.511 \text{ MeV}$$

$$M(\pi^+) = M(\pi^-) = 139.6 \text{ MeV}$$

$$M(\pi^0) = 135 \text{ MeV}$$

$$M(\mu^+) = M(\mu^-) = 105.7 \text{ MeV}$$

$$M(p) = 938.3 \text{ MeV}$$

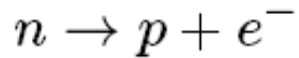
$$M(n) = 939.6 \text{ MeV}$$

$$M(\Sigma^+) = 1189.4 \text{ MeV}$$

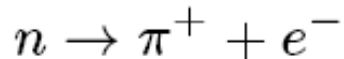
$$M(K^+) = M(K^-) = 493.7 \text{ MeV}$$

Άσκηση 3 - λύση

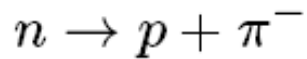
Οι παρακάτω διασπάσεις δεν γίνονται. Γιατί? (ποιόν νόμο διατήρησης παραβιάζουν?)



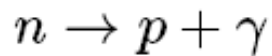
1. Διατήρηση λεπτονικού αριθμού και στροφορμής



2. Διατήρηση βαρυονικού και λεπτονικού αριθμού



3. Διατήρηση ενέργειας



4. Διατήρηση φορτίου

Βάζω σε πίνακα τις ποσότητες / κβαντικούς αριθμούς που διατηρούνται πάντα, σε όλες τις αλληλεπιδράσεις. Πρώτα βάζω τα πιό εύκολα να ελγχθούν και σταματάω με το πρώτο που παραβιάζεται!

	Φορτίο	Βαρυονικός	Λεπτονικός	Ενέργεια
1	OK	OK	X	
2	OK	X	X	
3	OK	OK	OK	X
4	X			

Άσκηση 4

Ποιές από τις παρακάτω διασπάσεις επιτρέπονται και ποιές όχι.

Αν όχι, γιατί? Αν ναι, ποιά αλληλεπίδραση είναι υπεύθυνη (ηλεκτρομαγνητική, ασθενής, ισχυρή)?

$$1. p \bar{p} \rightarrow \pi^+ \pi^0$$

$$2. \eta \rightarrow \gamma\gamma$$

$$3. \Sigma^0 \rightarrow \Lambda \pi^0$$

$$4. \Sigma^- \rightarrow n \pi^-$$

$$5. e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

$$6. \mu^- \rightarrow e^+ \bar{\nu}_e$$

$$7. \Delta^+ \rightarrow p \pi^0$$

$$8. \bar{\nu}_e p \rightarrow n e^+$$

$$9. pp \rightarrow \Sigma^+ n K^0 \pi^+ \pi^0$$

$$10. p \rightarrow e^+ \gamma$$

$$11. pp \rightarrow ppp \bar{p}$$

$$12. \pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$$

$$13. p \bar{p} \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$$

$$14. \Xi^- \rightarrow \Lambda \pi^-$$

$$15. \Sigma^- \rightarrow n e \bar{\nu}_e$$

Δίνονται οι μάζες από πριν, και

$$M(\Sigma^-) = 1197.4 \text{ MeV}$$

$$M(\Sigma^0) = 1192.6 \text{ MeV}$$

$$M(K^0) = M(\bar{K}^0) = 497.7 \text{ MeV}$$

$$M(\Xi^-) = 1321.3 \text{ MeV}$$

$$M(\Lambda) = 1115.6 \text{ MeV}$$

$$M(\Delta^+) = 1210 \text{ MeV}$$

$$M(\eta) = 547.5 \text{ MeV} \text{ (σημ: } \eta = \text{ήτα)}$$

Δίνονται:

$$\Sigma^0 = u d s, \Sigma^- = d d s$$

$$\Delta^+ = u u d, \Xi^- = d s s$$

$$K^- = \bar{u} s, K^0 = \bar{d} s$$

$$K^+ = u \bar{s}, K^0 = d \bar{s}$$

Αν επιτρέπεται, τότε:

- αν έχουμε νεutrίνο, είναι Ασθενής
- αν έχουμε φωτόνιο, είναι Ηλεκτρομαγνητική
- αν έχουμε καθαρή αλλαγή γεύσης, κατά κύριο λόγο κατά 1 μονάδα (π.χ., $\Delta S=1$, $\Delta C=1$), είναι Ασθενής. Αλλαγή γεύσης κατά 2 μονάδες (π.χ., $\Delta S=2$) είναι σπάνια!!
- αν παράγονται ζεύγη νέας γεύσης είναι κυρίως ισχυρή (με τις άλλες, αν επιτρέπονται, να γίνονται με πολύ μικρότερη πιθανότητα)

Άσκηση 4 - λύσεις

Ποιές από τις παρακάτω διασπάσεις επιτρέπονται και ποιές όχι.

Αν όχι, γιατί? Αν ναι, ποιά αλληλεπίδραση είναι υπεύθυνη

(ηλεκτρομαγνητική, ασθενής, ισχυρή)?

$$1. p \bar{p} \rightarrow \pi^+ \pi^0$$

$$2. \eta \rightarrow \gamma\gamma$$

$$3. \Sigma^0 \rightarrow \Lambda \pi^0$$

$$4. \Sigma^- \rightarrow n \pi^-$$

$$5. e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

$$6. \mu^- \rightarrow e^+ \bar{\nu}_e$$

$$7. \Delta^+ \rightarrow p \pi^0$$

$$8. \bar{\nu}_e p \rightarrow n e^+$$

1. * φορτίο
2. ΗΜ
3. * Ενέργεια
4. ασθενής
5. ΗΜ, ασθενής
6. * λεπτονικός
7. ισχυρή
8. ασθενής

$$9. pp \rightarrow \Sigma^+ n K^0 \pi^+ \pi^0$$

$$10. p \rightarrow e^+ \gamma$$

$$11. pp \rightarrow ppp \bar{p}$$

$$12. \pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$$

$$13. p \bar{p} \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$$

$$14. \Xi^- \rightarrow \Lambda \pi^-$$

$$15. \Sigma^- \rightarrow n e \bar{\nu}_e$$

9. ισχυρή
10. * βαρυονικός,
* λεπτονικός
11. ισχυρή
12. ΗΜ
13. ισχυρή
14. ασθενής
15. ασθενής

Βάζω σε πίνακα τις ποσότητες / κβαντικούς αριθμούς που διατηρούνται στις διάφορες αλληλεπιδράσεις.

Πρώτα βάζω τα πιό εύκολα να ελγχθούν και σταματάω με το πρώτο που παραβιάζεται!

αντίδραση	Φορτίο	Βαρυονικός	Λεπτονικός	Ενέργεια	Strangeness	Charmness
4	OK	OK	OK	OK	X κατά $\Delta S=1$, οπότε ασθενής	

Άσκηση 5

Ποιές από τις παρακάτω διασπάσεις επιτρέπονται και ποιές όχι.

Αν όχι, γιατί? Αν ναι, ποιά αλληλεπίδραση είναι υπεύθυνη (ηλεκτρομαγνητική, ασθενής, ισχυρή)?

1. $n \rightarrow \pi^0 \pi^0$

2. $\mu^- \rightarrow e^+ \gamma$

3. $\pi^- p \rightarrow \Sigma^- K^+ \pi^0$

4. $K^- n \rightarrow \Xi^- \bar{K}^0$

5. $\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_e \bar{\nu}_\mu$

6. $p \bar{p} \rightarrow B^+ B^-$

7. $\pi^0 \rightarrow e^+ e^- e^+ e^-$

Δίνονται:

$$B^- = \bar{u} b, B^0 = \bar{d} b$$

$$B^+ = u \bar{b}, \bar{B}^0 = d \bar{b}$$

Αν επιτρέπεται:

- αν έχουμε νεutrino, είναι ασθενής
- αν έχουμε φωτόνιο, είναι ηλεκτρομαγνητική
- αν έχουμε καθαρή αλλαγή γεύσης, αλλά κατά 1 μονάδα μόνο (π.χ., $\Delta S=1$, $\Delta C=1$) είναι ασθενής. Αν η αλλαγή γεύσης είναι κατά 2 μονάδες (π.χ., $\Delta S=2$) τότε δεν γίνεται!
- αν παράγονται ζεύγη νέας γεύσης είναι κυρίως ισχυρή (με τις άλλες, αν επιτρέπονται, να γίνονται με πολύ μικρότερη πιθανότητα)

Άσκηση 5 - Λύσεις

Ποιές από τις παρακάτω διασπάσεις επιτρέπονται και ποιές όχι.

Αν όχι, γιατί? Αν ναι, ποιά αλληλεπίδραση είναι υπεύθυνη (ηλεκτρομαγνητική, ασθενής, ισχυρή)?

$$1. n \rightarrow \pi^0 \pi^0$$

$$2. \mu^- \rightarrow e^+ \gamma$$

$$3. \pi^- p \rightarrow \Sigma^- K^+ \pi^0$$

$$4. K^- n \rightarrow \Xi^- \bar{K}^0$$

$$5. \mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_e \bar{\nu}_\mu$$

$$6. p \bar{p} \rightarrow B^+ B^-$$

$$7. \pi^0 \rightarrow e^+ e^- e^+ e^-$$

1. * βαρυονικός

2. * ηλεκτρονικός λεπτονικός αριθμός

* μιονικός λεπτονικός αριθμός

3. ισχυρή (κυρίως)

4. * $\Delta S = -2$ (άρα δεν γίνεται ούτε με ασθενή)

5. * λεπτονικός

6. ισχυρή (κυρίως)

7. ηλεκτρομαγνητική

Αν επιτρέπεται:

- αν έχουμε νεutrino, είναι ασθενής
- αν έχουμε φωτόνιο, είναι ηλεκτρομαγνητική
- αν έχουμε καθαρή αλλαγή γεύσης, αλλά κατά 1 μονάδα μόνο (π.χ., $\Delta S=1$, $\Delta C=1$) είναι ασθενής. Αν η αλλαγή γεύσης είναι κατά 2 μονάδες (π.χ., $\Delta S=2$) τότε δεν γίνεται!
- αν παράγονται ζεύγη νέας γεύσης είναι κυρίως ισχυρή (με τις άλλες, αν επιτρέπονται, γίνεται με πολύ μικρότερη πιθανότητα)

Μονάδες

- Οι ταχύτητες που συναντάμε στη φυσική των σωματιδίων είναι κοντά στο c .

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \equiv \text{μονάδα ταχύτητας} \equiv 1$$

- Οι στροφορμές, δράσεις, γενικά το γινόμενο $xp \sim \hbar$ ή $Et \sim \hbar$
 $\hbar c = 197 \text{ MeV fm}$, όπου: $\hbar = \frac{h}{2\pi} \equiv \text{μονάδα δράσης (ενέργειας} \times \text{χρόνου)} \equiv 1$

- Φυσικές διαστάσεις είναι το c και το \hbar .
 - Είναι βολικό ένα σύστημα μονάδων όπου $c = \hbar = 1$

- $M = E/c^2$ [E],
- $L = \hbar c/E$ [E⁻¹]
- $T = \hbar/E$ [E⁻¹],

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi \hbar c} = \frac{1}{137}$$

Μονάδες

	Quantity	N.U.	Conv. Factor to SI
E	GeV		$1\text{GeV} = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{J}$
P	GeV		
M	GeV		$1\text{kg} = 5.61 \cdot 10^{26}\text{GeV}$
length	$1/\text{GeV}$		$1\text{m} = 5.07 \cdot 10^{15}\text{GeV}^{-1}$
time	$1/\text{GeV}$		$1\text{sec} = 1.52 \cdot 10^{24}\text{GeV}^{-1}$
J	dimensionless		
Q	dimensionless		

Μονάδες

Αυτό μας επιτρέπει

- Να εκφράζουμε όλα τα φυσικά μεγέθη σε μονάδες ενέργειας:
απόσταση είναι $[E]^{-1}$. Ορμή είναι $[E]$. Κοκ.
 - Τα φυσικά μεγέθη να εκφράζονται σε “λογικές” μονάδες
- Φυσική μονάδα μήκους: μήκος κύματος Compton: $\hbar / m_0 c = 1$
Φυσική μονάδα χρόνου: $\tau = \hbar / m_0 c^2 = 1$
Φυσική μονάδα ενέργειας: $E = m_0 c^2 = 1$

Μάζα πρωτονίου: 10^{-24} g → Ενέργεια ηρεμίας ≈ 1 GeV.

Άρα, αν πάρουμε ως ενέργεια αναφοράς το 1 GeV, όλα τα φυσικά μεγέθη

είναι ποσότητες κοντά στη μονάδα.

Ηλεκτρόνιο: 2000 φορές πιο ελαφρύ → Ενέργεια ηρεμίας ≈ 0.5 MeV

Περιγραφή σε βασικό επίπεδο - Διαγράμματα Feynman

- Έχουμε μία πιο βασική ερμηνεία του συμβαίνει στις αντιδράσεις και διασπάσεις που βλέπουμε στη φύση
- Αλληλεπιδασίες μέσω μποζονίων διαδοτών των διαφόρων δυνάμεων
 - ΗΜ : γ
 - Ασθενείς : W^+ , W^- , Z^0
 - Ισχυρές: g

και

Αναπαράσταση με διαγράμματα Feynman

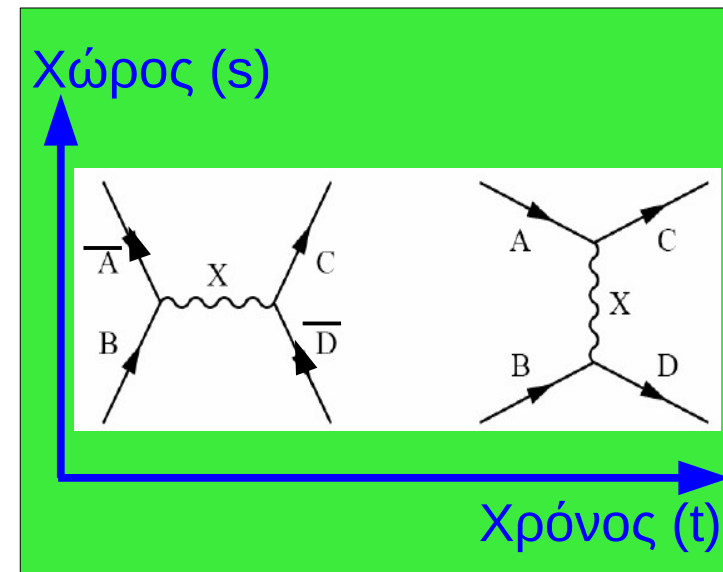
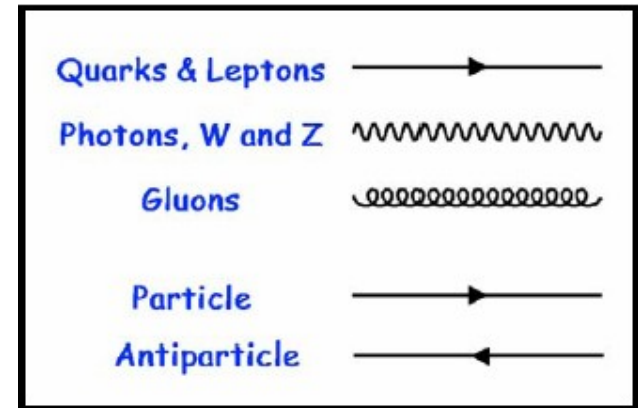
Διαγράμματα Feynman

Βασικοί κανόνες σε κάθε κόμβο:

- E, p διατηρείται
- Q διατηρείται
- Σπιν διατηρείται
- Βαρυονικός Αριθμός
- Λεπτονικός Αριθμός

Συμβολισμοί πάνω στο διάγραμμα:

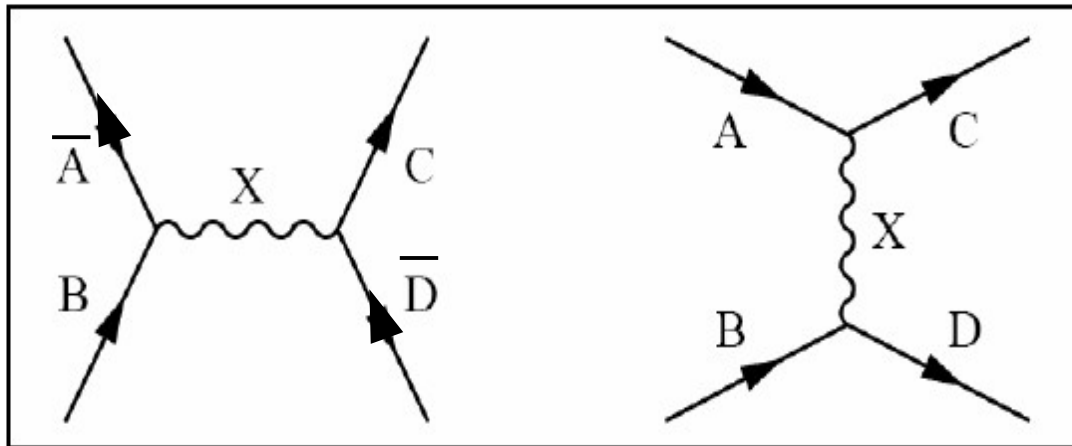
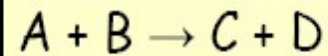
- Φερμιόνια: θετικός χρόνος \longrightarrow
- anti-φερμιόνια: αρνητικός χρόνος \longleftarrow
 π.χ., το αντι-A έρχεται από αντίθετη κατεύθυνση και εξαϋλώνεται με το B. Όμως το αντι-A συμβολίζεται να κινείται προς το παρελθόν
- Μποζόνια $\left\{ \begin{array}{l} \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \end{array} \right.$
- Το σημείο σύζευξης (κόμβος) δηλώνει την ισχύ της σύζευξης



Διαγράμματα Feynman

Γενικές Ιδιότητες

Ως επί το πλείστον τα διαγράμματα Feynman παριστούν διεργασίες της μορφής:

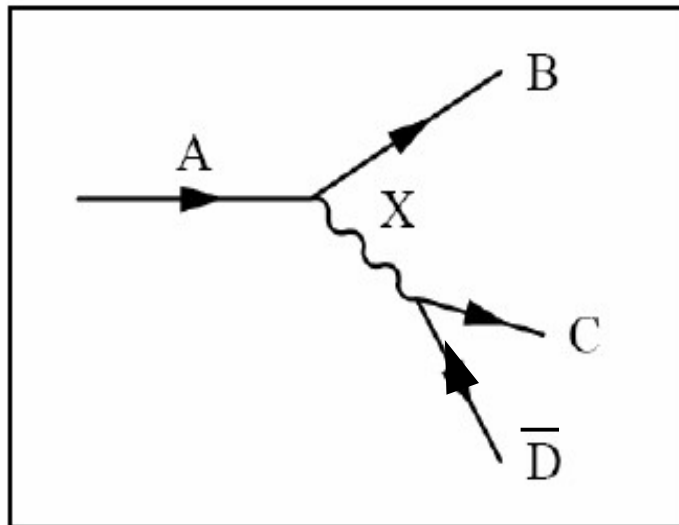


Διαγράμματα Feynman

Γενικές Ιδιότητες

ή της μορφής:

$$A \rightarrow B + C + D$$



A, B, C, D

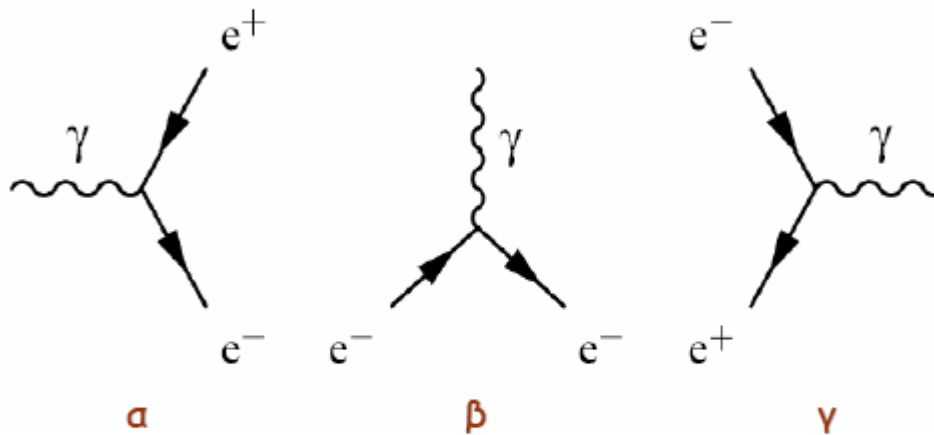
- Κουάρκ
- Λεπτόνια
- Αντικουάρκ
- Αντιλεπτόνια

X

- φωτόνιο (γ)
- γλουόνιο (g)
- $W^+ W^- Z^0$

Διαγράμματα Feynman

Ηλεκτρομαγνητικές Αλληλεπιδράσεις

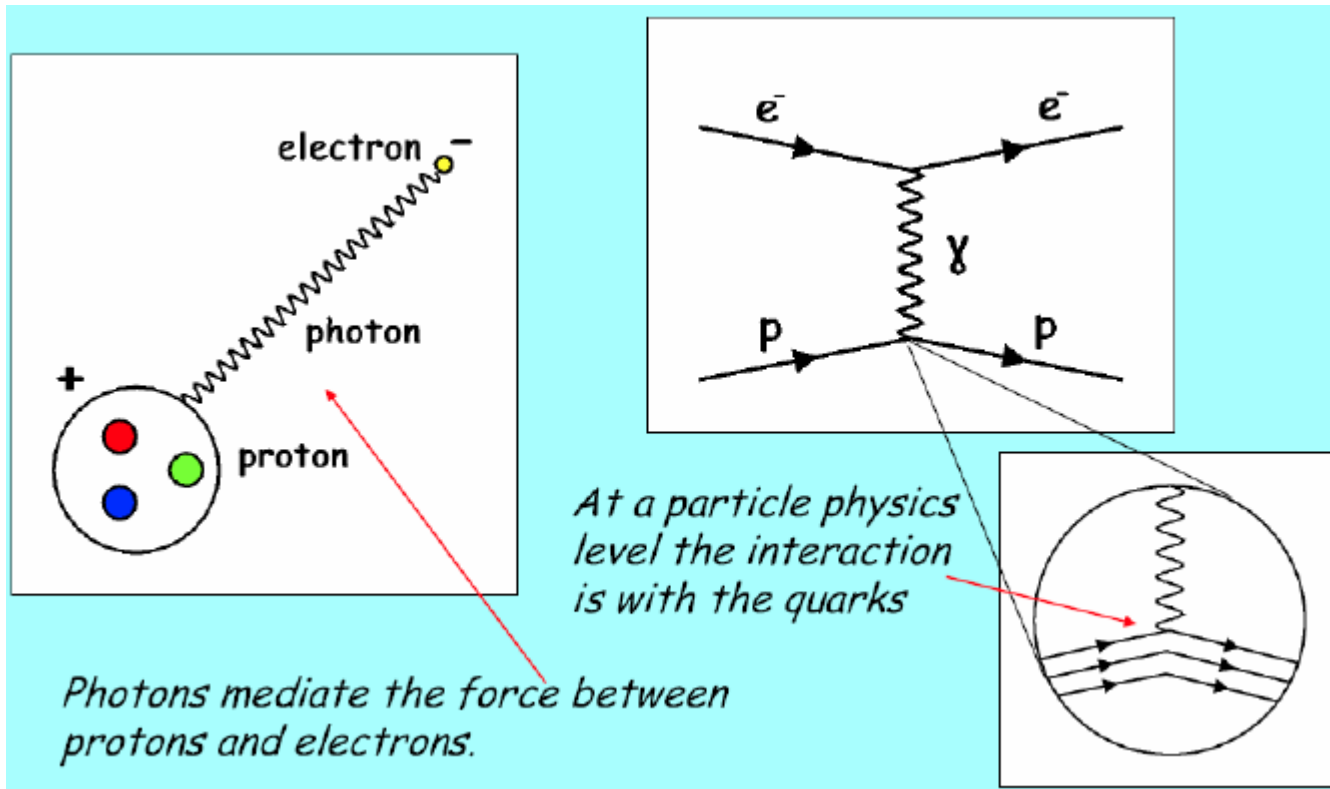


(α) Δίδυμη Γένεση

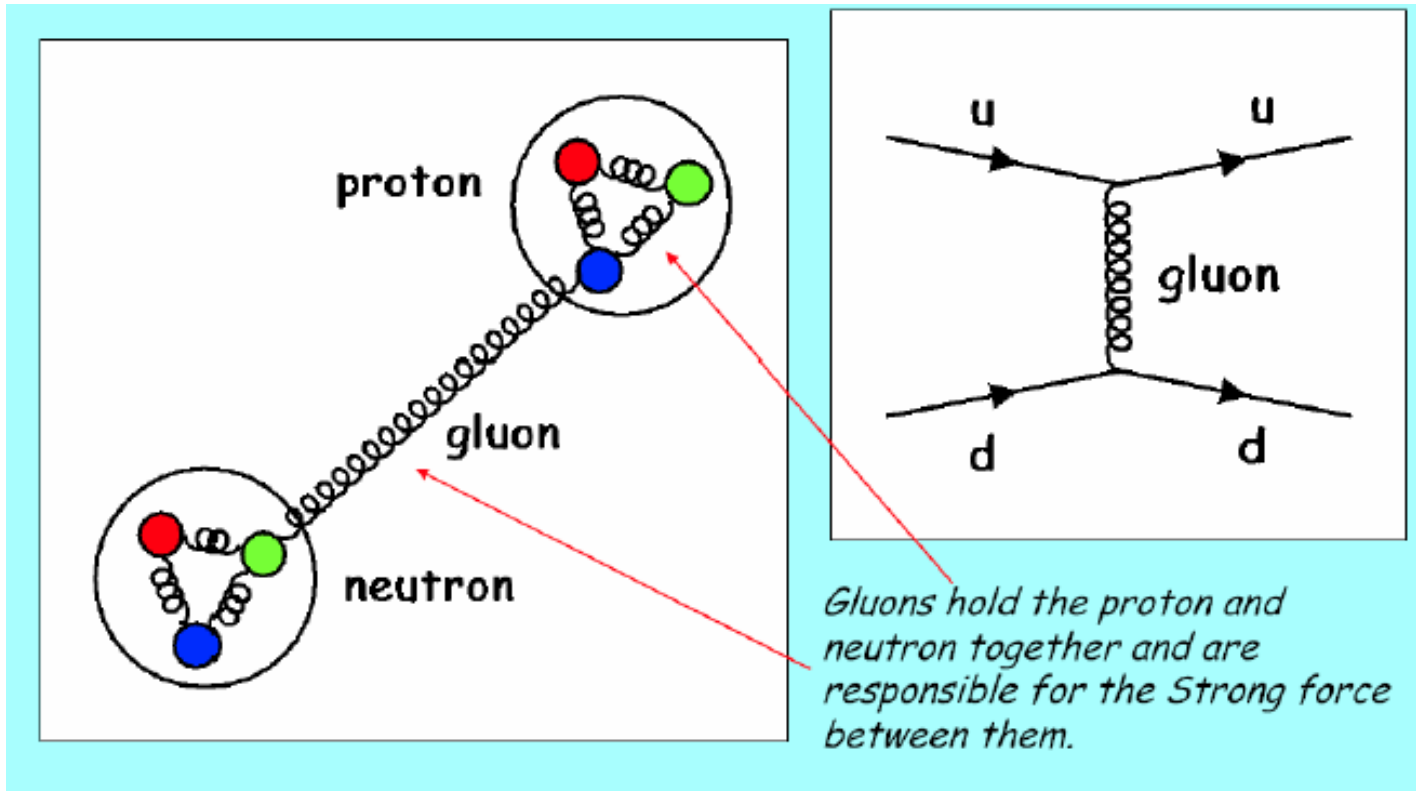
(β) Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

(γ) Εξαΰλωση ποζιτρονίου

Ηλεκτρομαγνητικές Αλληλεπιδράσεις



Ισχυρές Αλληλεπιδράσεις

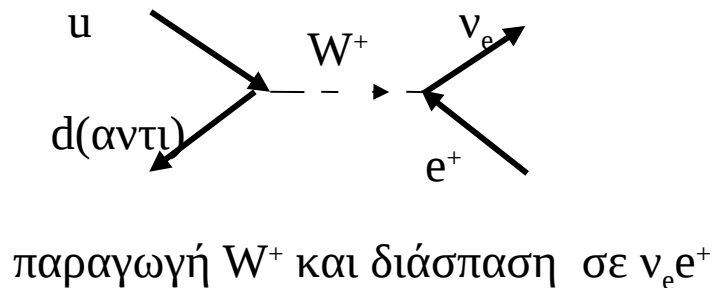
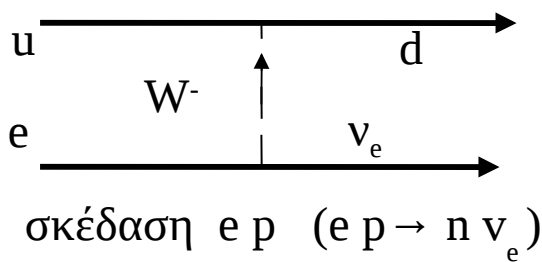


Οι διαδότες των ασθενών δυνάμεων

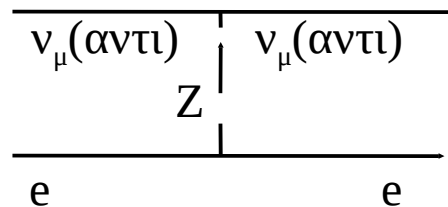
- Ανταλλαγή $W^\pm \Rightarrow$ μεταβολή του φορτίου των κουάρκ ή λεπτονίων που συμμετέχουν :

– $u \rightarrow d, e^- \rightarrow \nu_e$

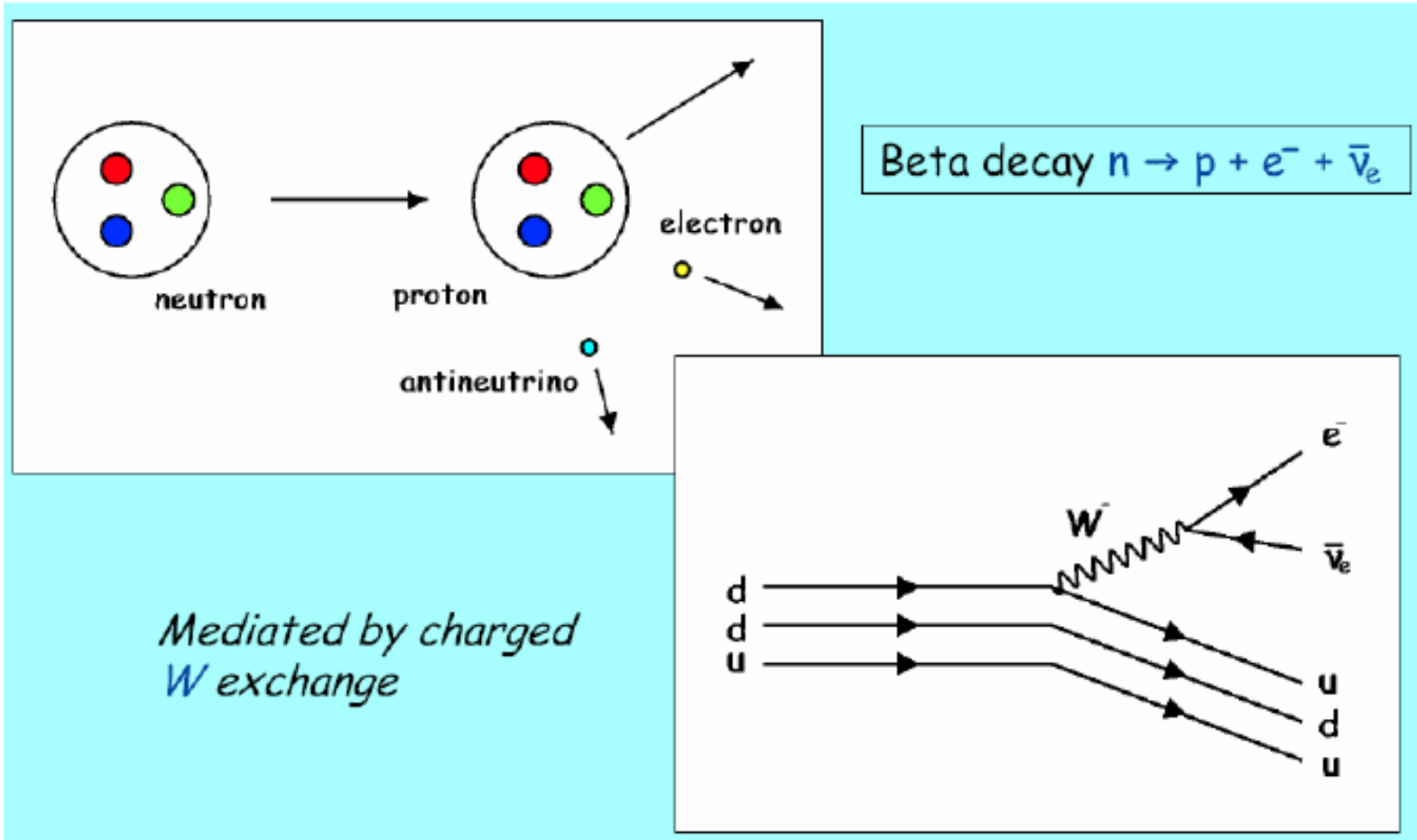
[ανταλλαγή W^- , W^+ αντίστοιχα] -> φορτισμένα ασθενή ρεύματα



- Ανταλλαγή $Z^0 \rightarrow$ ουδέτερα ασθενή ρεύματα



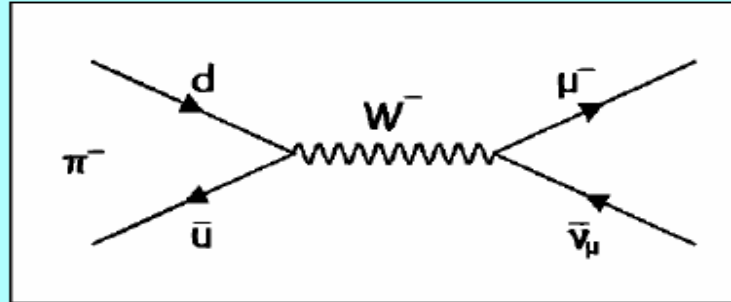
Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις



Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις

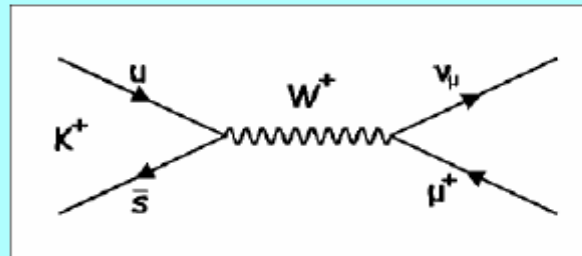
$\Delta S = 0$ (No strangeness change)

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

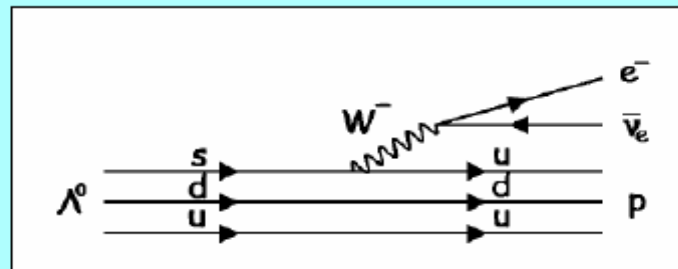


$\Delta S = 1$ (Strangeness changes)

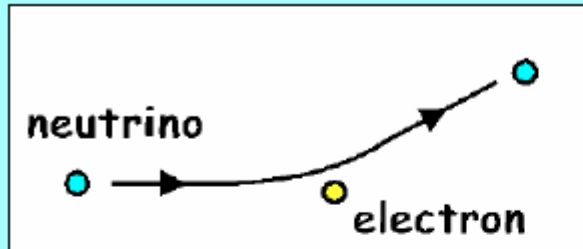
$$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$



$$\Lambda^0 \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

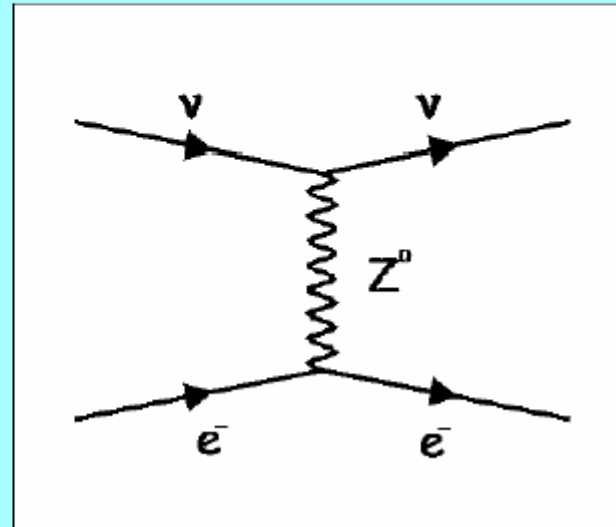


Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις



*Mediated by neutral
Z exchange*

Neutrino scattering
off an electron



Άσκηση 6

Αυτές οι αντιδράσεις επιτρέπονται: α) Τι είδος είναι τα νετρίνα? β) Ποιά η σύσταση κουάρκ των αδρονίων, γ) Κάνετε τα διαγράμματα Feynman

$$\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$$

$$\nu p \rightarrow n e^+$$

$$\mu^+ \rightarrow e^+ \nu \nu$$

$$\nu {}^{37}_{17}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}_{18}\text{Ar} e^-$$

$$\mu^- \rightarrow e^- \nu \nu$$

$$\nu p \rightarrow \bar{\mu} n$$

$$K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$$

$$\nu n \rightarrow e^- p$$

$$\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ e^- \nu$$

$${}^3_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He} e^- \nu$$

$$\Sigma^- \rightarrow n \mu^- \nu$$

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu$$

$$\Sigma^+ \rightarrow \Lambda^0 e^+ \nu$$

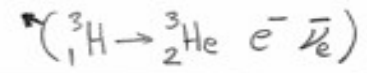
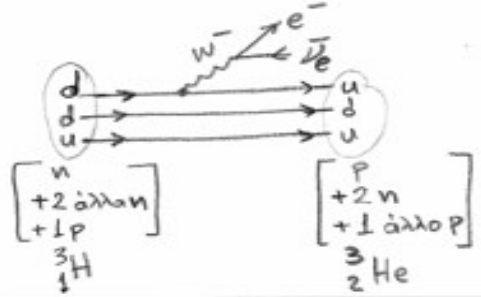
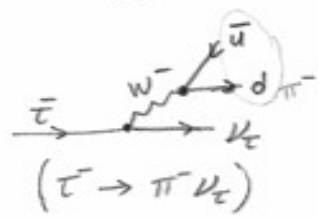
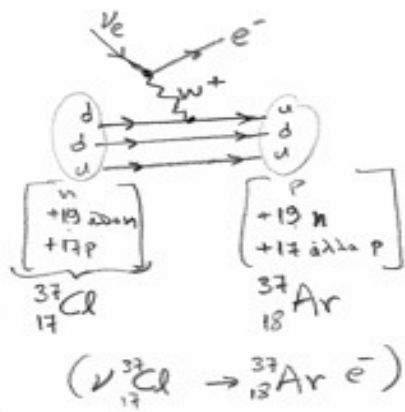
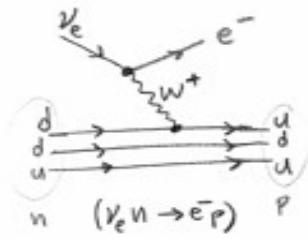
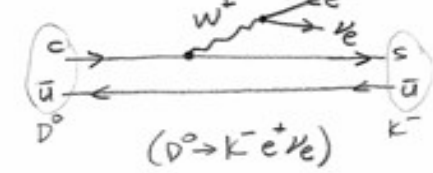
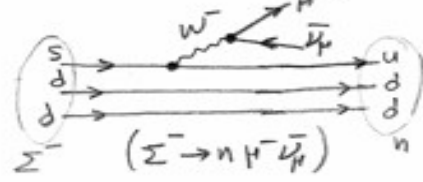
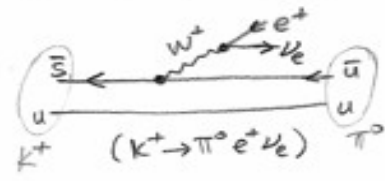
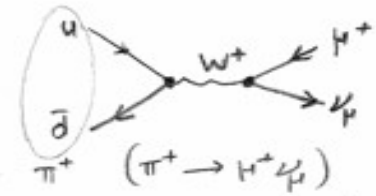
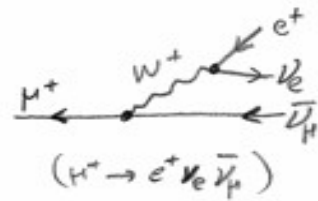
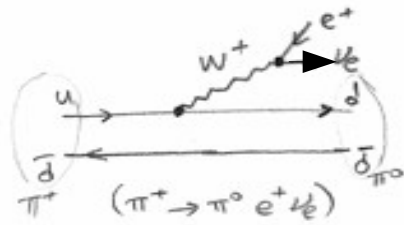
$$\pi^- \rightarrow e^- \nu$$

$$D^0 \rightarrow K^- e^+ \nu$$

$$\tau^- \rightarrow \pi^- \nu$$

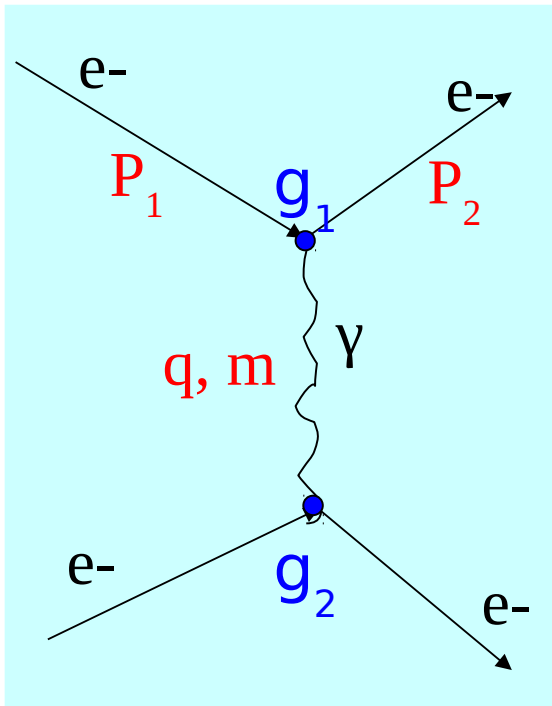
Άσκηση 6 - Λύση

Αυτές οι αντιδράσεις επιτρέπονται: α) Τι είδος είναι τα νευτρίνα? β) Ποιά η σύσταση κουάρκ των αδρονίων, γ) Κάνετε τα διαγράμματα Feynman



Μποζονικός διαδότης και ισχύς σύζευξης

- Μεταφορά Ενέργειας & ορμής (τετρα-ορμής): $\mathbf{q} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$ όπου $P_1 =$ τετρα-ορμή = $\{E, p_x, p_y, p_z\}$ του σωματιδίου #1, κλπ.



Διαταραχή κυματοσυνάρτησης λόγω σκέδασης

Πλάτος σκέδασης $f(q)$ είναι το στοιχείο πίνακα M της μετάβασης από την αρχική στην τελική κατάσταση

$$M = f(q) = \frac{g_1 g_2}{q^2 - m^2}$$

- $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ η ισχύς της σύζευξης του μποζονίου (διαδότη) με τα σκεδαζόμενα σωματίδια.
Εδώ: $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}$
- $q^2 - m^2 =$ πόσο μακριά είναι η μάζα του διαδότη στην αλληλεπίδραση αυτή, από τη φυσιολογική τιμή της μάζας του διαδότη.
($q =$ τετρα-ορμή, και $m =$ μάζα του διαδότη)

Ρυθμός αλληλεπιδράσεων W , στοιχείο πίνακα M , και σταθερά σύζευξης g

- Ρυθμός αλληλεπίδρασεων W : αριθμός μεταβάσεων από την αρχική στην τελική κατάσταση ανά μονάδα χρόνου.
- Ο ρυθμός W εξαρτάται από το τετράγωνο του μέτρου του στοιχείου πίνακα M της μετάβασης: $W \sim |M|^2$

$$M = f(q) = \frac{g_1 g_2}{q^2 - m^2} = \frac{g^2}{q^2 - m^2} \quad \longrightarrow \quad |M|^2 \sim \left| \frac{g^2}{q^2 - m^2} \right|^2$$

- Σκεδάσεις σωματιδίων: ο ρυθμός αλληλεπιδράσεων (W) είναι ανάλογος της ενεργού διατομής (σ) της αλληλεπίδρασης
- Διασπάσεις σωματιδίου με μέσο χρόνο ζωής τ πλάτος Γ :
 $W = 1/\tau = \Gamma / \hbar$

$$\text{θυμηθήτε : } \Gamma \tau = \hbar \rightarrow \tau = \frac{\hbar}{\Gamma}$$

• **Οπότε: $\sigma \sim W \sim |M|^2 \sim g^4$ και $\Gamma \sim W \sim |M|^2 \sim g^4$**

Ηλεκτρομαγνητικές Αλληλεπιδράσεις

Η σταθερά σύζευξης σε κάθε κόμβο των Feynman είναι $\sqrt{\alpha}$

Σταθερά λεπτής υφής: α

Μια αδιάστατη ποσότητα που μετράει την ένταση της ζεύξης.

Ο λόγος της ηλεκτροστατικής ενέργεια απώθησης δύο e σε απόσταση ίση με το ισοδύναμο μήκος Compton προς την ενέργεια που αντιστοιχεί στην μάζα ηρεμίας του e .

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\hbar}{mc}\right) mc^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}$$

Θα χρησιμοποιούμε παντού:

MeV για ενέργεια,

$1/4\pi\epsilon_0 = 1$ σε όλους τους τύπους,

και θα βάζουμε:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = e^2 = \alpha \hbar c, \text{ όπου } \alpha = 1/137$$
$$\hbar c = 197 \text{ MeV fm}$$

Η ποσότητα $\alpha^{1/2} \sim e$ εκφράζει την πιθανότητα για την εκπομπή ή απορρόφηση ενός φωτονίου.

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = (\mu\epsilon \ 4\pi\epsilon_0 = 1 \text{ και } \hbar c = 1) \rightarrow \sqrt{\alpha} = e$$

Ηλεκτρομαγνητικές Αλληλεπιδράσεις

Η ισχύς της αλληλεπίδρασης μεταξύ φορτισμένων σωματίων και φωτονίων είναι όσο το φορτίο του ηλεκτρονίου: $g = e \sim \text{sqrt}(\alpha)$:
(η σταθερά της λεπτής υφής α)

Σε κάθε κόμβο, ισχύς σύζευξης $\sim \sqrt{\alpha}$

Πιθανότητα σύζευξης $\sim \alpha$

Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο :

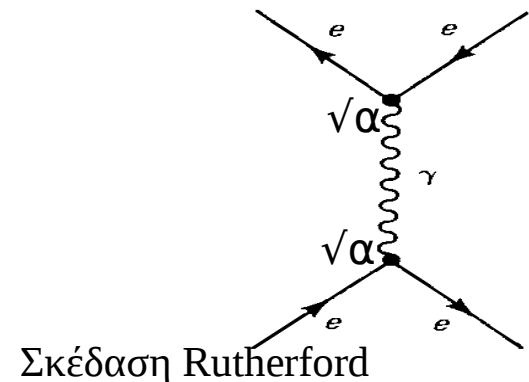
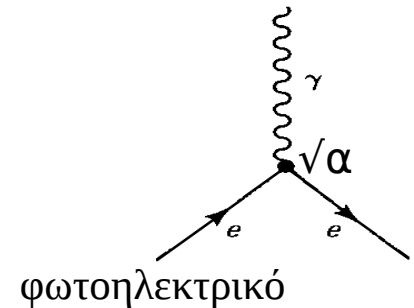
πλάτος της αλληλεπίδρασης $\sim \sqrt{\alpha}$

=> ενεργός διατομή: $\sim \alpha$ (1ης τάξης)

Σκέδαση Coulomb:

πλάτος της αλληλεπίδρασης $\sim \alpha$

=> ενεργός διατομή: $\sim \alpha^2$ (2ης τάξης)



Ηλεκτρομαγνητικές Αλληλεπιδράσεις

Η ισχύς της αλληλεπίδρασης μεταξύ φορτισμένων σωματίων και φωτονίων είναι όσο το φορτίο του ηλεκτρονίου: $g = e \sim \sqrt{\alpha}$:
(η σταθερά της λεπτής υφής α)

Σε κάθε κόμβο, ισχύς σύζευξης $\sim \sqrt{\alpha}$

Πιθανότητα σύζευξης $\sim \alpha$

Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο :

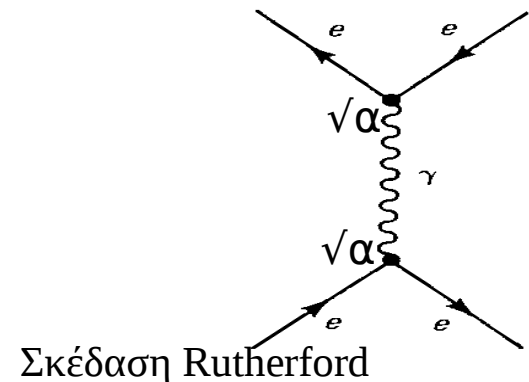
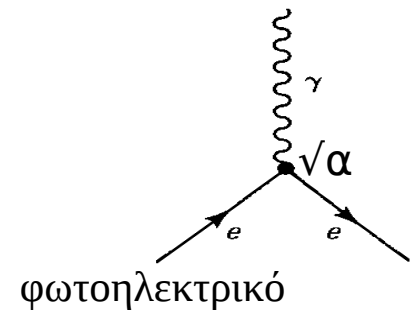
πλάτος της αλληλεπίδρασης $\sim \sqrt{\alpha}$

=> ενεργός διατομή: $\sim \alpha$ (1ης τάξης)

Σκέδαση Coulomb:

πλάτος της αλληλεπίδρασης $\sim \alpha$

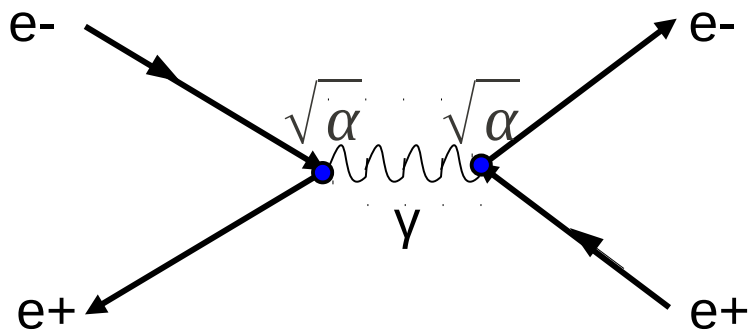
=> ενεργός διατομή: $\sim \alpha^2$ (2ης τάξης)



Άσκηση 7

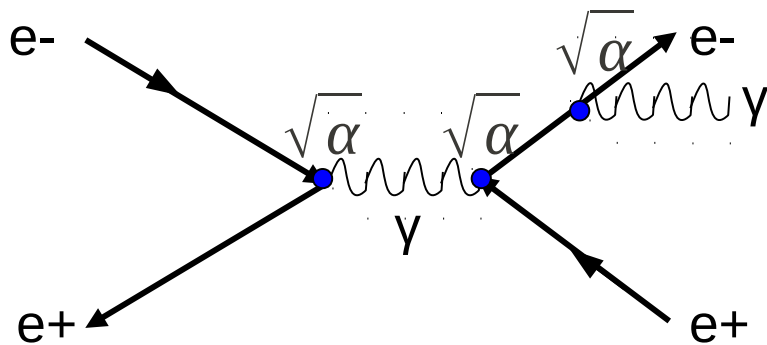
Ποιά απ'τις 2 εκδοχές είναι η πιθανότερη να γίνει? Κατά πόσο σε σχέση με την άλλη?

Διαφορά στην πιθανότητα να συμβούν οι δύο αυτές εκδοχές:



ενεργός διατομή $\sigma \sim \alpha^2$
 $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$

Το πάνω είναι
πιθανότερο
(κατά $1/\alpha = 137$) να
εκπέμψει φωτόνιο



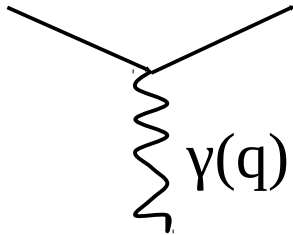
ενεργός διατομή $\sigma \sim \alpha^3$
 $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^- \gamma$

Οι διαδότες των ασθενών δυνάμεων

- Τα μποζόνια βαθμίδας (gauge bosons): W^+ , W^- , Z^0
- Με μάζες : W^+ , W^- : $80 \text{ GeV}/c^2$,
 Z^0 : $90 \text{ GeV}/c^2$

Ηλεκτρομαγνητικές Δυνάμεις

- κόμβος (διάγραμμα Feynman)



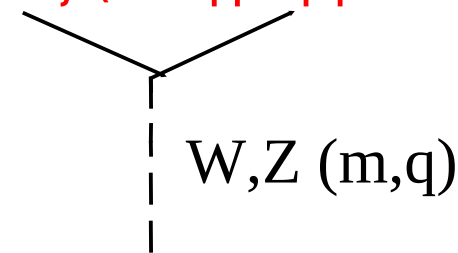
- Σταθερά Σύζευξης

$$\alpha = e^2,$$

$$f(q) = \frac{\sqrt{\alpha} \sqrt{\alpha}}{q^2}$$

Ασθενείς Δυνάμεις

- κόμβος (διάγραμμα Feynman)



- Σταθερά Σύζευξης

$$a_w = g^2,$$

$$f(q) = \frac{g^2}{q^2 - m^2}$$

Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις

Η σταθερά σύζευξης σε κάθε κόμβο των Feynman είναι \sqrt{G}

$$f(q) = \frac{g^2}{q^2 - M_{W,Z}^2} \quad \text{Για } q^2 \rightarrow 0: |f(q)| = \left| \frac{g^2}{M_{W,Z}^2} \right| = G \simeq 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

Στην ενοποιημένη θεωρία των ηλεκτρομαγνητικών και των ασθενών δυνάμεων (την “ηλεκτρασθενή θεωρία” των Weinberg, Salam και Glasgow, 1968) προτάθηκε η σταθερά της σύζευξης (g) των W και Z με τα λεπτόνια και τα κουάρκ, να είναι ίση με την ηλεκτρομαγνητική σύζευξη του φωτονίου με ηλεκτρόνια (e). Οπότε $g = \sqrt{\alpha} = e$.

Η ασθενής σύζευξη εμφανίζεται με σταθερά G (τη σταθερά Fermi) που είναι μικρότερη από την e^2 του ηλεκτρομαγνητισμού κατά $M_{W,Z}^2$ λόγω της μάζας των διαδοτών W και Z

Γνωρίζοντας τη σταθερά του Fermi, G (από διάφορες μετρήσεις χρόνων ζωής με χρήση του χρυσού κανόνα του Fermi, π.χ., στο χρόνο ζωής του μιονίου), Περιμένουμε:

$$M_{W,Z} = \frac{g}{\sqrt{G}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{G}} = \sqrt{\frac{\alpha}{G}} \simeq 90 \text{ GeV}$$

όπως και βρέθηκε στο CERN το 1983!

Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις

- Κουάρκς και λεπτόνια φέρουν 'ασθενές' φορτίο .
- Τα νετρίνο έχουν μόνο ασθενές: ΔEN έχουν ούτε ισχυρό, ούτε ηλεκτρομαγνητικό φορτίο
- Οι ασθενείς δυνάμεις είναι 10^3 - 10^5 φορές ασθενέστερες από τις ηλεκτρομαγνητικές → μικρότερη πιθανότητα σύζευξης
- Μπορούν να παραβιάζουν τις γεύσεις ΔC, ΔS≠0 (αλλά μέχρι ΔC, ΔS = +-1)
- Περιλαμβάνουν είτε μόνο κουάρκς ή κουάρκς και λεπτόνια
- Παραδείγματα: διάσπαση νετρονίου, σκέδαση αντινετρίνο-πρωτονίου
 $\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$ ($\tau \approx 10^{-10}$ sec) → ασθενής (ΔS=1)
 $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$ ($\tau \approx 10^{-19}$ sec) → ηλεκτρομαγνητική

Χρόνος ζωής (τ) και πλάτος (Γ) σωματίου

Πεπερασμένος χρόνος ζωής σημαίνει αβεβαιότητα στην τιμή της ενέργειας (μάζας) ενός σωματιδίου

- αρχής της αβεβαιότητας $\Delta E \Delta t = \hbar$,
όπου $\Delta E = (\Delta m)c^2$, και $\Delta t = \tau \rightarrow$

$$\tau = \frac{\hbar}{(\Delta m)c^2} = \frac{\hbar}{\Gamma}$$

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}$$

- Η διασπορά στην κατανομή της μάζας είναι το πλάτος Γ του σωματιδίου και είναι μέτρηση του χρόνου ζωής τ
- Για σωματίδια που διασπώνται με τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις, $\tau \sim 10^{-23}$ s είναι περίπου όσο χρόνο χρειάζεται το φως για να διαπεράσει ένα αδρόνιο (διάμετρος $\sim 1\text{fm} \sim 10^{-15}$ m). Προφανώς και δεν μπορεί να μετρηθεί μια τροχιά ενός σωματίου με χρόνο ζωής 10^{-23} s ...
- Οπότε, μετρώντας τα προϊόντα της διάσπασης και με την αρχή διατήρησης ενέργεια και ορμής, κατασκευάζουμε τη **μάζα (ενέργεια) του διασπαζόμενου σωματιδίου**, η οποία έχει μια κατανομή κι από εκεί μπορούμε να βρούμε το Γ

Χρόνος ζωής (τ), πλάτος (Γ) σωματίου και σταθερές σύζευξης τρω διαφόρων αλληλεπιδράσεων

$\Gamma = 1/\tau =$ πιθανότητα διάσπασης ανά μονάδα χρόνου

Άρα, όπως και η ενεργός διατομή (που είναι μέτρο της πιθανότητας να γίνει μιά σκέδαση ή εξαύλωση), έτσι και το Γ είναι ανάλογο του “ a ”²

(όπου “ a ”² = a^2 ή a_w^2 ή a_s^2 : ανάλογα αν η αλληλεπίδραση είναι ηλεκτρομαγνητική, ασθενής ή ισχυρή, αντίστοιχα)

$$\frac{1}{\tau} = \Gamma \sim a^2$$

Άσκηση 8

Συγκρίνετε τις σταθερές σύζευξης για τις εξής διασπάσεις

- $K^- + p \rightarrow \Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$ $\tau = 10^{-23} \text{ sec}$
- $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$ $\tau = 10^{-19} \text{ sec}$
- $\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$ $(\tau \approx 10^{-10} \text{ sec})$

=> σημειώσεις στοιχειωδών, παράγραφο 1.8.

Άσκηση 8 - λύση

Και Ισχυρές Αλληλεπιδράσεις

- Οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις συμβαίνουν μεταξύ κουάρκ



$$\downarrow$$
$$\tau = \hbar/\Gamma \rightarrow 10^{-23} \text{ sec}$$



$$\Rightarrow (a_s / a) = (10^{-19} / 10^{-23})^{1/2} \approx 100 \text{ -----} \rightarrow a_s = g_s^2 / 4\pi\hbar c$$

g_s είναι το αντίστοιχο φορτίο για τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις:

χρώμα \Leftrightarrow ισχυρό φορτίο

\Rightarrow Κουάρκ : **Red**, **Green**, **Blue** (R, G, B)

\Rightarrow Αντικουάρκ: anti-**Red**, anti-**Green**, anti-**Blue** : R(bar), G(bar), B(bar)

Βασικά χαρακτηριστικά των δυνάμεων

	Ισχυρή	Ασθενής	Ηλεκτρο-μαγνητική	Βαρυτική
Σταθερά σύζευξης	$a_s = 0.1-1$	$G = G_F = 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$	$a = 1/137$	$KM^2/\hbar c = 0.5 \times 10^{-38}$
Τυπική ενεργός διατομή	10 mb	10 pb	10^{-2} mb	
Τυπικός χρόνος ζωής (sec)	10^{-23}	$10^{-10} - 10^{-8}$ (στις ασθενείς υπάρχουν μεγάλες διαφοροποιήσεις στους χρόνους ζωής)	10^{-20}	

Ο χρόνος ζωής είναι ένδειξη για το ποιά αλληλεπίδραση είναι υπεύθυνη για τη διάσπαση, και τι "α" (σταθερά σύζευξης) έχει αυτή η αλληλεπίδραση. Να έχετε υπ' όψιν σας αυτές τις τάξεις μεγέθους.

Πάντα χρήσιμα: Σχετικιστική κινηματική και μονάδες

Σχετικιστική κινηματική:

$$E = mc^2$$

ενέργεια μάζα $c =$ ταχύτητα του φωτός



Η μάζα είναι μια μορφή ενέργειας

γενικά, με κινητική ενέργεια T , έχουμε: $E = T + mc^2$

$E = \gamma mc^2$, όπου $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, και $\beta = v/c$, με $v =$ ταχύτητα σωματιδίου

$p = \gamma mv = \gamma m\beta c$, όπου $p =$ ορμή

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \quad \rightarrow \quad E [\text{MeV}], p [\text{MeV}/c], m [\text{MeV}/c^2]$$

Μονάδες:

$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \equiv$ μονάδα ταχύτητας $\equiv 1$

$\hbar c = 197 \text{ MeV fm}$, όπου: $\hbar = \frac{h}{2\pi} \equiv$ μονάδα δράσης (ενέργειας \times χρόνου) $\equiv 1$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}$$

Σημείωση: με $c = 1$, έχουμε: $E^2 = p^2 + m^2$, κλπ.

έξτρα

Έχοντας 4.5 GeV διαθέσιμη ενέργεια, ποιο είναι το βαρύτερο ισότοπο που μπορεί να κανείς να παράγει θεωρητικά;

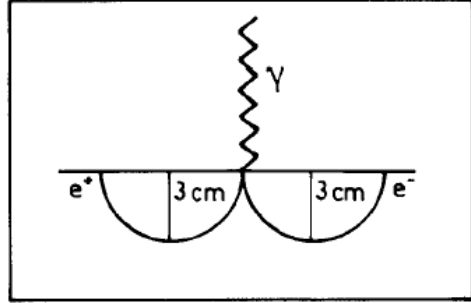
1. ^2D
2. ^3He
3. ^3T

Λύση

Με 4.5 GeV διαθέσιμη ενέργεια μπορεί κανείς να παράγει βαρυόνια με ενέργεια μέχρι 2.25 GeV. Για να διατηρείτε ο βαρυονικός αριθμός θα πρέπει να παράγονται ο ίδιος αριθμός βαρυονίων και αντιβαρυονίων ταυτόχρονα. Άρα τελικά μόνο η μισή ενέργεια είναι διαθέσιμη για την παραγωγή βαρυονίων. Από τα τρία ισότοπα μόνο το ^2D έχει μάζα ηρεμίας μικρότερη των 2.5 GeV. Η σωστή απάντηση είναι (1)

Extras

A certain electron-positron pair produced cloud chamber tracks of radius of curvature 3 cm lying in a plane perpendicular to the applied magnetic field of magnitude 0.11 Tesla (Fig. 4.3). What was the energy of the γ -ray which produced the pair?



$$\begin{aligned} pc &= ecB\rho \\ &= \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^8}{1.6 \times 10^{-13}} B\rho \\ &= 300B\rho \end{aligned}$$

$$evB = \frac{m\gamma v^2}{\rho} = \frac{pv}{\rho},$$

with B in Tesla, ρ in meter and p in MeV/c. Hence, on putting $c = 1$, the momentum of the e^+ or e^- is

$$p = 300B\rho = 300 \times 0.11 \times 0.03 = 0.99 \text{ MeV}/c,$$

and its energy is

$$E = \sqrt{p^2 + m_e^2} = \sqrt{0.99^2 + 0.51^2} = 1.1 \text{ MeV}.$$

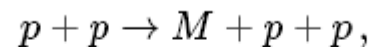
Therefore the energy of the γ -ray that produced the e^+e^- pair is approximately

$$E_\gamma = 2E = 2.2 \text{ MeV}.$$

Σε μια σύγκρουση μεταξύ ενός ακίνητου πρωτονίου και κινούμενου πρωτονίου παράγεται σωματίδιο με μάζα ηρεμίας M επιπλέον των δύο πρωτονίων. Να βρεθεί η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να έχει το κινούμενο πρωτόνιο ώστε να είναι δυνατή αυτή η αντίδραση.

Λύση:

Στο ενεργειακό κατώφλι της αντίδρασης



τα σωματίδια στο βρεζι σκελος παραγονται σε ηρεμια. Η ενεργεια και η ορμή του κινούμενου σωματιδίου είναι E_p p αντίστοιχα. Η αναλλοίωτη μάζα του συστήματος στο κατώφλι είναι :

$$S = (E_p + m_p)^2 - p_p^2 = (2m_p + M)^2 .$$

$$E_p^2 = m_p^2 + p_p^2 ,$$

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{(2m_p + M)^2 - 2m_p^2}{2m_p} \\ &= m_p + 2M + \frac{M^2}{2m_p} . \end{aligned}$$

Ένα σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m και κινητική ενέργεια διπλάσια της μάζας ηρεμίας του συγκρούεται με ένα ακίνητο σωματίδιο ίσης μάζας. Τα δύο σωματίδια συνδυάζονται και παράγουν ένα νέο σωματίδιο. Να υπολογιστεί η μάζα ηρεμίας του νέου σωματιδίου.

Λύση

Έστω M η μάζα του νέου σωματιδίου. Το κινούμενο σωματίδιο έχει συνολική ενέργεια $E=m+T=3m$.

Στο όριο όπου το σωματίδιο παράγεται σε ηρεμία και το τετράγωνο της αναλλοίωτης μάζας είναι

$$S=(E+m)^2-p^2=M^2$$

$$\text{Με } E^2-p^2=m^2, \text{ έχουμε } M^2=E^2+2Em+m^2-p^2=2Em+2m^2=8m^2,$$

$$M=2\sqrt{2}m$$